Schváleno výnosem ministerstva školství a kultury
čj. 59367/64-III/1a ze dne 11. prosince 1964
jako vysokoškolská učebnice

Matematické metody v ekonomii

BENEDIKT KORDA A KOLEKTIV

Praha 1967

SNTL — Nakladatelství technické literatury

Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry

Kniha vykládá základy disciplín lineárního, nelineárního, dynamického a stochastického programování, dále strukturální analýzu a teorii her. Nejpodrobněji je zpracován výklad lineárního programování, kterého dosud praxe nejvíce používá. Probírá se metoda simplexová, problém duality, řešení dopravního problému a některé speciálnější metody, jako celočíselné programování, parametrické programování, model „Oslo" apod. Kniha obsahuje i nutný přehled matematického aparátu, potřebného ke studiu, řadu cvičení a pětijazyčný slovníček základního odborného názvosloví.

Určeno studujícím vysokých škol ekonomických a postgraduálních kursů z oboru matematických metod v ekonomii i širokému okruhu hospodářských pracovníků.

Lektorovali: RNDr. Josef Bílý, CSc., a doc. Ing. Adam Laščiak, CSc.

Redakce ekonomické literatury — hlavní redaktor Vladimír Waigner

OBSAH

PŘEDMLUVA

Název knihy neodpovídá plně obsahu. V ekonomii se v současné době používá velmi rozsáhlého matematického aparátu, a to z různých oblastí matematiky. Obsáhnout celý tento aparát v jedné knize není možné. V této učebnici se zabýváme pouze úzkým výsekem tohoto aparátu. Výběr látky se řídil především současnými potřebami vysokých škol ekonomických. Jádrem knihy je výklad lineárního programování, na který navazuje stručný výklad příbuzných disciplín, jako nelineárního, dynamického a stochastického programování, teorie her a strukturální analýzy. Jako samostatnou knihu chystá naše katedra učebnici stochastických procesů a jejich aplikací v ekonomii.

Kniha je určena především ekonomům. Proto, a s ohledem na nedostatek příslušné literatury, jsou v knize vyloženy i potřebné matematické základy. Výjimku tvoří kapitola o stochastickém programování, která je pouze informativní; nároky na matematiku zde přesahují rámec knihy.

Napsat dobrou učebnici v daném oboru je věc velmi obtížná a časově náročná. Zejména nesnadné je spojit v jedné knize učebnici i praktickou příručku. Avšak současné naléhavé volání po příručce — ze strany posluchačů i pracovníků z praxe — nedovolilo nám věnovat knize tolik péče, kolik by zasloužila. Řídili jsme se totiž heslem „kdo rychle dává, dvakrát dává“.

Autorsky spolupracovali Dr. M. Maňas, CSc., který napsal kapitolu 12, Dr. J. Žáčková, CSc., která napsala kapitolu 13, dále Ing. V. Pelzbauerová, která sestavila cvičení a slovníček s rejstříkem.

Jsme velmi povděčni recenzentům knihy Dr. J. Bílému, CSc., a Ing. A. Laščiakovi, CSc., za velmi cenné připomínky. Zejména pečlivě vypracované připomínky Dr. Bílého značně přispěly k zlepšení textu.

Pro další práci autorů je velmi důležitý kontakt se čtenářem. Prosíme proto čtenáře, aby své kritické připomínky oznámili autorům na Vysokou školu ekonomickou v Praze.

KAPITOLA 1 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ V EKONOMII

1.1 MATEMATIKA A EKONOMIE

Použití matematiky v ekonomii je velmi starého data; některé matematické disciplíny se rozvíjely již dříve na základě potřeb ekonomie (počet procentový a úrokový, pojistná matematika aj.). Šlo však jen o omezený obor použití matematiky za účelem výpočtu výsledků (určitých nebo pravděpodobných) dané nebo předpokládané hospodářské činnosti (kalkulace výsledků).

Možnosti použití matematiky v ekonomii jsou však, stejně jako v jiných oblastech vědy a praxe, mnohem širší. Dnes vystupují do popředí jiné funkce matematiky, a to matematika jako nástroj vědecké analýzy, vědeckého usuzování (matematické modelování) a matematika jako nástroj ověřování empirických údajů (matematická statistika). Obě tyto funkce matematiky mají své místo jak v ekonomické teorii, tak i v praktických aplikacích. Nepřihlížíme-li k ojedinělým pokusům, lze počátky pronikání matematických metod do ekonomie klást do poloviny 19. století (Cournot). Šlo o použití matematiky (matematické dedukce) k vysvětlení ekonomických jevů, bez ohledu na to, zda je možno příslušné veličiny měřením skutečně určit (matematická ekonomie). Pronikání statistických metod (teorie odhadu, testování hypotéz) pak dává na počátku třicátých let tohoto století vznik nové disciplíně – ekonometrii. Na rozdíl od matematické ekonomie zabývá se ekonometrie jen měřitelnými veličinami, empiricky odhadnutelnými modely. Jejím úkolem je v podstatě dát empirickou náplň zákonům, které politická ekonomie odvozuje deduktivně. Dalším úkolem je poskytovat empiricky ověřené podklady hospodářské politice.

Těsně před druhou světovou válkou, a zejména pak po ní začíná bouřlivý rozvoj nové disciplíny, která dostala název **operační výzkum** (operations research nebo operational research). Zabývá se vědeckou analýzou složitých operací a vypracováváním vhodných doporučení na základě této analýzy.*) Typické pro operační výzkum je právě hojné použití matematických metod.

---

*) Název „*operační výzkum*" je celkem konvenční. Vznikl za druhé světové války, kdy se metod operačního výzkumu využívalo k analýze složitých vojenských operací.

Operační výzkum, ač děkuje za svůj vznik do značné míry aplikacím vojenským, má dnes použití převážně na poli ekonomickém. Nutnost vědeckých metod analýzy je tu odůvodněna zejména dvěma skutečnostmi:

a) S rozvojem výrobních sil nabývají hospodářské operace, jako operace obchodní, výrobní, investiční atd. obrovských rozměrů a stávají se nesmírně složitými, takže obvyklými metodami nebývá již možno předvídat důsledky toho či onoho způsobu provedení operací.

b) U větších hospodářských jednotek nastala dělba práce i v řídicích funkcích, což skrývá nebezpečí jednostranného posouzení daných operací.

Operační výzkum má proto zabezpečit všestranný a objektivní rozbor situace a na základě toho dát doporučení pro optimální provedení operací. V současné době má operační výzkum už mnohé dobře propracované metodické přístupy k řešení řady hospodářských problémů:

1. **Problémy alokační** (tj. problémy optimálního rozmístění, popř. využití omezených zdrojů) – patří sem např. problémy sestavení výrobních programů, problémy dělby práce (mezi stroji, podniky či oblastmi), problém rozmístění kapacit a mnoho jiných. Matematickým aparátem k řešení těchto problémů jsou v podstatě metody matematického programování.

2. **Problémy čekací** — vznikají všude, kde nepravidelný přísun jednotek potřebujících obsluhu nebo nahodilost délky obsluhy vedou k tvoření „front". Typickými příklady těchto problémů jsou hromadění lodí čekajících na opravu v docích, kumulace telefonních hovorů na jednotlivých linkách, návaly cestujících čekajících na odbavení na letištích v době špičkového provozu aj. Těmito problémy se zabývá **teorie front.**

3. **Problémy obnovovací** — objekty (stroje, zařízení aj.) se během času opotřebují, jejich počet se zmenšuje a musí být nahrazeny objekty novými. Úkolem **teorie obnovy** je zkoumat řád ubývání předmětů dané třídy a optimální způsob jejich doplňování tak, aby počet předmětů zůstal stejný, nebo aby se vyvíjel určitým daným způsobem.

Jednoduchým příkladem je třeba výměna kolejnic. Individuální výměna jednotlivých kolejnic v době, kdy se porouchají, je nehospodárná. Vede k plýtvání kvalifikovanými pracovníky, kteří musí projet i velké vzdálenosti. Kromě toho může vést i k poruchám v provozu dráhy. Proto se kolejnice vyměňují vždy hromadně. Problémem je ovšem určit optimální okamžik výměny.

4. Problematika zásob — záleží v nalezení optimální velikosti zásob, resp. optimální velikosti výrobních dávek apod. Zabývá se jí **teorie zásob.**

5. V poslední době se rozpracovávají speciální metody vyhodnocování velkých projektů. Jde při tom zejména o analýzu návaznosti jednotlivých dílčích etap projektu za účelem jejich optimálního načasování (metoda kritického sledu, PERT aj.).

To je ovšem jen neúplný a nepřesný výčet oborů, ve kterých se aplikuje operační výzkum v ekonomii. V podstatě jde u všech uvedených problémů o to, jak podložit ekonomické rozhodování ve složitých případech vědeckým rozborem.

S rozvojem výrobních sil, s prohlubováním dělby práce i s růstem rozměrů hospodářského podnikání se stává rozhodování ve věcech hospodářských čím dále, tím složitější. Předmět a cíle rozhodování v ekonomii mohou být rozmanité. Většinou však jsou rozhodovací problémy problémy optimalizačními. Máme-li rozhodovat, musíme mít různé varianty postupu (nemáme-li možnost volby, nemá smyslu mluvit o rozhodování); při rozhodování je cílem volit tu variantu, která je v určitém smyslu nejlepší.

Abychom mohli správně rozhodovat, musíme pochopitelně znát především možnosti, které máme. Musíme vědět, které akce (procesy, činnosti) můžeme vůbec provádět a v jakém rozsahu. Dále musíme mít kritérium, podle něhož lze různé varianty postupu navzájem srovnávat a pak se rozhodnout pro nejlepší. Vezměme několik příkladů.

Rozhoduje-li vedení podniku o výrobním programu, musí vědět, které výrobky může vůbec vyrábět (závisí to na výrobním zařízení, na kvalifikaci pracovníků atd.). Dále musí znát možný rozsah výroby, k čemuž je nezbytná znalost kapacity, množství surovin, finančních prostředků, pracovníků a jiných činitelů, jež jsou k dispozici. Pak může vedení podniku určit, které varianty výrobního programu jsou možné. Obvykle jich bude mnoho. Na nejlepší variantu lze usuzovat např. podle zisku. Podle tohoto kritéria by byl nejlepší ten výrobní program, který nese největší zisk. Na dalším příkladě uvidíme, že volba vhodného optimalizačního kritéria a s tím spojené hodnocení bývají zpravidla velmi složité.

Rozhoduje se např. o vybavení určité prodejny obsluhujícím personálem. Snahou podniku je, aby obsluha byla plynulá a aby se dostatečně využívalo pracovní doby prodavačů. Příchod zákazníků do prodejny není ovšem plynulý; má určitý (více či méně pravidelný) denní, týdenní i roční rytmus. Za těchto okolností lze těžko úplně zabránit návalům (frontám). Vybavit prodejnu tak, aby zákazníci byli plynule obslouženi i v okamžicích největšího přílivu, by znamenalo, že personálu i zařízení se nebude po většinu doby zcela využívat. Jaké je tedy optimální vybavení prodejny personálem? Jako kritérium pro rozhodování bychom zde mohli vzít třeba ztráty. Nevyužitím personálu a zařízení vznikají určité ztráty; ztráty však vznikají rovněž při vytváření návalů. Za optimální bychom mohli volit tu variantu, při níž je součet ztrát nejmenší. Posuzovat jednotlivé varianty podle tohoto hlediska není však nijak jednoduché. Ztráty vzniklé nevyužitím personálu a zařízení je možno ocenit podle platných sazeb mzdových, odpisových aj. (což je ovšem také ocenění relativní). Pro podnik vznikají ztráty také tím, že tvoří-li se fronty, část zákazníků odejde. Ocenění těchto ztrát je už podstatně složitější. Díváme-li se však na problém z hlediska společenského, musíme při optimalizaci brát v úvahu i ztráty u zákazníků, které vznikají dlouhým čekáním apod. Ocenění těchto ztrát je ještě složitější. Abychom mohli podle uvedeného kritéria skutečně hledat optimální variantu, musíme všechny složky ztrát ocenit srovnatelným způsobem.

U posledního příkladu zřetelně vystupuje ještě jeden důležitý moment. Podnik a zákazník mají zde do jisté míry protichůdné zájmy. Kdyby se rozhodovalo jenom z hlediska podniku nebo jenom z hlediska zákazníka, bylo by to rozhodování jednostranné, nikoli optimální.

Jiný příklad: Chceme zvýšit odbyt některého zboží na zahraničních trzích, a uvažujeme proto o snížení ceny. Pro správné rozhodování musíme brát v úvahu nejen své možnosti, ale též možná odvetná opatření konkurence, která mohou zvrátit naše opatření. Nejlepší bude v takovém případě opatření, které, zhruba řečeno, je nejméně ohroženo možnými odvetnými opatřeními konkurence (víme-li ovšem o nich). Mluvíme zde o optimální strategii.

To je několik různorodých příkladů hospodářského rozhodování. Abychom vnikli hlouběji do rozhodovacího procesu, posuďme jednoduchý příklad ze soukromého podnikání.

Představme si, že soukromý majitel autodrožky stojí před rozhodnutím, zda má svůj ojetý vůz vyměnit za nový. Aby mohl správně rozhodovat, musí znát především řadu okolností, jako vlastní finanční možnosti, technický stav starého vozidla, možnosti prodeje ojetých vozidel, ceny a technické parametry nových vozidel, pravděpodobné zvýšení tržby, opatří-li si nové vozidlo atd.

Majitel autodrožky má přitom řadu možností: může koupit nový vůz toho či onoho typu (v různé ceně, o různých technických parametrech), může si ponechat zatím starý vůz na určitou dobu (kratší či delší), může dát starý vůz do generální opravy. Ačkoli jde o velmi jednoduchý případ, není ani zde rozhodování snadné.

Ponechat si starý vůz znamená zvýšené náklady na údržbu, vyšší spotřebu provozních hmot, popř. i nižší tržbu (cestující dávají přednost novým vozům). Na druhé straně je koupě nového vozu spojena s investičními náklady, které jsou u různých typů vozů různé. Náš taxíkář může uvažovat zhruba takto:

Zvýšená poruchovost, vyšší spotřeba provozních hmot a event. pokles tržby u starého vozu bude považovat za ztráty (ovšem v porovnání s určitým standardem). Stejně tak může považovat za ztrátu náklady na nové vozidlo (nebo zvýšené odpisy). Souhrn takových „ztrát" je u různých variant různý; za nejlepší variantu může považovat tu, při které jsou ztráty nejmenší. Není ovšem snadné ani v tomto jednoduchém případě správně hodnotit ztráty a dojít k přesným výpočtům.

Pokud jde o hodnocení ztrát, je třeba mít především na paměti, že jde o různorodé položky (činitele) ve své fyzické podobě nesrovnatelné (benzín, maziva, tržby, nový vůz atd.). Taxíkář je musí srovnávat na základě platných cen a tarifů. Ceny a tarify (resp. jejich vzájemný poměr) se však mohou měnit, a tím se výhodná varianta může stát nevýhodnou, a naopak např. vysoké ceny pohonných hmot a maziv zvýhodňují koupi nového vozu (s nižší spotřebou). Sníží-li se pak ceny pohonných hmot, může se ukázat, že koupit nový vůz bylo nevýhodné.*)

Navíc se může při rozhodování uplatnit i subjektivní moment. Tak např. peníze potřebné ke koupi nového vozu budou mít pro taxíkáře (s ohledem na riziko spojené s touto transakcí) různou „cenu" podle jeho finanční situace.

Existuje-li srovnatelné hodnocení všech položek ztrát, neznamená to ještě, že je možno jednotlivé varianty navzájem přesně srovnávat. Vždyť taxíkář může znát více či méně určitě jen některé činitele (zvýšenou spotřebu provozních hmot u starého vozu, náklady na nový vůz aj.), s určitou pravděpodobností jiné (např. poruchovost vozu). U dalších položek se může opřít jen o hrubé odhady (jako u změn v tržbách). Navíc úspěch toho či onoho opatření bude zde záviset i na tom, co podnikne konkurence.

Nelze ovšem očekávat, že by náš taxíkář použil k řešení tohoto případu vědeckých metod. To také není v daném případě zapotřebí. Taxíkář má dobrý přehled o situaci, tj. o stavu svého vozidla, o cenách ojetých i nových vozidel, o tržbách a o vlastních peněžních prostředcích, a má-li dostatek zkušeností, může poměrně dobře odhadnout i budoucí náklady a tržby, a na základě toho rozhodovat. I když jeho rozhodnutí není nejlepší, nebývá chybné a pro nepatrný rozsah případu nemívá ani příliš vážné důsledky. To je ostatně typické pro malovýrobu, kdy pro úspěšné vedení malých podniků plně postačovaly zkušenosti a obchodní cit.

V poměrech velkovýroby se situace mění v několika směrech. Značný rozsah podnikání a složitost vzájemných vztahů jsou na úkor přehlednosti. Bez důkladné evidence nemůže mít dnes nikdo úplný přehled ani o středně velkém podniku.

V řízení hospodářství nastala dělba práce. Jeden vedoucí pracovník řídí výrobu, jiný se stará o zásobování a odbyt, o financování a výstavbu. Toto rozdělení řídicí činnosti na jednotlivé funkce má za následek jednostrannost v pohledu na ten či onen problém a nese s sebou riziko jednostranného rozhodování.

Důsledky nesprávného rozhodování jsou v podmínkách velkovýroby mnohem citelnější a jejich následky mohou být pro podnik i katastrofální.

Z uvedených důvodů nepostačují již v podmínkách velkovýroby k řízení na kterémkoli stupni hospodářství jen zkušenost a intuice; vzniká potřeba exaktních metod rozhodování. Vznik těchto metod je na určitém stupni vývoje výrobních sil zcela zákonitý. Svědčí o tom mimo jiné i okolnost, že tyto metody vznikaly takřka současně a nezávisle na sobě v různých hospodářsky vyspělých státech (v Sovětském svazu, Velké Británii, Spojených státech i jinde).

Rozhodování v jakékoli hospodářské záležitosti předpokládá určité informace statistické, technologické apod. Bez nich je rozhodování slepé. Vezměme třeba otázku

---

*) Tato okolnost je mnohem závažnější v našich podmínkách, kdy jednotlivý podnik není úplně samostatným celkem, nýbrž je součástí jednotného celku socialistického národního hospodářství. Optimální rozhodování podniku (na základě platných cen, tarifů a běžných ukazatelů hospodárnosti) se může dostat do rozporu se zájmy národního hospodářství. Tak např. je-li zvýšení výtěžnosti některé suroviny spojeno s větší pracností, bude rozhodování podniku (zda zvýšit či nezvýšit výtěžnost) záviset na vzájemném poměru mzdových sazeb a cen suroviny. Podnik se rozhodne nezvýšit výtěžnost, budou-li mzdy vyplácené navíc vyšší než cena suroviny získané zvýšením výtěžnosti. Toto rozhodnutí však může být v přímém rozporu s celostátními zájmy.

sestavení výrobního programu podniku. K správnému rozhodování v této otázce jsou nezbytné tyto údaje:

1. Druh a množství surovin, polotovarů a pomocných látek, které má podnik k dispozici nebo které může během plánovaného období získat. Počet a kvalifikace pracovníků. Počet strojů a zařízení podle druhů. Výrobní a skladištní prostory aj. Stručně řečeno, jsou zde nezbytné údaje **o zdrojích nebo činitelích výroby.**

2. **Poptávka** po výrobcích, které může podnik vyrábět.

3. **Ceny** surovin, polotovarů a hotových výrobků, mzdy apod., event. rentabilita jednotlivých výrobků.

4. **Technologické údaje o výrobních procesech,** které lze v podniku realizovat, kvantitativní charakteristika těchto procesů, tj. vztah mezi výsledky jejich realizace a spotřebou činitelů při nich.

Již pouhá existence takových informací je při rozhodování neocenitelnou pomůckou.

Povaha uvedených informací je různá co do obsahu, kvality i použití.

Údaje sub 1. a 4. jsou nezbytné k určení výrobních možností podniku vůbec, tj. k určení přípustných programů. Bez jejich znalostí se můžeme rozhodovat i pro nerealizovatelný program.

Údaje sub 2. a 3. jsou rozhodující pro žádoucnost (vhodnost) toho či onoho programu.

Povaha údajů sub 1. je více či méně určitá. Poskytuje nám je statistika a různé druhy evidence.

Údaje sub 2. jsou jiné povahy. Informace o poptávce lze získat jen částečně z evidence (evidence zakázek). Celkový přehled o poptávce dává průzkum poptávky, event. jiné odhady. Údaje o poptávce ovšem nejsou určité a správně se může mluvit jen o pravděpodobnosti té či oné poptávky.

Povaha údajů sub 3. je různá podle okolností. V socialistickém plánovaném hospodářství jsou ceny a mzdy poměrně stabilní a lze s nimi počítat jako s určitými veličinami. Často však jsou tyto údaje jen statistické průměry a odhady.

Konečně povaha údajů sub 4. je opět jiná. Jde v podstatě o technické kapacity a normy, které mohou být jak výsledkem technologických propočtů, tak i pouhými statistickými průměry.

Vypracování přiměřené a vhodné soustavy informací pro ekonomická rozhodování je přední úkol statistiky a je nezbytným předpokladem pro použití exaktních metod při ekonomickém rozhodování. Informace samy o sobě ovšem nestačí. Na základě vhodných informací rozhodujeme podle určitého kritéria. **Volba hodnotících kritérií** je důležitou součástí rozhodovacího procesu. V kapitalistickém hospodářství je takovým všeobecným hodnotícím kritériem výše zisku. Ovšem v konkrétních případech se mohou ukázat vhodnějšími i jiná kritéria. V našich podmínkách lze považovat za všeobecné hodnotící kritérium úsporu lidské práce, popřípadě míru využití disponibilních zdrojů. Při rozhodování vnitropodnikovém mohou být ovšem hodnotící kritéria velmi rozmanitá (zisk, vlastní náklady, objem produkce, úspora surovin atd.).

Volba vhodných hodnotících kritérií je záležitostí velmi složitou; je jedním z nejobtížnějších momentů v procesu rozhodování.

Vědecký přístup k procesu rozhodování znamená analyzovat všechny podmínky, které jsou pro daný problém významné, a hodnotit všechna možná řešení, tj. zkoumat důsledky všech možných způsobů rozhodování. Ale právě pro složitost podmínek u praktických rozhodovacích problémů a pro velké množství možných řešení to není bez speciálních metod možné. Účinným prostředkem zkoumání ekonomických jevů je jejich zkoumání na zjednodušených modelech.

1.3 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

Studium složitých jevů reálného světa na zjednodušených modelech je metodou zcela běžnou ve vědě i v technice. Model je zjednodušeným obrazem skutečnosti; zobrazuje pouze ty stránky skutečnosti, které jsou z hlediska studovaného jevu významné. Možnost studia různých jevů na modelech je v podstatě založena na podobnosti (analogii) různých jevů.

Modely jsou různých typů. Nejjednodušší jsou modely, které reprodukují fyzikální vlastnosti zkoumané skutečnosti, avšak ve změněných rozměrech. Tak např. složitá hydrotechnická zařízení se zkoumají pomocí zmenšených modelů. Pomocí takových modelů je možno dobře studovat tlakové poměry ve vodním díle, prosakování hrází atd.

Jiným druhem modelů jsou náčrty a plány. Zde už fyzikální podoba mezi předmětem modelování (např. domem) a modelem (plánem) je mnohem vzdálenější; model totiž převádí trojrozměrný předmět v dvojrozměrný obraz. „Čtení“ takového modelu již vyžaduje určité speciální znalosti. Nicméně i tento model dovoluje snadno zkoumat důležité skutečnosti o předmětu, jako rozměry a vzájemné rozmístění prostorů, tloušťku zdí atd.

Mnohem složitější jsou případy modelování jedněch jevů pomocí jevů fyzikálně odlišných. Tak například některé jevy z oblasti termodynamiky nebo hydrodynamiky je možno modelovat pomocí elektrického proudu. Rovněž některé funkce nervové soustavy je možno modelovat pomocí elektrických obvodů. Řadu úspěšných použití modelové techniky je možno uvést z fyziky. Tak např. studium elektřiny a řada objevů z oboru elektřiny byly usnadněny tím, že elektrický proud byl modelován pomocí proudu kapaliny. Zákony proudění kapalin (hydrodynamika) byly tehdy již poměrně dobře známy a snaha studovat dosud neznámé nebo málo známé jevy pomocí analogie s jevy známými byla celkem pochopitelná. Vycházelo se z předpokladu (hypotézy), že elektřina je jakési fluidum (kapalina), které proudí (odtud název elektrický proud) z míst o vyšším potenciálu (o vyšší hladině) na místa o nižším potenciálu, ovšem jenom v prostředí vodivém, tj. v prostředí, které takovému proudění nebrání.

Bude užitečné si povšimnout myšlenkového postupu, jehož je tu použito. Elektřinu samu o sobě bezprostředně nevnímáme (nevidíme např. proudění elektřiny tak, jako vidíme proud vody), vnímáme jen některé její projevy. Když bylo nashromážděno dostatek experimentálních fakt o elektřině, bylo nutno je vysvětlit, tj. nalézt vzájemné souvislosti mezi nimi a jinými jevy. Jako vhodná metoda se tu nabízí srovnání s jinými jevy, snadněji přístupnými pozorování a lépe prostudovanými. V daném případě se ukázalo, že většina tehdy známých jevů o elektřině se dá velmi jednoduše vysvětlit, předpokládáme-li, že elektřina je jakési fluidum, které se pohybuje podle stejných zákonů jako kapalina. To je ovšem jenom hypotéza, kterou je nutno ověřit a která se může ukázat dodatečně jako nesprávná. Tak tomu bylo konečně i s fluidovou hypotézou (s fluidovým modelem) elektřiny, která je už dávno překonána, neboť mnoho jevů je s ní v rozporu. Nicméně model byl celkem užitečný, vedl k objevu nových, dotud neznámých jevů, a nakonec i k experimentům, které vedly k vyvrácení této hypotézy a ke konstrukci dokonalejších modelů, které správně popisovaly čím dále, tím širší oblast jevů.

Významným momentem u tohoto druhu modelování je použití matematických vyjadřovacích prostředků. Dá-li se jev popsat matematickými prostředky, pak vnitřní podobnost jevů z různých oblastí se projevuje právě v tom, že se dají popsat stejnými matematickými prostředky. Dospíváme tak k pojmu matematického modelování. Tak např. šíření světla nebo šíření rádiových vln se dají popsat v podstatě stejnými rovnicemi jako šíření vln na vodě, nebo šíření zvukových či seismických vln. Proto také můžeme jeden z těchto jevů modelovat pomocí druhého. Konečně za model daného jevu můžeme považovat přímo soustavu matematických rovnic nebo nerovností, které daný jev popisují, tj. které popisují vztahy mezi veličinami charakterizujícími daný jev, resp. jeho vývoj v čase.

Takové matematické modelování má mnoho výhod:

1. **Obecnost.** Týmž matematickým modelem se dá obvykle popsat řada jevů z různých jevových oblastí. Studiem matematického modelu zkoumáme tedy současně všechny jevy, jichž je daný model **obrazem.**

2. **Stručnost a přesnost.** V matematickém modelu skládajícím se z několika rovnic nebo nerovností bývá implicite obsaženo množství souvislostí, které se z něho dají odvozovat. Přitom matematické odvozování je daleko jednodušší a bezpečnější než spekulativní odvozování ze slovně popsaných postulátů. Důsledky odvozené matematicky z modelu jsou vždy správné, byly-li správné předpoklady (hypotézy), na nichž byl model konstruován.

3. Z předchozího výkladu vyplývá též poměrně snadný způsob ověření modelu. Jak jsme uvedli, je každý model založen na nějakých předpokladech (hypotéze) o povaze zkoumaného jevu. Obvykle nelze však tyto předpoklady bezprostředně ověřit, tj. srovnávat je bezprostředně se skutečností. Nelze např. přímým pozorováním zjistit, z čeho se skládá atom. Můžeme však srovnávat důsledky, které lze z modelu matematickými metodami vyvozovat, se skutečností. Neshodují-li se některé důsledky se skutečností, musíme usuzovat, že model je nesprávný.

Matematické modelování v ekonomii je teprve v počátcích. Pracuje se zde většinou s modely poměrně jednoduchými, které jen přibližně zobrazují skutečnost. Nicméně technika matematického modelování dosáhla i v ekonomii značných úspěchů, zejména při zkoumání problémů mikroekonomických (str. 230).

V ekonomii se už ustálilo několik základních typů modelů, které můžeme klasifikovat z různých hledisek:

1. Podle povahy předpokládaných vztahů mezi veličinami, které charakterizují zkoumaný jev, rozlišujeme modely **deterministické** a **stochastické.**

U modelů deterministických předpokládáme, že jsou tyto vztahy určité (determinované), tj. že určité hodnotě jedné veličiny (nebo určitým hodnotám několika veličin) je přiřazena určitá hodnota závislé veličiny. Takový předpoklad je v praxi zcela běžný, i když ve skutečnosti nemusí přesně platit. Tak například při normování spotřeby surovin a práce předpokládáme, že obě spotřeby jsou úměrné výrobě.

U modelů stochastických předpokládáme, že uvedené vztahy jsou stochastické (náhodové), tj. že určité hodnotě jedné veličiny odpovídají různé hodnoty závislé veličiny, ovšem s určitými pravděpodobnostmi.

Tak např. chceme-li konstruovat model opotřebení a obnovy zařízení, nemůžeme předpokládat, že míra opotřebení závisí zcela určitým způsobem na čase. To by byl předpoklad příliš vzdálený od skutečnosti. Opotřebení závisí na velmi mnoha činitelích, a máme-li dostatek statistických údajů o opotřebení určitého druhu zařízení, můžeme nejvýše určit zákon rozdělení pravděpodobnosti míry opotřebení za určitý časový úsek.

2. Podle toho, zda bereme výslovně v úvahu vývoj v čase, či nikoli, rozlišujeme modely **dynamické** a **statické.** U dynamických modelů je explicitně uvedena závislost veličin na čase. U statických modelů předpokládáme, že jevy probíhají na stále stejné úrovni v čase, nebo že jde o jediný jev odehrávající se v konečném časovém intervalu. U hospodářských jevů nás obvykle zajímá vývoj v čase, avšak s ohledem na složitost dynamických modelů je často nahrazujeme posloupností jednodušších statických modelů.

3. Podle toho, zda se v modelu bere v úvahu pouze jediný subjekt, jehož rozhodování není ovlivněno jinými subjekty, či několik subjektů jednajících protichůdně, rozlišujeme modely **nekonfliktní** a **konfliktní.**

Konfliktní situace vznikají, jsou-li zájmy zúčastněných protichůdné, kdy na každou akci jednoho účastníka může druhý odpovědět protiakcí. Účelem konstrukce takových modelů je vypracovat optimální strategii, tj. určit takový sled akcí, jež by snížily na minimum možné riziko z protiakcí protivníků. Typickým příkladem takových konfliktních situací je plánování za konkurence. I když konkurence přichází v úvahu v socialistickém hospodářství pouze na úseku zahraničního obchodu, musíme s „konfliktními“ situacemi počítat i na jiných úsecích národního hospodářství. Např. při plánování různých opatření ve výrobě spotřebního zboží, distribuci, resp. v maloobchodních prodejnách. Zde je nutno počítat s reakcí zákazníků, která může působit v opačném směru než navržené opatření. Je tedy v daném případě zákazník v jistém smyslu „protivníkem“, s jehož protitahy je třeba při plánování akcí počítat. V témž smyslu může „protivníkem“ být i počasí. Např. počasí může důkladně ovlivnit odbyt sezónního zboží, průběh zemědělských prací i jejich výsledky atd.

Protože typickým a poměrně jednoduchým reprezentantem konfliktních situací jsou společenské hry (karty, šachy aj.), tj. hry, při kterých má význam umění hráče (na rozdíl od her náhodových jako vrhání kostky, mince, tahání kuliček), modelují se tyto situace nejčastěji pomocí strategických her.

Je třeba zdůraznit, že rozlišení modelů na deterministické a stochastické, statické a dynamické, nekonfliktní a konfliktní závisí spíše na tom, jak na skutečnost pohlížíme, resp. na které stránky skutečnosti klademe důraz, než na zobrazované skutečnosti samé. Tak např. přísně vzato nejsou závislosti v ekonomii nikdy deterministické, nicméně v rozsáhlé oblasti jevů je můžeme za deterministické považovat, aniž se dopouštíme velké chyby.

Podle stupně agregace*) zkoumaného předmětu rozlišujeme modely **mikroekonomické a makroekonomické**. Mikroekonomické modely zobrazují dílčí úseky hospodářství, ať už ve smyslu prostorovém či organizačním (dílna, závod), nebo ve smyslu věcném (např. spotřeba). Makroekonomické modely zobrazují národní hospodářství vcelku nebo jeho velké části (např. modely rozšířené reprodukce). Často se v ekonomii mluví o modelech strukturních, na rozdíl od optimalizačních. Toto rozlišení se však nezdá být oprávněné.

Modely strukturní, jako modely meziodvětvových vztahů, modely mezioblastních vztahů, modely vnitropodnikových toků materiálů aj., netvoří zvláštní typ modelů. Název spíše naznačuje převažující účel použití těchto modelů pro zkoumání struktury vzájemně závislých jevů. Přesněji: pomocí těchto modelů zkoumáme, jaké změny v celé vnitřně souvislé soustavě jsou způsobovány změnami na dílčích úsecích této soustavy. Připojením optimalizačního kritéria můžeme těchto modelů použít k optimálnímu rozhodování.

1.4 LINEÁRNÍ MODELY

Matematické modely je možno klasifikovat i z hlediska čistě formálního – podle povahy použitých matematických prostředků. Z tohoto hlediska jsou v ekonomii zvlášť důležité **modely lineární**. U lineárních modelů se předpokládá, že závislosti mezi veličinami, které charakterizují zobrazovaný jev, se dají vyjádřit pomocí lineárních algebraických výrazů (pomocí lineárních rovnic a lineárních nerovností).

Velký význam lineárních modelů vyplývá mimo jiné z jejich jednoduchosti. Matematický aparát používaný u lineárních modelů je velmi jednoduchý, což je pro aplikaci v praxi důležité. Formulování lineárních modelů je poměrně snadné a řešení se dá mechanizovat. Je ovšem pochopitelné, že jednoduchost sama o sobě neopravňuje použití těchto modelů. Skutečně však je u celé řady ekonomických problémů možno lineární vztahy považovat aspoň velmi přibližně v určitých mezích za platné.

Konečně o vhodnosti lineárního vyjádření skutečných vztahů mezi hospodářskými veličinami svědčí i okolnost, že i u nematematického přístupu k mnoha problémům se linearita mlčky předpokládá. Tak např. normování je založeno na předpokladu linearity mezi výrobou a výrobní spotřebou. Tvoříme-li např. normu spotřeby materiálu, předpokládáme předem, že spotřeba tohoto materiálu na každou jednotku produkce je stejná, tj. že spotřeba je přímo úměrná výrobě, to znamená, že mezi výrobou a výrobní spotřebou se předpokládá lineární vztah. Nic na tom nemění ani ta okolnost, že se normování (a tedy i předpoklad linearity) omezuje na určitou dobu, popřípadě na určitý rozsah výroby.

Konečně velmi často se prakticky spokojujeme s jednoduchými lineárními modely i proto, že současný stav statistiky neposkytuje v mnoha případech dosti spolehlivé údaje, které by odůvodnily konstrukci a řešení složitějších nelineárních modelů. V mnoha případech totiž chyby plynoucí z nepřesnosti výchozích statistických údajů jsou větší než chyby vyplývající z ne zcela výstižného předpokladu linearity.

Ze všech uvedených důvodů operujeme zatím v ekonomii velmi často s lineárními modely. Musíme ovšem mít na paměti, že ve skutečnosti vztahy mezi zkoumanými jevy nemusí být, a obvykle nejsou, přesně lineární. Při konstrukci modelů je proto nutno v každém konkrétním případě zkoumat, jak dalece a v jakých mezích aproximují lineární vztahy skutečnost, popřípadě je nutno zkoumat, jak dalece ovlivňuje správnost výsledku okolnost, že skutečné vztahy se v té či oné míře odchylují od předpokládané linearity. Jinými slovy – je nutno zkoumat, jak velká chyba ve výsledcích plyne z určité (předpokládané) chyby v předpokladech.

1.5 OBECNÝ POSTUP PŘI POUŽITÍ MATEMATICKÝCH METOD V EKONOMII

Matematika se může stát pro ekonomické bádání stejně účinným nástrojem jako pro přírodní vědy, a pro řízení národního hospodářství stejně účinným nástrojem jako pro techniku. Vskutku v posledních letech bylo zejména na poli operativního řízení dosaženo pomocí matematických metod značných úspěchů. Nicméně je třeba zdůraznit, že jde jenom o jednu z metod, a to ne o metodu všemohoucí. Představy, že

---

*) V ekonomii zkoumáme málokdy jednotlivé elementární údaje. Obvykle pracujeme s údaji náležitým způsobem shrnutými — agregovanými. Stupeň agregace je ovšem různý podle úrovně, na které daný jev zkoumáme. Např. produkce podniku je agregovaná veličina (je souhrnem množství vyrobených výrobků). Silněji agregovanými veličinami jsou společenský produkt a národní důchod, jimiž charakterizujeme produkci národního hospodářství.

matematika a počítací stroje nahradí ekonomii a hospodářské vedení, jsou stejně naivní a škodlivé jako přehlížení matematických metod. Skutečností je, že řešení složitých ekonomických problémů vyžaduje spolupráci odborníků z různých oborů. Matematika přitom bude hrát významnou úlohu, protože dovoluje formalizovat některé fáze rozhodovacího procesu a nahradit nejisté úvahy přesným formálním schématem.

Všimněme si, jaký je obecný postup při zkoumání ekonomických problémů. Prvním, a obvykle i nejobtížnějším krokem je formulování problému. Dobře formulovaný problém vlastně už implicite určuje i řešení (správně položená otázka je poloviční odpověď). Zdánlivě paradoxní tvrzení o obtížnosti formulace problému lze nejlépe ilustrovat na problému, jak měřit efektivnost investic. Už léta se vedou o tomto tématu diskuse, ale dodnes není tento problém jasně a jednoznačně zformulován; dodnes není shoda o kritériích efektivnosti a nejsou jednoznačně definovány pojmy, které by dovolily přesnou kvantitativní formulaci.

Dříve než přistoupíme k formulaci problému, je třeba se seznámit se všemi okolnostmi, které mohou mít vliv na daný problém; k tomu je třeba mnoha věcných znalostí. Speciálně u problémů ekonomických je třeba znát ekonomickou teorii i příslušnou ekonomiku. Protože ekonomika navazuje obvykle na technologii, je zde třeba i značných znalostí technologických. Obvykle se studovaná problematika dotýká i řady jiných vědních oborů, jako psychologie, zdravotnictví, energetiky aj.

Zkoumání ekonomických problémů vyžaduje zpravidla široký statistický materiál, popř. i některá samostatná statistická šetření, definice nových ukazatelů a provedení nových klasifikací. To vše předpokládá rozsáhlé znalosti z oboru ekonomické statistiky.

Konečně matematická formulace problému vyžaduje značné znalosti matematické.

Je zřejmé, že úspěšné dovršení takové práce vyžaduje plodnou spolupráci specialistů z různých oborů.

Jestliže je problém formulován a příslušný matematický model zkonstruován, tj. je-li sestavena soustava rovnic a nerovností, které popisují daný problém, následuje druhý krok, a to řešení modelu, tj. nalezení řešení příslušné soustavy rovnic a nerovností, které vyhovují případným dalším požadavkům. To je práce ryze matematická a v mnoha případech se dá plně mechanizovat.

Třetím krokem je interpretace výsledků, tj. jejich správný výklad, vypracování doporučení a uvedení výsledků do praxe. To je už práce ryze ekonomická a organizační.

Jak vidíme, uplatňují se matematické metody jenom v některých fázích rozhodovacího procesu, nemohou ho nahradit celý. Nicméně jejich použití přináší mnoho výhod. Uveďme aspoň některé z nich.

1. **Objektivnost.** Do matematického modelu zahrnujeme všechny závažné okolnosti, které mohou mít pro daný problém význam. Samo matematické řešení je prosto jakéhokoli subjektivního vlivu. Tím vylučujeme z rozhodování do značné míry subjektivní prvky a možnosti jednostranného rozhodování, které jsou v praxi tak časté.*)

2. **Jednoduchost a obecnost řešení.** Řešení matematického modelu je v mnoha případech velmi jednoduché. Jakmile je metoda řešení pro daný model nalezena, dá se celý postup řešení schematizovat a mechanizovat. Sám postup řešení pak už nevyžaduje odbornou kvalifikaci. To je zvlášť výhodné tehdy, jestliže se týž problém (třeba s různými parametry) periodicky opakuje.

3. **Určitost úsudku.** Spekulativní úvahy, na jejichž podkladě se většinou v ekonomii rozhoduje, jsou často velmi mlhavé a nedovolují s určitostí říci, zda zvolená varianta je optimální. Na rozdíl od toho, vycházíme-li ze spolehlivých údajů, lze matematickými metodami optimální variantu bezpečně identifikovat. Téhož postupu lze ovšem mechanicky použít při řešení všech problémů, které se dají popsat týmž modelem.

4. **Možnost ověření předpokladů.** Dojdeme-li spekulativními úvahami k výsledkům, které neodpovídají skutečnosti, nemůžeme nikdy vědět, kde jsme se dopustili chyby – zda v předpokladech (v modelu), či v řetězu spekulativních úvah. Dojdeme-li k výsledkům odporujícím skutečnosti matematickými metodami, můžeme usuzovat na chybu v předpokladech (v modelu). Tím se naskýtá možnost ověřit model (třeba pomocí experimentu, což bylo dosud v ekonomii neobvyklé), a tím jej i zdokonalit.

V neprospěch použití matematických metod pro konstrukce modelů v ekonomii se často uvádí, že používají velmi zjednodušených předpokladů. Tato výtka se však netýká specificky matematických metod. Zjednodušených předpokladů o realitě v ekonomii používáme, ať pracujeme jakoukoli metodou. Souvisí to spíše s našimi současnými znalostmi. Je pravda, že i současné možnosti řešení vyžadují často dodatečná zjednodušení modelu. Ale ani to není pro matematické metody specifické. Naopak, zdokonalováním matematického aparátu i výpočtové techniky bude možno řešit čím dále, tím složitější modely, kdežto u jiných, blíže nedefinovatelných metod spekulativních či intuitivních se o nějakém zdokonalování dá jen těžko mluvit.

---

*) Jak jsme již uvedli, nebezpečí takového jednostranného rozhodování vyplývá ze značné specializace v řídících funkcích. Často se pak stává, že vítězí např. při rozhodování jednostranné hledisko finanční jen proto, že vedoucí finančního odboru dovede své argumenty přesvědčivěji obhajovat.

KAPITOLA 2 ÚVOD DO LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

2.1 MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

V dalším výkladu se budeme zabývat speciální skupinou optimalizačních problémů, které se řeší metodami matematického (vědeckého) programování, zejména lineárního programování. Tyto problémy, s nimiž se v praxi velmi často setkáváme, je možno obecně charakterizovat takto:

Je dána možnost provést větší počet činností v různých kombinacích a je třeba určit optimální kombinaci těchto činností za předpokladu, že jejich provedení je omezeno jednak omezeným množstvím některých činitelů (suroviny, kapacity atd.), jednak různými požadavky (požadavky plánu, požadavky odbytu, předepsaný sortiment, vzdálenostní limity v dopravě atd.).

Vezměme typický příklad: Máme sestavit výrobní program většího podniku, tj. určit, které výrobky a v jakém množství má podnik vyrábět. Abychom k sestavení programu mohli vůbec přistoupit, musíme zjistit, které výrobky je podnik vůbec schopen vyrábět, nebo obecněji – jaké technologické procesy jsou v podniku proveditelné. Dále musíme vědět, jaké množství různých činitelů (strojových kapacit, surovin, pracovních sil aj.) máme (nebo budeme v plánovaném období mít) k dispozici. Konečně musíme vědět, jak závisí spotřeba činitelů na množství produkce a jaké další požadavky jsou na výrobu kladeny. Na základě těchto údajů můžeme přistoupit k sestavení modelu.

Dejme tomu, že podnik může vyrábět n různých výrobků. Označme zatím neurčené množství jednotlivých výrobků, které lze v určitém čase vyrobit, symboly $x_1, x_2, \ldots, x_n$; to budou proměnné modelu.

Předpokládejme dále, že při výrobě se spotřebovává m různých činitelů, které jsou v uvažovaném časovém intervalu k dispozici v omezeném množství: $b_1, b_2, \ldots, b_m$, a že potřebu i-tého činitele dovedeme vyjádřit jako funkci $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proměnných $\mathbf{x_1}, x_2, \ldots, x_n$ (tj. předpokládejme, že známe způsob závislosti spotřeby některého činitele na úrovni výroby a že tuto závislost dovedeme matematicky vyjádřit). Vzhledem k tomu, že není možno spotřebovat více, než je k dispozici, musí platit

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.1}$$

Dostáváme tak m podmínek omezujících volbu proměnných. Stručně jim říkáme **omezení**. Omezení nemusí mít nutně formu nerovností, mohou být dána i ve formě rovnic. Podobně lze vyjádřit i jiné podmínky, které musí výrobní program splnit. [Tak např. hrubou výrobu*) je možno rovněž vyjádřit jako funkci proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a je-li plánem předepsaná hrubá výroba ve výši b, musí platit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq b$.]

Konečně z povahy věci plyne, že proměnné x_j nemohou být záporné (nelze vyrábět záporné množství), tj.

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Podmínky (2.1) a (2.2) tvoří model daného problému. Každá soustava čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, která splňuje podmínky (2.1) a (2.2), představuje přípustný program. Podmínky (2.1) a (2.2) určují tedy množinu všech možných variant řešení našeho problému (množinu přípustných programů).

Abychom nyní mohli vybrat program optimální, musíme mít nějaké kritérium, pomocí něhož lze různé programy srovnávat. Dejme tomu, že tímto kritériem je pro nás zisk, tj. považujme za lepší ten program, který přináší větší zisk. Dá-li se také zisk vyjádřit jako funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a to

$$z = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.3}$$

půjde zřejmě o to nalézt takovou soustavu čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která splňuje podmínky (2.1) a (2.2) a při nichž funkce (2.3) dosahuje maxima. Zisk závisí ovšem na způsobu ocenění výrobků (výstupů) a spotřebovaných činitelů (vstupů).

Zisk není pochopitelně jediným možným kritériem optima. Jinou možností kritéria pro optimalizaci v daném příkladě jsou maximum produkce (vyjádřeno v penězích nebo v naturálních jednotkách při zachování určitého sortimentu), minimum nákladů, minimum spotřeby práce nebo některého jiného činitele atd.

Funkce (2.3), jejíž extrém hledáme, se nazývá **účelovou funkcí.****)

Matematicky jde zde tedy o to nalézt extrém (maximum nebo minimum) funkce mnoha proměnných (2.3), splňujících řadu podmínek (omezení) typu (2.1) a podmínky nezápornosti (2.2).

K obdobné matematické formulaci vede velmi rozsáhlá skupina ekonomických problémů, jako např. problémy optimálního rozmístění zdrojů, optimálního využití činitelů, optimální organizace přepravy apod.

Obecně tedy – matematické programování se zabývá řešením problémů formulovaných matematicky takto:

---

*) V podstatě cena celkové produkce podniku.

) Užívá se též názvu **kriteriální funkce, **preferenční funkce**, nebo prostě **ekonomická funkce**.

Nalézt extrém funkce mnoha proměnných (účelová funkce)

$$z = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.3}$$

splňujících podmínky (omezení)

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i{}^{*)} \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2.1}$$

a

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{2.2}$$

Podle povahy funkcí (2.1) a (2.3) rozlišujeme programování lineární, jsou-li jak účelová funkce, tak i omezení lineární, a programování nelineární, jsou-li účelová funkce a omezení nebo aspoň některá z nich nelineární.

Parametry modelu mohou být: a) absolutní konstanty, b) náhodné veličiny, c) mohou se určitým způsobem a v daných mezích měnit. Případy sub b) se zabývá stochastické programování, případy sub c) parametrické programování.

Řada problémů s vícestupňovým rozhodováním, zejména problémů dynamických, se dá řešit rekurentně. Problémy tohoto druhu se zabývá dynamické programování.

V dalším výkladu se omezíme v podstatě na výklad metod lineárního programování. O ostatních metodách uvedeme jenom stručné, informativní stati. Toto omezení je odůvodněno jednak tím, že lineární programování tvoří dnes již zakončenou disciplínu s dobře propracovanými metodami, vyžadujícími poměrně jednoduché matematické prostředky, jednak tím, že na poli praktických aplikací převažují zatím rozhodně metody lineárního programování.

2.2 TYPICKÉ PROBLÉMY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Problémů, které lze řešit pomocí metod lineárního programování, je mnoho a jsou velmi rozmanité. Zde můžeme uvést jenom některé typické problémy, a to ve velmi zjednodušené podobě, která však postačí k výkladu metod řešení. Popis reálných problémů, reálných co do rozsahu a složitosti, by zabral příliš mnoho místa a vyžadoval by i popis příslušné problematiky ekonomické i technologické. U praktických problémů je zpravidla nejobtížnějším krokem formulování úlohy. To však si nelze osvojit z knihy. U každé praktické úlohy se vyskytují specifické formulační obtíže, které je třeba v každém konkrétním případě samostatně zkoumat.

Je třeba uvést aspoň tři velmi důležité momenty, v nichž se praktické problémy liší od školských, které uvádíme dále:

1. Především je třeba u každé konkrétní úlohy bedlivě zkoumat, jak dalece jsou přípustná zjednodušení vedoucí k lineárnímu modelu (tj. především linearita vztahů mezi činiteli a výsledkem). U některých úloh technickoekonomické povahy platí předpoklad linearity zcela přesně, u jiných platí v dosti širokých mezích s přesností plně postačující pro praktické potřeby rozhodování.

2. V praxi bývá u většiny úloh velmi složitá otázka volby optimalizačního kritéria a ocenění činitelů. Přitom optimální varianta na jednom stupni nemusí být optimální na jiném stupni. Tak např. při daných zdrojích může pro podnik být kritériem optimalizace výše odbytu (v tom případě, jestliže se např. podle výše odbytu hodnotí podnik a vyplácejí prémie). Na vyšším stupni rozhodování však může být toto kritérium (závislé mimo jiné na způsobu ocenění) zcela bezvýznamné v porovnání s jinými, může např. opomíjet státně důležité výrobky, nebo může vést k plýtvání některými vzácnými surovinami atd.

3. Velmi složité bývá v praxi stanovit výchozí údaje. Nejde tu jenom o problematiku statisticko-evidenční, ale též o věcnou otázku umístění východiska problému. Tak u poměrně jednoduché úlohy, jako je sestavit optimální výrobní program, vycházíme u školských příkladů vždy z toho, že máme k dispozici určité množství zcela určitých činitelů. V praxi to však bývá velmi často problematické. Tak např. kapacity nejsou vždy jednoznačně určeny, závisí na určitém pracovním režimu a je často v moci podniku tyto kapacity rozšířit (přikoupením zařízení, zadáváním některých prací jako subdodávky, zaváděním nočních směn na úzkoprofilových strojích atd.). Podobně je tomu se surovinami a jinými zdroji.

Jiný příklad: Optimální rozmístění určitého průmyslu závisí mimo jiné na vzdálenosti dopravy surovin a hotových výrobků, tj. na rozmístění hlavních zákazníků a na systému komunikací. Řešíme-li podobný problém z celostátního hlediska, vzniká přirozeně otázka, zda máme považovat současné rozmístění zdrojů surovin a odběratelů a současný systém komunikací za pevně dané, nebo zda máme posunout začátek problému někam dále.

Vezměme nyní několik typických příkladů:

Příklad 2.1. Podnik vyrábí dva výrobky, *A* a *B*, které se zpracovávají na dvou typech strojů, I a II. Zhotovení jednotky výrobku *A* vyžaduje pět hodin práce (strojových hodin) na stroji typu I a dvě hodiny práce na stroji typu II. Podobně zhotovení výrobku *B* vyžaduje čtyři strojové hodiny jak na stroji I, tak na stroji II. Podnik má měsíčně k dispozici celkem 2 500 strojových hodin na strojích typu I a 2 200 strojových hodin na strojích typu II. Cena jednotky výrobku *A* je 25 Kčs, cena výrobku *B* je 20 Kčs. Podnik má zaručený odbyt obou výrobků a ani plánem není vázán na určitý sortiment. Je otázka, kolik má vyrobit jednotlivých výrobků, aby dosáhl co největší ceny odbytu.

Rozebereme podrobně daný příklad:

Činiteli výroby (zdroji) jsou zde stroje (resp. strojové časy). Je samozřejmé, že k výrobě určitých výrobků potřebuje podnik i jiné činitele, jako pracovní síly, suroviny, energii aj.

Zde se však mlčky předpokládá, že ostatní činitele nemají pro řešení úlohy omezu-

---

*) Omezení (2.1) jsme zde psali ve formě rovnic. Uvidíme později, že nerovnosti lze vždy převést na rovnice o větším počtu proměnných.

jící význam, že jsou k dispozici v takovém množství, že mohou krýt potřeby podniku při jakémkoli uspořádání výrobního procesu (teoreticky bychom mohli říci, že jsou k dispozici v neomezeném množství), a že se tedy nemohou stát úzkým profilem.

Pomocí daných činitelů může podnik vyrábět dva různé výrobky. Je dobré si povšimnout, že nás při řešení vytčeného problému nezajímá vlastní technologie výroby. Z hlediska daného problému nás zajímá jen to, že na výrobu jednotky toho či onoho výrobku se spotřebuje určité množství činitelů, kterých má podnik omezené množství.

Obecně každá hospodářská jednotka může pomocí činitelů, které má k dispozici, vykonat určité **činnosti (aktivity)** nebo uskutečnit nějaké **procesy.** V daném případě jsou procesy výroba jednoho či druhého výrobku. V jiných příkladech se setkáváme s jinými procesy. Procesem může být např. spotřeba, nákup či odbyt, procesem může být též doprava, určitá technologická operace aj. Budeme mluvit o **úrovni procesu** a budeme tím rozumět množství jednotek výsledku provedení daného procesu (množství vyrobených jednotek, je-li procesem výroba, množství spotřebovaných jednotek, je-li procesem spotřeba atd.).

Naším úkolem je právě určit, které procesy a na které úrovni má podnik uskutečnit, aby výsledek byl optimální.

V našem příkladě by bylo zřejmě účelné uskutečnit oba procesy na úrovni co nejvyšší. To znamená konkrétně: aby podnik dosáhl co největší ceny odbytu, musí co nejvíce vyrábět (odbyt má jinak podle předpokladu zajištěn). Podnik je ovšem omezen kapacitou strojů, tedy na straně zdrojů (vstupu). Všimněme si, že v daném příkladě žádná jiná omezení nejsou. Například na straně výsledků (výstupů) není podnik omezen ani plánem, ani odbytem.

Abychom omezení, dané v našem příkladě kapacitou strojů, mohli vyjádřit matematicky, musíme znát vztah mezi úrovní jednotlivých procesů a spotřebou činitelů.

V příkladě jsou dány strojové časy jednotlivých výrobků. Tím je dán vztah mezi činiteli výroby a výsledky (produktem). Víme-li, kolik se vyrábí výrobků, je tím určena i spotřeba strojových hodin. Vyrábíme-li např. výrobek A v množství x_1, výrobek B v množství x_2, bude celková spotřeba strojových hodin:

na stroji I $5x_1 + 4x_2$

na stroji II $2x_1 + 4x_2$

Protože kapacita prvního stroje je omezena na 2 500 hodin, kapacita druhého stroje na 2 200 hodin, nesmí první z uvedených výrazů být větší než 2 500 a druhý větší než 2 200, tj. úrovně obou procesů, x_1 a x_2, musí splnit nerovnosti

$$5x_1 + 4x_2 \leqq 2\,500$$

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 2\,200$$

Tyto dvě nerovnosti jsou matematicky vyjádřená omezení vyplývající z omezenosti strojových kapacit.

Nás budou v dalším výkladu zajímat řešení těchto omezení, tj. řešení uvedené soustavy nerovností. Každý výrobní program se může nyní totiž stručně vyjádřit ve formě dvojice reálných čísel $[x_1, x_2]$, která splňují současně obě nerovnosti.

Je však otázka, zda každá dvojice čísel $[x_1, x_2]$, která je řešením uvedených nerovností, je možným výrobním programem. Výše jsme uvedli, že podnik nemá jiná omezení, avšak na čísla x_1 a x_2 musíme přece klást i další omezení, tj. že nesmějí být záporná, tzn.

$$x_1 \geqq 0, \qquad x_2 \geqq 0$$

Ekonomovi se snad zdá, že je zbytečné tato omezení uvádět, jsou-li takto samozřejmá. Nelze přece vyrábět záporné množství výrobků a ani jiný proces nelze uskutečnit na záporné úrovni. Avšak tato omezení jsou nezbytná, neboť jejich vynechání by vedlo k řešením ekonomicky nepřípustným, např. $x_1 = 2\,000$, $x_2 = -2\,000$.

Nás budou tedy zajímat jenom nezáporná řešení dvou prvních nerovností. Protože každé takové řešení je pro podnik při daných omezeních přípustným programem, nazývají se nezáporná řešení uvedených nerovností též **řešeními přípustnými.**

Určení všech možných výrobních programů podniku se nyní redukuje na hledání takových dvojic reálných čísel $[x_1, x_2]$, která vyhovují hořejším omezením daným ve formě nerovností. Takových dvojic, a tedy i přípustných řešení, je velmi mnoho. Přípustným řešením je např. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, tj. program, při kterém podnik nic nevyrábí (uskutečňuje své činnosti na úrovni nulové). Takový program je z hlediska daných omezení přípustný, třeba nevýhodný (podnik při něm bude samozřejmě mít i odbyt nulový). Podnik může vyrábět pouze jeden výrobek, např. výrobek A, a to v libovolném množství do 500 jednotek (větší množství by překročilo kapacitu strojů typu I), tj. $x_1 = 500$; $x_2 = 0$. Podnik může dále obě své činnosti různě kombinovat.

Teoreticky bude zřejmě ve většině příkladů nekonečně mnoho přípustných řešení. Může se ovšem stát, jsou-li omezení ve vzájemném rozporu, že úloha nebude mít ani jedno přípustné řešení. Souhrn všech přípustných řešení nazýváme stručně **množinou přípustných řešení** daných nerovností. Tato množina může být prázdná, nemá-li úloha vůbec přípustné řešení, obvykle však bude mít nekonečně mnoho prvků.

Prakticky však obvykle nemáme nekonečně mnoho řešení. Jde-li např. o kusovou výrobu, musíme na řešení klást další podmínku, že x_1 a x_2 musí být celá čísla. I když však nejde o kusovou výrobu, nelze obvykle výrobek libovolně dělit.

Podniku jde ovšem o to sestavit nejefektivnější (optimální) výrobní program. **Kritériem efektivnosti je v daném příkladě maximum ceny odbytu.** Cena odbytu (označíme ji v dalším výkladu z) se dá matematicky vyjádřit vztahem

$$z = 25x_1 + 20x_2$$

Výrobní program volíme takový, aby posledně uvedený výraz, tj. účelová funkce, dosáhla maxima na množině přípustných řešení.

Ty dvojice čísel $[x_1, x_2]$ z množiny přípustných řešení, pro které z je maximální, nazveme řešením optimálním.

V daném příkladě je efektivnost posuzována cenou odbytu; podnik se snaží maximalizovat svůj odbyt. Podle okolnosti mohou být ovšem kritéria efektivnosti různá. Efektivnost můžeme posuzovat např. podle velikosti ztrát. Nejefektivnějším uspořádáním výrobního procesu pak bude takové, při kterém jsou ztráty minimální. Vyjádříme-li ztrátu jako funkci proměnných úrovně činnosti, půjde o to nalézt takové řešení, při kterém tato funkce dosáhne minima.

Úkol, který jsme původně formulovali slovy, můžeme nyní vyjádřit matematicky:

Je třeba nalézt dvojici reálných čísel $[x_1, x_2]$, která vyhovují omezením

$$5x_1 + 4x_2 \leqq 2\,500 \tag{2.4}$$

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 2\,200$$

$$x_1 \geqq 0; \qquad x_2 \geqq 0 \tag{2.5}$$

a to tak, aby účelová funkce

$$z = 25x_1 + 20x_2 \tag{2.6}$$

dosáhla maxima. Stručněji se uvedený úkol vyjadřuje takto:

Na množině řešení nerovností (2.4) a (2.5) nalézt maximum účelové funkce (2.6).

Důležité je si povšimnout, že omezení jsou zde dána ve formě **lineárních** nerovností; rovněž účelová funkce je lineární, což je podstatné pro problémy lineárního programování.

V daném příkladě máme dva procesy; oba znamenají výrobu nějakého výrobku. Hledáme optimální úroveň těchto procesů, tj. optimální množství $[x_1, x_2]$, které máme u obou výrobků vyrobit. Pro matematické zpracování je však zcela lhostejné, jaká je konkrétní povaha procesů. Seznámíme se s příklady, kde půjde o procesy zcela jiné povahy. Důležité je jenom, aby proces bylo možno číselně popsat (charakterizovat). V našem příkladě je první proces charakterizován čísly 5 a 2, která udávají, kolik strojových hodin vyžaduje jednotka tohoto procesu, a číslem 25, které udává cenu výsledné jednotky tohoto procesu. Trojice čísel [5, 2, 25] **v daném pořadí** popisuje úplně a jednoznačně (ovšem z hlediska analyzovaného úkolu) daný proces. Jde o **uspořádanou trojici čísel,** tj. psanou v určitém pořadí. Je totiž zřejmé, že změnou pořadí uvedených tří čísel bychom popsali už nějaký jiný proces. První dvě čísla popisují „strukturu" procesu, třetí pak dává jednotkovou cenu. Používá se pro ně obecně názvů „strukturálních koeficientů" a „cen" (resp. „cenových koeficientů") i v případech, kdy věcně nemají nic společného s popisem žádné struktury, ani ceny.

Všimněme si ještě jiné stránky příkladu. V příkladě se předpokládá, že strojové časy potřebné na jednotku produkce, jakož i celkové disponibilní strojové časy jsou známé konstanty. Totéž se předpokládá o cenách. Ve skutečnosti však tomu tak nemusí být.

Vezměme nejdříve strojové časy. Informace o strojových časech můžeme získat jednak ze statistiky (to pak budou určité statistické průměry), jednak z technologických propočtů. Kvalita těchto údajů bývá různá a prakticky je nutno často zkoumat, jaký vliv má nepřesnost údajů na výsledky.

Obvykle závisí strojové časy na velikosti série, neboť je nutno například počítat s určitým časem na záběh výroby (přípravné časy) i na zastavení výroby. Není-li závislost na velikosti série zanedbatelná, nelze ovšem strojové časy považovat za konstantní a omezení nebudou lineární. Pak už úloha spadá do problematiky nelineárního programování.

Na velikost strojových časů může působit i řada nahodilých vlivů, jako výkyvy v jakosti materiálu, v kvalitě nástrojů aj. Jsou-li tyto výkyvy významné, nelze strojové časy považovat za veličiny konstantní, ale za jistých předpokladů za veličiny náhodové. Problémy tohoto druhu se zabývá stochastické programování.

Celkově disponibilní strojové časy závisí na režimu práce (na směnnosti, možnosti přesčasů, na intervalech preventivních oprav atd.). Jsou-li přípustné různé režimy práce a jde-li jedině o maximalizaci odbytu jako v daném příkladě, zvolíme pracovní režim co nejdelší. V jiných příkladech, kde mají význam např. náklady nebo odběrové diagramy elektřiny, musí se samozřejmě možnost různých pracovních režimů brát v úvahu i při matematické formulaci problému.

Ceny jsou u nás ve valné většině případů konstantní (ovšem na určité období), a stanovené státem. V podmínkách kapitalistických je nutno ovšem počítat i s tím, že ceny budou kolísat následkem změn v nabídce a poptávce. Je-li cena závislá na nabídce nebo poptávce, nebude účelová funkce už lineární. V mnoha případech lze však i řešení podobných úkolů redukovat na úkoly lineárního programování.

Vidíme, že formulace úkolu, jak jsme ji podali, nevystihuje přesně skutečnost, je pouze modelem, který vystihuje jenom hlavní rysy skutečnosti, a to rysy, které mají z hlediska zkoumaného problému význam. Obvykle je nutno dodatečně ještě ověřit správnost modelu.

Formulujme nyní některé jiné příklady.

Příklad 2.2. Ponechme podmínky předchozího příkladu 2.1, které doplníme takto:

a) Podnik má hodnotu odbytu stanovenou plánem 17 000 Kčs.

b) Podnik musí snížit na minimum spotřebu energie, přičemž je známo, že spotřeba energie na jednotku výrobku A činí 8 kWh a na jednotku výrobku B 11 kWh.

Plán je pro podnik závazný. To vytváří pro podnik nové omezení ve volbě možné varianty výrobního programu. Matematicky můžeme toto omezení vyjádřit opět nerovností, a to

$$25x_1 + 20x_2 \geqq 17\,000 \tag{2.7}$$

Věcně je toto omezení zcela jiné povahy než omezení (2.4). Zatímco omezení (2.4) jsou objektivní omezení na straně vstupu, nerovnost (2.7) vyjadřuje vlastně cíl, kterého má podnik podle plánu dosáhnout na straně výstupu. Formálně ovšem jak nerovnosti (2.4), tak i nerovnost (2.7) omezují volbu variant výrobního programu.

Vhodnost či nevhodnost výrobního programu (tedy efektivnost dané varianty) posuzujeme nyní podle potřeby energie (a nikoli podle odbytu jako v předchozím příkladě). Kritériem optimálnosti programu je tedy množství spotřebované energie. Čím menší je spotřeba energie, tím lepší program. Spotřeba energie, a tedy účelová funkce, je dána výrazem

$$z = 8x_1 + 11x_2$$

Úkol daný příkladem 2.2 můžeme nyní vyjádřit takto: Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\leqq 2\,500 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leqq 2\,200 \\ 25x_1 + 20x_2 &\geqq 17\,000 \\ x_1 \geqq 0; \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

nalézt minimum účelové funkce

$$z = 8x_1 + 11x_2$$

Každý proces je nyní charakterizován čtveřicí čísel. Tak první proces je charakterizován čtveřicí [5, 2, 25, 8]. „Cenou“ je v daném případě číslo 8. Věcně to ovšem není cena, formálně však hraje obdobnou roli jako cena v předchozím příkladě. S každou jednotkou prvního procesu je totiž spojena spotřeba 8 jednotek činitele, jehož celkovou spotřebu chceme minimalizovat. Stejně jako cena v předchozím příkladě slouží zde měrná spotřeba energie jako kritérium hodnocení jednotlivých procesů; dává „ocenění“ těchto procesů.

Příklad 2.3. Předchozí příklady byly velmi jednoduchými příklady optimalizace výrobního programu za daných omezení. Mnohem obecnější případ optimalizace výrobního programu byl formulován Kantorovičem pod názvem Základní úloha výrobního plánování.

Podnik pracuje s různými činiteli, z nichž se některé při výrobním procesu spotřebují (suroviny, polotovary, práce, strojové časy), jiné se vyrábějí (polotovary, hotové výrobky). Pojem činitele je zde zřejmě širší než v předchozím výkladu. Pro určitost si představme jednoduchý případ, kdy podnik zpracovává dvě suroviny, vyrábí dva polotovary a tři hotové výrobky.

Čtyři technologické postupy, jichž podnik používá, charakterizují čísla v tab. 2.1.

Tabulka 2.1

Činitele	Technologický postup			
	A	*B*	*C*	*D*
Surovina 1	—5	—6	—6	—4
Surovina 2	—8	—2	—3	—5
Polotovar 1	1	2	—1	0
Polotovar 2	1	—1	—1	1
Výrobek 1	6	2	4	0
Výrobek 2	0	3	2	2
Výrobek 3	3	3	4	5

Čísla v jednotlivých sloupcích znamenají, že při provedení příslušného technologického procesu na jednotkové úrovni se jednotlivé činitele spotřebují (záporné znaménko), resp. vyrábějí (kladné znaménko) v uvedeném množství. Podnik má k dispozici 1 000 jednotek první a 1 250 jednotek druhé suroviny. Polotovary a hotové výrobky podnik v zásobě nemá. Výrobky 1, 2 a 3 se dodávají v souborech obsahujících tři kusy výrobku 1, dva kusy výrobku 2 a pět kusů výrobku 3.

Otázka je, jak má podnik kombinovat jednotlivé procesy, aby při daných omezeních dosáhl maximální výroby, tj. maximálního množství kompletních souborů.

Označíme-li úroveň procesu *A* symbolem x_1, podobně úroveň ostatních procesů symboly x_2, x_3 a x_4, můžeme okolnost, že surovin 1 a 2 nelze spotřebovat více, než je jich k dispozici, vyjádřit nerovnostmi

$$\begin{aligned} 1\,000 - 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 4x_4 &\geqq 0 \\ 1\,250 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pokud jde o polotovary – ty v některých procesech vznikají, při jiných se spotřebovávají. Protože podnik nemá počáteční zásoby, musí jich zřejmě vyrobit nejméně tolik, kolik jich spotřebuje. To lze vyjádřit nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqq 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Při tomto programu vyrobí podnik

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \quad \text{kusů prvního výrobku,} \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \quad \text{kusů druhého výrobku a} \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \quad \text{kusů třetího výrobku.} \end{aligned}$$

Protože v jednom souboru jsou tři kusy prvního výrobku, dva kusy druhého výrobku a pět kusů třetího výrobku, rovná se počet kompletních souborů nejmenšímu ze zlomků

$$\frac{6x_1 + 2x_2 + 4x_3}{3}, \quad \frac{3x_2 + 2x_3 + 2x_4}{2}, \quad \frac{3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4}{5}$$

Označíme-li nejmenší z těchto zlomků symbolem z, platí zřejmě

$$\frac{6x_1 + 2x_2 + 4x_3}{3} \geqq z,$$

$$\frac{3x_2 + 2x_3 + 2x_4}{2} \geqq z,$$

$$\frac{3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4}{5} \geqq z,$$

tj.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \phantom{{}+ 5x_4} - 3z &\geqq 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2z &\geqq 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 5z &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pochopitelně i zde musí všechny neznámé být nezáporné.

Můžeme nyní úlohu formulovat takto:

Je třeba nalézt takové nezáporné řešení nerovností (2.8), (2.9) a (2.10), aby neznámá z dosáhla maximální hodnoty.

Z povahy úlohy vyplývá ovšem i další omezení, tj. že neznámé musí být celá čísla.

Příklad 2.4. Podnik potřebuje pro svou výrobu ocelové tyče určitého profilu. Podnik dostává tyče dlouhé 2 m, potřebuje však tyče jiné délky a to:

a) 200 kusů tyčí délky 95 cm,
b) 500 kusů tyčí délky 70 cm,
c) 150 kusů tyčí délky 48 cm,
d) 250 kusů tyčí délky 35 cm.

Otázkou je, jakým způsobem řezat tyče, aby odpad byl minimální.

Je zřejmé, že je velký počet možných řezných plánů, které dávají různá množství odpadu. Je možno např. z jedné tyče nařezat dva kusy po 95 cm, s odpadem v délce 10 cm. Jiné řezné plány jsou např. jedna tyč dlouhá 95 cm, druhá 70 cm a třetí 35 cm, bez odpadu; 2 tyče dlouhé 70 cm a jedna tyč dlouhá 48 cm, s odpadem 12 cm atd. Jde tedy o to kombinovat různé řezné plány tak, abychom získali žádané množství tyčí různých délek s minimálním odpadem, anebo, což je totéž, z minimálního množství tyčí dlouhých 2 m.

Očíslujme jednotlivé řezné plány a sestavme je do tabulky (tab. 2.2).

V tabulce je uvedeno celkem 8 řezných plánů. Byly vynechány další možné řezné plány, při nichž odpad dosahuje 15 cm a více. Máme určit, kolik tyčí je třeba řezat podle jednotlivých řezných plánů.

Jednotlivý proces je v daném případě určitý způsob řezání tyče. Každý z těchto procesů je charakterizován uspořádanou pěticí čísel (některá z nich mohou být nuly), z nichž první čtyři (strukturální koeficienty) udávají, kolik tyčí různých rozměrů dostaneme při daném způsobu řezání z jedné původní tyče, poslední („cena procesu“) udává velikost odpadu při daném způsobu řezání. Tak např. pátý proces je charakterizován pěticí čísel [0, 2, 1, 0, 12].

ŘEZNÝ PLÁN

Tabulka 2.2

Řezný plán tyčí	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Potřeba tyčí [ks]
délky 95 cm	2	1	1	1	0	0	0	0	200
70 cm	0	1	0	0	2	1	0	0	500
48 cm	0	0	2	0	1	1	4	1	150
35 cm	0	1	0	3	0	2	0	4	250
Odpad [cm]	10	—	9	—	12	12	8	12	—

Podnik může libovolně kombinovat řezné plány; je omezen jedině tím, že musí nařezat předepsaný počet tyčí různých délek. (Jsou to vesměs omezení na straně výstupu a vyjadřují vlastně cíl činnosti.) Označíme-li úroveň j-tého procesu (tj. počet tyčí, které je třeba řezat podle j-tého řezného plánu), x_j, lze omezení vyjádřit takto:

$$\begin{array}{llllllll} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & & & & & & \geqq 200 \\ \phantom{2x_1 +{}} x_2 & & + 2x_5 + x_6 & & & & & \geqq 500 \\ & 2x_3 & + x_5 + x_6 & + 4x_7 + x_8 & & & & \geqq 150 \\ \phantom{2x_1 +{}} x_2 & + 3x_4 & + 2x_6 & + 4x_8 & & & & \geqq 250 \end{array}$$

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 8)$$

Z povahy procesu plyne, že je zde nutno připojit ještě další omezení, tj. že x_j musí být celá čísla. Účelová funkce, kterou je třeba minimalizovat, je dána výrazem

$$z = 10x_1 + 9x_3 + 12x_5 + 12x_6 + 8x_7 + 12x_8$$

V daném případě je možno účelovou funkci vyjádřit i jednodušeji. Je totiž zřejmé, že minimalizace odpadu je ekvivalentní minimalizaci počtu rozřezaných tyčí. Místo minimalizace účelové funkce z můžeme tedy minimalizovat účelovou funkci

$$z' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Druhý tvar účelové funkce umožňuje minimalizovat odpad i tehdy, není-li možno vhodným způsobem měřit odpad u jednotlivých řezných plánů, např. jde-li o stříhání součástek z plechu nebo kusů látek stejných rozměrů.

Uvedený příklad minimalizace odpadu lze snadno zobecnit i na příklad, kdy výchozí materiál obsahuje několik rozměrových druhů. V zjednodušeném příkladě, jako je daný, je správná vlastně jen druhá účelová funkce. U řezných plánů č. 2 a 4 není totiž žádný odpad. Jejich opakované provedení odpad tedy nezvyšuje.

Je dobré si povšimnout, že i u tak jednoduchého příkladu, jako je uvedený, není volba optimalizačního kritéria jednoduchá. Kritériem bylo množství odpadu, ale nebrali jsme přitom v úvahu pracnost. Může se totiž stát, že program minimalizující odpad je pracnější, a je pak nutno uvážit, zda z hlediska hospodárnosti je množství odpadu postačujícím kritériem pro volbu řešení. Navíc tu může vzniknout rozpor mezi rozhodováním podniku, pro nějž je s ohledem na platné ukazatele plánu důležitější vysoká produktivita práce, a zájmy celostátními, které vyžadují maximální hospodárnost při spotřebě dané suroviny.

Příklad 2.5. Jedním z typických příkladů, kde se dá použít metod lineárního programování, je tzv. nutriční (výživový) problém; jde v něm o to, jak získat co nejlevněji potravu takového složení, aby obsahovala všechny biologicky účinné složky v dostatečném množství. Jak známo, dospělý člověk potřebuje ke své výživě denně určité množství uhlovodanů, bílkovin, tuků a různých ochranných látek. Potřebné údaje o tom nám poskytuje lékařská věda. Různé potraviny obsahují tyto látky v různé míře, přitom ceny těchto potravin jsou také různé. Je možno utvořit množství kombinací potravin v různé ceně, které obsahují všechny účinné látky v potřebném množství. Úkolem pak je vybrat z nich kombinaci nejlevnější.

Předpokládejme pro jednoduchost, že máme pouze čtyři biologicky účinné složky, a to energii (kcal), bílkoviny (v g), vitamín B (v mg) a vitamín C (v mg), a že přichází v úvahu pouze deset různých potravin. Údaje o obsahu účinných složek v jednotlivých potravinách, jakož i o minimální potřebě účinných složek a o cenách potravin jsou uvedeny v tab. 2.3.

Tabulka 2.3

Účinná složka	Druh potravin										Průměrně potřebné množství za den
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Energie	2 350	3 540	700	2 830	370	200	510	1 500	1 580	2 570	3 000
Bílkoviny	61	67	16	216	—	25	34	115	208	184	70
Vitamín B	1,1	0,2	0,7	8,1	0,3	1,3	0,4	0,1	1,—	0,8	1,8
Vitamín C	—	—	100	—	600	630	—	—	—	—	75
Cena jednotky v Kčs	2,60	5,—	0,80	5,—	10,—	1,50	2,—	14,—	22,—	28,—	—

Procesem v daném případě bude nákup (resp. spotřeba) určité potraviny. Každý proces je tu opět charakterizován soustavou čísel určujících obsah účinných látek v jednotce dané potraviny a cenu této jednotky. Úrovní procesu pak bude nakoupené množství. Označíme-li nakoupené množství j-té potraviny symbolem x_j, pak zřejmě, chceme-li dostat minimální potřebné množství účinných látek, musí x_j splnit tyto nerovnosti:

$$\begin{aligned}
&2\,350x_1 + 3\,540x_2 + 700x_3 + 2\,830x_4 + 370x_5 + 200x_6 + 510x_7 + 1\,500x_8 + \\
&\qquad + 1\,580x_9 + 2\,570x_{10} \geqq 3\,000 \\
&61x_1 + 67x_2 + 16x_3 + 216x_4 + 25x_6 + 34x_7 + 115x_8 + \\
&\qquad + 208x_9 + 184x_{10} \geqq 70 \\
&1{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}7x_3 + 8{,}1x_4 + 0{,}3x_5 + 1{,}3x_6 + 0{,}4x_7 + 0{,}1x_8 + \\
&\qquad + x_9 + 0{,}8x_{10} \geqq 1{,}8 \\
&100x_3 + 600x_5 + 630x_6 \geqq 75
\end{aligned}$$

To jsou omezení našeho problému. Cena celého nákupu, a tedy účelová funkce, již chceme minimalizovat, je dána výrazem

$$z = 2{,}60x_1 + 5x_2 + 0{,}80x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 1{,}50x_6 + 2x_7 + 14x_8 + 22x_9 + 28x_{10}$$

Proti tomuto úkolu lze namítnout, že není reálný, že se nekonzumují potraviny, nýbrž pokrmy z nich upravené, a že o složení rozhodují jiné faktory, jako chuť, tradice, vkus atd. Tato námitka je však oprávněna jen částečně, a to z několika důvodů:

a) Zkušenosti ukazují, že se složení potravy přizpůsobuje do značné míry cenám (a to většinou živelně) a zvláště u hromadného stravování hraje cena prvořadou úlohu. I když výpočet není při sestavování stravy jedině směrodatný, bývá dobrým vodítkem. Navíc může být vodítkem i při určování cen některých potravin.

b) Rozšířením úkolu o několik dodatečných podmínek je možno brát do určité míry zřetel i na faktory tradic, vkusu aj.

c) Úplně stejně je možno formulovat řadu jiných úkolů, tzv. problémů směšovacích, jako např. určení nejlevnějších (a přitom plnohodnotných) krmných směsí, určení optimální vsázky do ocelárenských pecí atd.

U všech směšovacích problémů je dobře si povšimnout dvou předpokladů, které mlčky přijímáme, které však nejsou samozřejmé a také v praxi nejsou vždy splněny.

Předpokládáme především dokonalou zaměnitelnost; např. u nutričního problému předpokládáme mlčky, že různé potraviny jsou naprosto zaměnitelné, pokud obsahují tytéž účinné složky, jinými slovy – organismu je lhostejné, z jaké potraviny získá kalorie, bílkoviny atd. Neplatí-li tento předpoklad neomezeně, musíme do matematické formulace zavést další podmínky (omezení).

Dále předpokládáme sčitatelnost účinků; u nutričního problému předpokládáme, že obsahuje-li jedna potravina 30 g bílkovin, druhá 20 g, asimiluje organismus po jejich požití celkem 50 g bílkovin.

Příklad 2.6. K nejjednodušším problémům lineárního programování patří tzv. dopravní problém. Jde v něm o minimalizaci dopravních nákladů (popřípadě o minimalizaci úhrnného množství tunokilometrů) při přepravě určitého druhu zboží z několika míst, v nichž je skladováno, k několika spotřebitelům.

Tabulka 2.4

Ukazatel		Staveniště				K dispozici ve skladech v tunách
		1	2	3	4	
Sklad	1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
	3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
Požadavky stavenišť v tunách		b_1	b_2	b_3	b_4	

Dejme tomu, že na třech místech se skladuje a_1, a_2, popř. a_3 tun cementu. Z těchto tří míst je nutno zásobit čtyři stavby, které požadují nejméně b_1, b_2, b_3, popř. b_4 tun. Dále jsou známy dopravní sazby, tj. náklady za přepravu 1 tuny z kteréhokoli skladu ke kterékoli stavbě.*) Označme dopravní sazbu za jednotku z i-tého skladu k j-té stavbě symbolem c_{ij}.

Pak můžeme údaje dopravního problému sestavit do přehledné tabulky 2.4, nazývané obvykle maticí nákladů.

Z povahy úkolu plyne, že čísla a_i, b_j jsou vesměs kladná.

Označíme-li množství přepravované z i-tého skladu k j-té stavbě symbolem x_{ij}, půjde zřejmě o minimalizaci účelové funkce

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{34}x_{34}$$

Omezení úkolu jsou dána tím, že z jednotlivých skladů je možno dopravit nejvýše tolik, kolik je tam k dispozici, a že požadavky všech spotřebitelů musí být splněny, tj.

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\leqq a_1\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \qquad\qquad\qquad\qquad &\leqq a_2\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leqq a_3\\
x_{11} \qquad\qquad + x_{21} \qquad\qquad + x_{31} \qquad\qquad &\geqq b_1\\
x_{12} \qquad\qquad + x_{22} \qquad\qquad + x_{32} \qquad\quad &\geqq b_2\\
x_{13} \qquad\qquad + x_{23} \qquad\qquad + x_{33} \qquad &\geqq b_3\\
x_{14} \qquad\qquad + x_{24} \qquad\qquad + x_{34} &\geqq b_4
\end{aligned}$$

---

*) Předpokládáme, že přepravné je úměrné přepravovanému množství, tj. že sazby jsou konstantní, nezávislé na množství.

Dále platí i zde podmínky nezápornosti

$$x_{ij} \geqq 0$$

Konečně je nutno v daném příkladě požadovat, aby

$$\sum_i a_i \geqq \sum_j b_j,$$

tj. aby zásoby ve skladech nebyly menší než požadavky, neboť jinak nelze požadavky splnit.

V tomto příkladě máme celkem dvanáct proměnných (tj. dvanáct procesů) a sedm omezení. Pro interpretaci procesů je vhodné používat u všech omezení stejných znaků nerovnosti. Toho dosáhneme např. tak, že změníme u prvních tří omezení na obou stranách znaménka. První proces pak bude charakterizován koeficienty proměnné x_{11}, tj. touto soustavou osmi čísel:

$$[-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, c_{11}],$$

což znamená odsun jedné jednotky z prvního skladu (-1), žádná změna v ostatních skladech (0), přísun jedné jednotky na první staveniště ($+1$,) žádná změna na ostatních staveništích (0); poslední číslo (c_{11}) je pak cena tohoto procesu, tj. cena za přepravu jednotky z prvního skladu na první staveniště. Obdobné poznámky platí i o ostatních procesech. Je tedy procesem v daném příkladě přeprava jednotky z určitého skladu (odesílací stanice) na určité staveniště (k určitému spotřebiteli).

Je třeba si povšimnout zvláštnosti dopravního problému. V omezeních se tu vyskytují jenom jednotkové koeficienty v pravidelných sestavách, ostatní koeficienty jsou nulové a všechny údaje jsou vyjádřeny v téže měrné jednotce. Tato okolnost, jak uvidíme později, usnadňuje podstatně řešení problému.

Příklad 2.7. K podobné, avšak poněkud obecnější matematické formulaci než v předchozím příkladě vede úloha optimálního rozdělení výrobních programů.

Předpokládejme pro jednoduchost, že podnik má k dispozici tři dávkovací a balicí automaty různého výkonu. Podnik dodává své výrobky ve čtyřech baleních. Výkonnost strojů, jejich měsíční kapacita v hodinách, jakož i měsíční plán výroby jsou uvedeny v tab. 2.5.

Předpokládejme dále, že náklady na hodinu provozu stroje (včetně mezd) jsou konstantní a činí 40 Kčs u prvního stroje, 30 Kčs u druhého stroje a 20 Kčs u třetího stroje. Jde nyní o to rozdělit práci mezi stroje tak, aby měsíční plán byl splněn s minimálními náklady.

Tabulka 2.5

Stroj	Výkon strojů v ks/h při druhu balení				Měsíční kapacita stroje v hodinách
	č. 1	č. 2	č. 3	č. 4	
I	2 500	2 000	1 800	1 500	400
II	2 000	1 500	1 200	800	280
III	1 200	1 000	700	300	280
Měsíční plán výroby v 1 000 ks	320	400	350	300	

Označíme-li symbolem x_{ij} počet hodin za měsíc, po které i-tý stroj bude zaměstnán výrobou výrobků j-tého druhu balení, pak podmínku, že kapacita strojů je omezena, můžeme vyjádřit těmito nerovnostmi:

$$\begin{array}{lllr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & \leqq 400 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & \leqq 280 \\
& & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leqq 280
\end{array}$$

Podmínky, že plán musí být splněn, vyjádříme nerovnostmi

$$\begin{array}{llllllllllllr}
2{,}5x_{11} & & & & +2x_{21} & & & & +1{,}2x_{31} & & & & \geqq 320 \\
& 2x_{12} & & & & +1{,}5x_{22} & & & & +x_{32} & & & \geqq 400 \\
& & 1{,}8x_{13} & & & & +1{,}2x_{23} & & & & +0{,}7x_{33} & & \geqq 350 \\
& & & 1{,}5x_{14} & & & & +0{,}8x_{24} & & & & +0{,}3x_{34} & \geqq 300
\end{array}$$

To jsou omezení problému, ovšem kromě podmínek nezápornosti, které zřejmě platí i zde, tj.:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

Účelovou funkci pak dostaneme velmi jednoduše, jestliže násobíme dobu práce jednotlivých strojů příslušnými náklady a výsledky sečteme, tj.

$$z = 40(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 30(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 20(x_{31} + \\ + x_{32} + x_{33} + x_{34})$$

2.3 Obecná formulace problémů lineárního programování

Příklady uvedené v předchozím článku jsou po formální stránce podobné. Odmyslíme-li si jejich věcnou náplň, vidíme, že jde vždy o týž matematický problém: nalézt extrém (minimum nebo maximum) lineární funkce mnoha proměnných při vedlejších podmínkách vyjádřených lineárními rovnicemi nebo nerovnostmi.

Později uvidíme, že nerovnosti lze převést na rovnice o větším počtu neznámých, a také naopak, že rovnici lze nahradit dvěma nerovnostmi, dále že problémy minimalizační lze řešit jako maximalizační, a naopak. Abychom se tedy v dalším výkladu vyhnuli zbytečnému opakování, zavedeme obecně tento tvar problémů lineárního programování:

Nalézt řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých,

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array} \qquad (2.11)$$

takové, aby bylo nezáporné, tj.

$$x_1 \geqq 0; \quad x_2 \geqq 0; \ldots; \quad x_n \geqq 0, \qquad (2.12)$$

a aby lineární forma (účelová funkce)*)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.13)$$

dosáhla maxima.

Stručněji: na množině řešení (2.11) a (2.12) nalézt maximum lineární formy (2.13).

Neznámé v rovnicích (2.11) určují **úroveň** (nebo **intenzitu**) nějakých procesů. V úlohách lineárního programování jde tedy vždy o to stanovit, jak je třeba kombinovat různé procesy, které jednotka může provádět, aby výsledek byl optimální. Pro způsob řešení je konkrétní povaha těchto procesů lhostejná, je důležitá pouze číselná charakteristika procesů. Ta je dána uspořádanou soustavou $m + 1$ reálných čísel, tj. koeficientů příslušné neznámé v rovnicích (2.11) a v účelové funkci (2.13). Tak např. první proces je charakterizován soustavou koeficientů neznámé x_1, tj. soustavou $[a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}, c_1]$. Prvních m čísel této soustavy charakterizuje strukturu procesu (např. kolik jednotek různých činitelů se spotřebuje a kolik jednotek výsledku se získává při jednotkovém provedení procesu), poslední číslo je „cenou" procesu. Taková uspořádaná soustava čísel se v matematice nazývá vektorem (blíže o tom pojednáme v čl. 3.2). Budeme proto stručně mluvit také o vektoru procesu, popřípadě místo o procesech budeme někdy mluvit o vektorech.

Rovnice (2.11) a nerovnosti (2.12) se nazývají **omezeními úlohy**. Tato omezení jsou dvojího druhu:

a) **Vlastní omezení** vyjádřená rovnicemi (2.11) vyplývají jednak z toho, že některé činitele jsou k dispozici jen v omezeném množství (omezení na straně vstupu), jednak z různých podmínek (např. požadavky na sortiment, předpisy plánu, omezenost odbytu aj.), na něž je vázán výsledek (omezení na straně výstupu).

---

*) Lineární formou nazýváme lineární funkci, v níž chybí absolutní člen, tj. pro niž platí vztahy

$$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) \quad \text{a} \quad f(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}) = f(\mathbf{x}^{(1)}) + f(\mathbf{x}^{(2)}).$$

b) **Podmínky nezápornosti** (2.12).

Lineární forma (2.13), jejíž extrém hledáme, je účelová funkce.

Při lineárním programování jde tedy v podstatě o řešení soustavy lineárních rovnic (2.11).

Každé řešení této soustavy, které vyhovuje též podmínkám nezápornosti (2.12), je přípustným programem, a nazývá se proto **přípustným řešením.***) Řešení, které kromě toho maximalizuje účelovou funkci, je **optimální řešení.** Hodnotu účelové funkce při optimálním řešení (tj. maximální hodnotu účelové funkce) budeme pro stručnost nazývat též hodnotou úlohy (hodnotou lineárního programu).

Otázkou řešitelnosti soustav lineárních rovnic se budeme zabývat v čl. 3.13.

V teorii lineárního programování se zkoumají podmínky, za kterých má úloha lineárního programování optimální řešení, a odvozují se metody pro určení optimálních řešení.

Obtíž při řešení problémů lineárního programování tkví právě v tom, že soustava rovnic má u většiny praktických úloh lineárního programování nekonečně mnoho řešení, z nichž máme vybrat řešení optimální. Samozřejmě nelze postupovat tak, abychom určili všechna řešení a vyzkoušeli, které z nich optimalizuje účelovou funkci.

Do určité míry nám při hledání optimálního řešení pomůže okolnost, že se můžeme omezit na tzv. **základní řešení.****) Základní řešení má nejvýše tolik kladných souřadnic, kolik je v soustavě rovnic; zbývající jsou nulové. Je-li tedy v soustavě m rovnic a je-li počet neznámých n, pak základní řešení obsahuje nejvíce m kladných souřadnic a nejméně $n - m$ nulových.***)

Neznámé, které mají v základním řešení nenulové hodnoty, nazýváme také základními proměnnými a příslušné procesy též základními procesy.

Pro lineární programování má základní důležitost poučka (tzv. **základní věta lineárního programování**), kterou uvádíme zatím bez důkazu:

Má-li problém lineárního programování optimální řešení, které není základní, má nutně též optimální řešení základní (důkaz viz v čl. 4.3).

Znamená to, že při hledání optimálního řešení se můžeme omezit na řešení základní, jichž je vždy konečný počet.

Základní řešení soustavy m rovnic o n neznámých ($m < n$) můžeme získat tak, že dosadíme za $n - m$ neznámých nuly a řešíme zbývající soustavu m rovnic o m neznámých, ovšem za předpokladu, že má řešení. Nemáme přitom ovšem jistotu, že to bude řešení nezáporné. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má tedy

---

*) Podle potřeby, jak uvidíme později, zahrnujeme pod pojem přípustnosti nejenom nezápornost, ale i některé jiné podmínky, jako celočíselnost aj.

**) V literatuře se užívá též názvu bazické řešení (basic solution).

***) Předpokládáme zde, že $m < n$, tj. že počet rovnic (a tedy počet omezení) je menší než počet neznámých (než počet procesů).

nejvýše tolik základních řešení, kolika způsoby je možno z n neznámých vybrat $n - m$ (nebo m) neznámých, tj.

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m},$$

tedy konečný počet.

Je třeba podotknout, že číslo $\binom{n}{m}$, tedy počet základních řešení, je v praktických případech příliš veliké. Tak již při pěti rovnicích o deseti neznámých je možný počet základních řešení

$$\binom{10}{5} = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$$

Abychom je všechna určili, museli bychom řešit 252 soustav po pěti rovnicích o pěti neznámých.

Příklady z praxe však obsahují několik desítek neznámých a tomu přiměřený počet omezení. Kdybychom měli třeba soustavu 20 rovnic o 50 neznámých (což je celkem průměrný rozsah praktického příkladu), byl by počet základních řešení již okolo 47 bilionů. Určit je všechna v přijatelném čase není samozřejmě možné ani pomocí nejmodernějších počítačů. Je proto nezbytné nalézt metody, které by dovolily dostat optimální řešení jednodušším způsobem. Takových metod bylo vypracováno několik. Jejich pochopení vyžaduje základní matematické znalosti, které jsou předmětem další kapitoly.

Při řešení problémů lineárního programování je velmi důležitá otázka pracnosti výpočtů. I když jsou k dispozici počítače, činí výpočet rozsáhlých příkladů značné potíže a často se pro pracnost výpočtů spokojujeme s přibližným řešením. Proto není radno se omezit pro všechny případy na jedinou metodu a je třeba volit vždy tu metodu, která je pro řešení daného konkrétního příkladu nejméně pracná, přičemž se maximálně využívá všech možností zjednodušení.

2.4 CVIČENÍ

Sestavte matematický model těchto úloh:

1. Podnik zpracovává čtyři druhy složek (F), z nichž sestavuje šest druhů směsí (S). K dispozici je 2 000 l první složky, 1 500 l druhé složky, 1 820 l třetí složky a 2 150 l čtvrté složky. Potřeba složek v l na 1 l směsi je uvedena v tab. 2.6.

Náklady na 1 l první směsi činí 220 Kčs, u druhé 180 Kčs, u třetí 215 Kčs, u čtvrté 185 Kčs, u páté 210 Kčs a u šesté směsi 230 Kčs. I když u první a šesté směsi jsou náklady nejvyšší a rentabilita nejnižší, je podnik povinen zabezpečit výrobu první směsi v množství aspoň 500 l, šesté směsi aspoň 800 l; páté směsi je nutno vyrobit nanejvýše 100 l.

Sestavte plán výroby směsí tak, aby celkové náklady byly při stoprocentním využití složek minimální.

Tabulka 2.6

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
F_1	0,5	0,5	—	0,2	0,6	0,4
F_2	0,2	—	0,4	0,6	0,3	0,6
F_3	0,3	0,4	0,4	0,2	—	—
F_4	0,1	0,15	0,3	0,1	0,2	—

2. Závod dostává polotovary v konstantních rozměrech o stejné šíři: první polotovar v balících o 50 bm, druhý polotovar v balících o 25 bm a třetí polotovar v balících o 75 bm. Polotovary jsou při dalším zpracování zaměnitelné. Z polotovarů je nutno nastříhat kusy dlouhé 3, 5, 7 a 8 bm. Přípustný odpad z jednoho balíku je maximálně 2 bm.

Požadovaný počet třímetrových kusů je 200, pětimetrových 250, sedmimetrových 300 a osmimetrových 400. Dodavatelský závod může předat prakticky neomezené množství polotovarů.

Navrhněte, jak stříhat polotovary, aby odpad byl minimální (poznámka: nejprve zjistěte, jak je např. možno stříhat na potřebné rozměry 50metrové balíky atd.).

3. Závod vyrábí čtyři výrobky:

první výrobek dvěma způsoby,
druhý výrobek třemi způsoby,
třetí výrobek dvěma způsoby,
čtvrtý výrobek třemi způsoby.

Spotřeba na 1 kg výrobku: suroviny v kg (S), pracovní doby strojů v minutách (P), elektrické energie ve Wh (E) je udána v tabulce 2.7.

Tabulka 2.7

Výrobek	V_1		V_2			V_3		V_4		
Výr. způsob / Činitel	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	1	3	4	5	5	7	2	3	4	5
S_2	1	3	5	0	2	4	6	8	3	7
S_3	2	3	4	7	6	5	2	0	0	0
P_1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1
P_2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1
P_3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
E	1	1,6	1,3	1,2	1,1	1,4	1,3	1,1	1,2	1,3

K dispozici jsou 2 t první suroviny, 2,5 t druhé suroviny, 1,75 t třetí suroviny. Spotřeba pracovní doby 1. stroje nesmí přesáhnout 23 1/2 hod., 2. stroje 23 3/4 hod. a 3. stroje 23 1/4 hod. Spotřeba elektrické energie je omezena na 10 kWh.

Výrobek V_1 slouží jednak jako polotovar, je však určen i k odbytu. Na výrobu 1 kg V_2 je třeba 0,2 kg V_1, na výrobu 1 kg V_4 je třeba 0,25 kg V_1.

Pro první výrobek je zajištěn odbyt nanejvýš na 250 kg. Čtvrtého výrobku lze prodat nejméně 150 kg.

Cena 1 kg prvního výrobku činí 20 Kčs, druhého 30 Kčs, třetího 15 Kčs a čtvrtého výrobku 25 Kčs.

Cílem podniku je dosáhnout maximální ceny odbytu.

4. Členové JZD bydlí ve čtyřech sdružených obcích. Je třeba, aby zabezpečili čtyři druhy jarních zemědělských prací, které je možno provádět v určitý den na 16 polích (předpokládejme, že tyto druhy prací nevyžadují speciální kvalifikace). Pole jsou různě vzdálena od obcí. Cesta na pole a z pole se počítá do pracovní doby, proto je třeba, aby počet km, které musí členové na pole projít, byl minimální.

Počty členů JZD v obcích (O), počty členů požadovaných pro jednotlivé druhy prací (P) a vzdálenosti obcí od polí v km jsou uvedeny v tab. 2.8.

Tabulka 2.8

	P_1	P_2	P_3	P_4	Počet členů v obci
O_1	1	2	3	1,5	10
O_2	2	0,5	4	2,5	40
O_3	1	3	2	2,5	60
O_4	5,5	0,5	1,5	5	30
Počet členů požadovaných	30	40	20	20	

Rozdělte členy JZD na práce a pole podle uvedeného hlediska.

5. Pět podniků téhož sdružení vyrábí jeden druh výrobků, který dodává šesti odběratelům. První podnik se zavázal dodat odběratelům celkem 500 t výrobků, druhý podnik 400 t, třetí 280 t, čtvrtý 320 t a pátý 400 t. (První odběratel požaduje od všech podniků celkem 120 t, druhý 240 t, třetí 350 t, čtvrtý 490 t, pátý odběratel 200 t a šestý 500 t.) V průběhu plnění dodavatelsko-odběratelské smlouvy vedly určité okolnosti u pátého podniku ke snížení kapacity o 200 t; v důsledku toho ovšem nebude možno splnit všechny požadavky odběratelů. Ve smlouvě s nimi se však s touto eventualitou počítalo. Pouze čtvrtý odběratel bude případné nedodání výrobků penalizovat ve výši 20 Kčs za 1 t.

V tabulce 2.9 je uvedena v Kčs výše nákladů na dopravu od i-tého podniku (P) k j-tému odběrateli (O).

Sestavte rozvozní plán s minimálními náklady (do nákladů se počítá i penále).

6. Pro zvýšení celkového maloobchodního obratu obchodního domu prověřilo vedení, jak se uplatňují stálé 5členné kolektivy (K) v různých odděleních (O). Výsledky práce bodovalo v poměru k maximální výši maloobchodního obratu (tab. 2.10).

Tabulka 2.9

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
P_1	20	30	40	50	60	70
P_2	15	20	5	15	25	30
P_3	30	45	20	20	5	25
P_4	65	70	15	20	25	10
P_5	5	15	25	30	50	40

Tabulka 2.10

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
K_1	100	80	70	75	90
K_2	85	85	100	85	95
K_3	65	100	95	100	90
K_4	100	90	85	95	90
K_5	90	90	100	100	90

Navrhněte nejvhodnější rozdělení kolektivů podle uvedeného cíle tak, aby každý kolektiv pracoval v jednom oddělení a v každém oddělení aby byl jen jeden kolektiv.

7. Podnik vyrábí jeden druh výrobků ve třech jakostech na třech linkách. Výrobky 1. jakosti se prodávají za 1 000 Kčs, výrobky 2. jakosti za 950 Kčs, 3. jakosti za 900 Kčs. První linka má denní kapacitu 24 hodin, 2. linka 23 3/4 hodin, 3. linka 23 hodin 46 minut. Podnik je vázán hospodářskou smlouvou s odběratelem, že dodá denně aspoň 15 výrobků 1. jakosti, 25 výrobků 2. jakosti a 60 výrobků 3. jakosti.

Spotřeba pracovního času linek v minutách na výrobu jednoho výrobku určité jakosti je uvedena v tab. 2.11 (celý výrobek je vyroben vždy jen na jedné lince).

Tabulka 2.11

	L_1	L_2	L_3
J_1	52	52	—
J_2	45	44	44
J_3	30	31	29

Na třetí lince se výrobek první jakosti nevyrábí.

Cílem podniku je zabezpečit požadavky odběratele a dosáhnout přitom maximální ceny odbytu. (Jak by se změnil matematický model úlohy, kdyby nebyl podnik vázán hospodářskou smlouvou s odběratelem?)

8. Výrobní podnik zásobuje výrobky ze svých tří závodů (Z) o kapacitách 200, 300, 500 q dva velkoobchodní podniky (V), které požadují 400 a 600 q výrobků. Odtud je zboží dodáváno pěti maloobchodním prodejnám (M), které potřebují 100, 200, 300, 150 a 250 q výrobků. Kilometrové vzdálenosti činí:

Z_1 od V_1 30 km
Z_1 od V_2 70 km
Z_2 od V_1 25 km
Z_2 od V_2 35 km
Z_3 od V_1 65 km
Z_3 od V_2 25 km

V_1 od M_1 30 km
V_1 od M_2 15 km
V_1 od M_3 40 km
V_1 od M_4 70 km
V_1 od M_5 100 km
V_2 od M_1 70 km
V_2 od M_2 45 km
V_2 od M_3 15 km
V_2 od M_4 30 km
V_2 od M_5 55 km

Sestavte rozvozní plán tak, aby celkový počet tkm byl co nejmenší.

KAPITOLA 3 MATEMATICKÉ ZÁKLADY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

3.1 NĚKTERÉ POJMY Z TEORIE MNOŽIN

Množina je základním pojmem matematiky. **Množinou nazýváme souhrn jakýchkoli objektů,** které nazýváme **prvky** této množiny.

Příklady množin:

1. Množinu tvoří všechna přirozená čísla menší než deset. Prvky této množiny jsou přirozená čísla 1 až 9. Je to tedy množina konečná.

2. Množinu tvoří všechna reálná kladná čísla menší než jedna. Prvkem této množiny je každé reálné číslo větší než nula a menší než jednotka. Tato množina má tedy nekonečně mnoho prvků.

3. Množinu tvoří také všechny knihy, které leží na dané poličce. Prvkem této množiny je každá kniha, která na dané poličce leží. Je to nutně množina konečná.

4. Množinu tvoří všechna řešení dané soustavy rovnic. Prvkem této množiny je každé řešení této soustavy. Tato množina může být i nekonečná, má-li soustava rovnic nekonečný počet řešení.

Je účelné zavést též pojem množiny prázdné. Množinu nazýváme prázdnou, neobsahuje-li ani jeden prvek. Tak množina v příkladě 3 je prázdná, není-li na poličce ani jedna kniha. Podobně množina v příkladě 4 je prázdná, nemá-li soustava rovnic řešení.

Množiny se obvykle označují velkými písmeny. Okolnost, že nějaký předmět a je prvkem množiny A, se označuje symbolem

$$a \in A$$

Množinu lze určit tak, že se uvedou všechny prvky této množiny; uvedou se obvykle ve svorkách. Např.

$$A = \{x, y, z\}$$

znamená množinu, která se skládá ze tří prvků, x, y a z. Tak je možno určit ovšem jenom konečné množiny. Obvykle se množina určuje tak, že se udávají vlastnosti prvků množiny; množina je pak určena, víme-li o každém objektu, zda do té množiny patří či ne. Tak např. říkáme-li, že A znamená množinu všech přirozených čísel dělitelných pěti, pak víme přesně, které objekty do této množiny patří a které ne. Množina je tím určena.

Je-li množina A tvořena vesměs prvky jiné množiny B, to znamená, jsou-li všechny prvky množiny A současně prvky množiny B, pak A nazýváme **podmnožinou** množiny B.

Symbolicky se to označuje

$$A \subset B \quad \text{nebo} \quad B \supset A$$

Platí-li současně

$$A \subset B \quad \text{a} \quad B \subset A,$$

jsou zřejmě obě množiny A a B **totožné,** což označujeme

$$A = B$$

Sjednocení množin. Máme-li dvě množiny, A a B, nazýváme jejich sjednocením množinu, jejíž prvky jsou prvky aspoň jedné z množin A a B. Sjednocení množin A a B označujeme

$$A \cup B$$

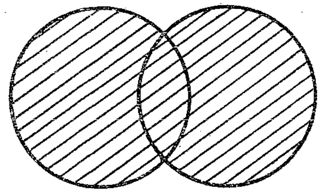
Tak např. jsou-li A a B množiny bodů kruhů v obr. 3.1, je $A \cup B$ množina všech bodů ve vyšrafovaném obrazci.

Průnik dvou množin, A a B, je jejich společná část, tj. množina, jejíž prvky jsou zároveň prvky obou množin, A a B. Průnik množin A a B se označuje

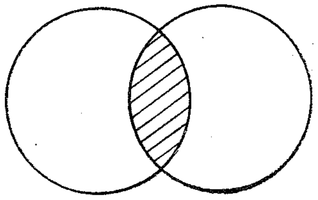
$$A \cap B$$

Např. jsou-li A a B množiny bodů kruhů, je jejich průnikem množina bodů ve vyšrafovaném obrazci (obr. 3.2).

Nemají-li množiny A a B společné prvky, je jejich průnikem množina prázdná.



Obr. 3.1



Obr. 3.2

3.2 VEKTORY

Z elementární matematiky jsou známy základní operace s čísly. Příklady, které jsme uvedli v předchozí kapitole, však ukazují, že v hospodářské praxi máme vedle jednotlivých čísel často co dělat se soustavami čísel. Tak např. jsme viděli, že výrobní program podniku lze vyjádřit jako soustavu čísel udávajících množství předpokládané produkce jednotlivých výrobků. Podobně můžeme krmnou dávku (v nutričním problému) nebo vsázku do ocelářské pece udat soustavou čísel, přičemž jednotlivá čísla znamenají množství jednotlivých krmiv v dávce, resp. množství jednotlivých komponent ve vsázce. Je zřejmé, že označení takových komplexů soustavou čísel má smysl jen tehdy, jestliže jednotlivá čísla soustavy mají pevné pořadí. Tak např. kdyby jednotlivé výrobky neměly pevné pořadí, nevěděli bychom, ke kterému výrobku se vztahuje to či ono číslo v soustavě čísel označujících výrobní program. V dalším výkladu se naučíme operovat s podobnými uspořádanými soustavami čísel.

Uspořádaná soustava n čísel nebo stručně uspořádaná n-tice čísel se nazývá **n-souřadnicovým vektorem.** Jednotlivá čísla soustavy pak nazýváme jeho **souřadnicemi.***)

Dále se omezíme jen na reálné vektory, tj. na vektory, jejichž souřadnice jsou reálná čísla. Slovem vektor budeme tedy vždy rozumět reálný vektor.

Je účelné rozlišovat sloupcové a řádkové vektory (viz čl. 3.7). Vektory lze totiž považovat za speciální případ matic, a to matic typu $(n \,.\, 1)$ (sloupcový vektor) a matic typu $(1 \,.\, n)$ (řádkový vektor). Souřadnice sloupcového vektoru se obvykle píší za sebou do sloupce, souřadnice řádkového vektoru do řádky. Tak např. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ je dvousouřadnicový sloupcový vektor, $[-3, 5, -1, -4]$ je čtyřsouřadnicový řádkový vektor.

Vektor o jediné souřadnici se nazývá **skalárem**; je to zřejmě reálné číslo.

Vektory budeme v dalším označovat polotučnými písmeny, a bude-li to nutné, budeme jejich souřadnice vypisovat do závorek obyčejnými písmeny. Základním vektorem bude pro nás v dalším výkladu obvykle vektor sloupcový. Řádkový vektor budeme pro rozlišení označovat indexem T (transponovaný) vpravo nahoře. Předpokládáme, že vznikl transponováním ze sloupcového o stejných souřadnicích (čl. 3.7). Tak např.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

je tříčlenný sloupcový vektor. Řádkový vektor o stejných souřadnicích označujeme

$$\mathbf{a}^T = [3, 2, 5]$$

---

*) Užívá se též názvů n-členný, n-složkový nebo n-rozměrný vektor. Oprávněnost posledního pojmenování poznáme později (čl. 3.6). Místo souřadnice se užívá též názvu složka nebo komponenta.

Definice **rovnosti vektorů.** Dva vektory jsou si rovny, **jsou-li téhož druhu** (tj. jsou-li oba sloupcové nebo řádkové a mají-li stejný počet souřadnic) a jsou-li **odpovídající si souřadnice rovny.**

Tak např. z vektorů

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}^T = [3, 2, 0], \qquad \mathbf{b}^T = [3, 2]$$

$$\mathbf{c}^T = [2, 0, 3], \qquad \mathbf{d}^T = [3, 2, 0]$$

jsou si rovny pouze $\mathbf{a}^T$ a $\mathbf{d}^T$.

Podobně jako rovnost jsou i pojmy **menší** a **větší** definovány pouze pro vektory téhož druhu.

Definice: Pro dva n-souřadnicové vektory

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{a} \quad \mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

platí, že

$$\mathbf{a}^T < \mathbf{b}^T \qquad (\text{čti } \mathbf{a} \text{ menší než } \mathbf{b}),$$

jestliže platí pro jednotlivé souřadnice

$$a_1 < b_1, \qquad a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$$

Dále zavádíme označení

$$\mathbf{a} \leqq \mathbf{b},$$

jestliže platí

$$a_1 \leqq b_1, \qquad a_2 \leqq b_2, \ldots, a_n \leqq b_n$$

Analogicky zavádíme označení

$$\mathbf{a} > \mathbf{b} \qquad (\text{čti } \mathbf{a} \text{ větší než } \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$$

Je zajímavé si povšimnout, že zatímco pro dvě reálná čísla musí platit jeden ze tří vztahů

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b,$$

pro dvojici vektorů nemusí platit ani jeden ze shora uvedených vztahů. Tak např. neplatí ani jeden ze shora uvedených vztahů pro vektory

$$\mathbf{a}^T = [3, 4, 2, -5] \quad \text{a} \quad \mathbf{b}^T = [1, 2, 5, 0]$$

1. **Násobení vektoru skalárem.** Součin vektoru **a** a čísla k je vektor $k \cdot \mathbf{a}$, jehož jednotlivé **souřadnice jsou násobky souřadnic vektoru a.** Tedy

$$k \cdot \mathbf{a}^T = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]$$

Je-li např. procesem výroba jednotky určitého výrobku a je-li tento proces charakterizován spotřebou čtyř surovin v množství 5, 2, 3 a 6 jednotek, můžeme jej stručně charakterizovat vektorem [5, 2, 3, 6]. Je zřejmé, že při výrobě čtyř jednotek bude spotřeba všech surovin čtyřnásobná. Proces výroby čtyř jednotek můžeme tedy popsat součinem

$$4 \cdot [5, 2, 3, 6] = [20, 8, 12, 24]$$

Násobíme-li vektor **a** číslem -1, dostaneme vektor $-\mathbf{a}$, tj. vektor, jehož souřadnice jsou až na znaménko stejné jako u **a**.

2. **Sčítání a odčítání** je definováno pouze pro vektory stejného typu (řádkové, nebo sloupcové) o stejném počtu souřadnic. Součet dvou n-rozměrných vektorů **a** a **b** je vektor, jehož souřadnice se rovnají součtu příslušných souřadnic vektorů **a** a **b**, tedy

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] + [b_1, b_2, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]$$

Jestliže je např. proces výroby jednotky výrobku A popsán vektorem $\mathbf{a}^T = [5, 2, 3, 6]$ a proces výroby jednotky výrobku B vektorem $\mathbf{b}^T = [4, 3, 4, 2]$, kde souřadnice obou vektorů znamenají spotřebu čtyř základních surovin při obou procesech, bude spotřeba surovin při současné výrobě jednotky obou výrobků zřejmě popsána součtem vektorů $\mathbf{a}^T$ a $\mathbf{b}^T$, tj. vektorem

$$\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = [9, 5, 7, 8]$$

Snadno můžeme definovat také rozdíl dvou vektorů, **a** a **b**, jako součet vektoru **a** a vektoru $-\mathbf{b}$. Tedy

$$\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n]$$

Pro **násobení vektoru skalárem** a pro **sčítání vektorů** platí zřejmě **zákony jako pro obdobné operace s čísly,** zejména:

a) zákon komutativní, tj.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

b) zákon asociativní, tj.

$$t(k \cdot \mathbf{a}) = (t \cdot k)\,\mathbf{a}; \qquad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

c) zákon distributivní, tj.

$$(t + k)\,\mathbf{a} = t\mathbf{a} + k\mathbf{a}; \qquad k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

U čísel má nula tu vlastnost, že platí

$$a + 0 = a,$$

tj. přičtením nuly se dané číslo nemění. Obdobně definujeme nulový vektor **0** vztahem

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

Z pravidla o sčítání vektorů plyne, že nulový vektor má všechny souřadnice nulové, tedy např.

$$\mathbf{0}^T = [0, 0, \dots, 0]$$

3. **Skalární součin dvou vektorů** je definován pro **vektory s týmž počtem souřadnic a rovná se součtu součinů stejnolehlých prvků obou vektorů.**

Např. součin vektorů $[5, 2, 3, -2]$ a $[2, -4, 1, -1]$ se rovná $5 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + (-2)(-1) = 7$; obecně jestliže

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad \text{a} \quad \mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_n],$$

pak

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Všimněme si, že skalární součin dvou vektorů je skalár (reálné číslo).

Ve shodě s pravidly o násobení matic (viz čl. 3.9) budeme v dalším výkladu pod skalárním součinem rozumět výsledek násobení řádkového vektoru zprava vektorem sloupcovým, tedy $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$.

Ekonomicky můžeme skalární součin interpretovat např. takto:

Předpokládejme pro jednoduchost, že cihelna má v plánu vyrobit

1 800 tisíc kusů cihel plných,
250 tisíc kusů cihel dutých a
320 tisíc kusů tašek.

Výrobní program můžeme pak stručně popsat vektorem $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1\,800 \\ 250 \\ 320 \end{bmatrix}$. Činí-li velkoobchodní cena za 1 000 kusů cihel plných 300 Kčs, cihel dutých 620 Kčs a tašek 450 Kčs, je možno soustavu těchto cen vyjádřit ve formě vektoru $\mathbf{c}^T = [300, 620, 450]$.

Plán hrubé výroby cihelny se pak rovná skalárnímu součinu

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{p} = [300, 620, 450] \begin{bmatrix} 1\,800 \\ 250 \\ 320 \end{bmatrix} = 839\,000 \text{ Kčs}$$

Pro skalární součin platí také zákon distributivní, tj.

$$(\mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_2^T) \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{a}_1^T \,.\, \mathbf{b} + \mathbf{a}_2^T \,.\, \mathbf{b},$$

a zákon komutativní

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

3.4 LINEÁRNÍ ZÁVISLOST

Postupným prováděním operací násobení skalárem a sčítání vektorů je možno z daných vektorů téhož typu a o témž počtu souřadnic $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ utvořit vektory

$$k_1 \,.\, \mathbf{a}_1 + k_2 \,.\, \mathbf{a}_2 + \ldots + k_n \,.\, \mathbf{a}_n,$$

kde koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou libovolná čísla. Vektor $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_n \mathbf{a}$ se nazývá **lineární kombinací** vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Lineární kombinace se nazývá nezápornou, není-li ani jeden z koeficientů k_i záporný, tj. $k_i \geqq 0$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Speciálně nazýváme lineární kombinaci vektorů

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_n\mathbf{a}_n$$

konvexní kombinací,*) platí-li

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$$
$$k_i \geqq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

V lineárním programování mají nezáporné a zejména konvexní kombinace vektorů zvláštní význam.

Příklad 3.1. Nechť podnik vyrábí tři výrobky; na jednotku prvního výrobku potřebuje 300 kg oceli, 80 kg mědi, 0,3 m³ dřeva a 20 kg chemikálií. Na jednotku druhého výrobku potřebuje 520 kg oceli, 0,8 m³ dřeva a 8 kg chemikálií. Na jednotku třetího výrobku potřebuje 400 kg oceli, 50 kg mědi a 1,2 m³ dřeva. Má-li podnik v plánu vyrobit 5 jednotek prvního, 8 jednotek druhého a 10 jednotek třetího výrobku, může celkovou spotřebu jednotlivých surovin vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů vyjadřujících spotřebu surovin na jednotlivé výrobky:

$$5\begin{bmatrix} 300 \\ 80 \\ 0{,}3 \\ 20 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 520 \\ 0 \\ 0{,}8 \\ 8 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 400 \\ 50 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\,660 \\ 900 \\ 19{,}9 \\ 164 \end{bmatrix}$$

---

*) Smysl tohoto názvu vysvitne v čl. 3.15.

Definice: Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ se nazývají **lineárně nezávislými,** jestliže se jejich lineární kombinace rovná nulovému vektoru jedině tehdy, jsou-li všechny koeficienty rovny nule, tj. jestliže vztah

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

platí jedině v případě, že

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0 \tag{3.2}$$

V opačném případě, tj. jestliže (3.1) platí i v případě, že nejsou všechny koeficienty k_i rovny nule, jsou vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ **lineárně závislé.**

Jsou-li vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ lineárně závislé, je možno jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Jestliže např. $k_i \neq 0$, pak z (3.1) vyplývá zřejmě, že

$$\mathbf{a}_i = -\frac{k_1}{k_i}\mathbf{a}_1 - \frac{k_2}{k_i}\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\mathbf{a}_{i-1} - \\ - \frac{k_{i+1}}{k_i}\mathbf{a}_{i+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_i}\mathbf{a}_n,$$

tj. $\mathbf{a}_i$ je lineární kombinací ostatních vektorů.

Samozřejmě platí také opak, tj. je-li jeden z vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ lineární kombinací ostatních, je uvedená soustava vektorů lineárně závislá.

Je tedy možno lineární závislost definovat také tak, že soustava n vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ je lineárně závislá, je-li možno aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Nedá-li se ani jeden z vektorů soustavy vyjádřit jako lineární kombinace ostatních, je soustava lineárně nezávislá.

Z toho bezprostředně plyne, že je-li jeden z vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektor nulový, pak soustava je lineárně závislá. Jestliže totiž např. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, pak lze $\mathbf{a}_1$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů:

$$\mathbf{a}_1 = 0 \,.\, \mathbf{a}_2 + 0 \,.\, \mathbf{a}_3 + \ldots + 0 \,.\, \mathbf{a}_n$$

Např. vektory

$$\mathbf{a}^T = [3, 2, -4]$$
$$\mathbf{b}^T = [2, -1, 3]$$
$$\mathbf{c}^T = [0, -7, 17]$$

jsou lineárně závislé, neboť platí např.

$$2\mathbf{a}^T - 3\mathbf{b}^T + \mathbf{c}^T = \mathbf{0};$$

avšak vektory

$$\mathbf{a}^T = [3, 2, -4]$$
$$\mathbf{b}^T = [2, -1, 3]$$
$$\mathbf{d}^T = [2, 2, 2]$$

jsou lineárně nezávislé, neboť ani jeden z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních dvou.

Příklad 3.2. Dejme tomu např., že máme v tab. 3.1 dány účinné složky ve čtyřech různých potravinách:

Tabulka 3.1

Účinné složky	Obsah účinných složek v 1 kg potraviny			
	A	*B*	*C*	*D*
Energie kal.	800	200	500	600
Bílkoviny g	50	120	80	98
Vit. C m. j.	20	0	50	44

Pokud nás zajímá pouze obsah uvedených tří účinných složek, můžeme každou potravinu plně popsat třísouřadnicovým vektorem. Např. první potravina je určena vektorem

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 800 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Jak se snadno přesvědčíme, jsou uvedené čtyři vektory lineárně závislé, neboť platí

$$\begin{bmatrix} 800 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 500 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 600 \\ 98 \\ 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kterýkoli z uvedených čtyř vektorů lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Jinými slovy to znamená, že kteroukoli z uvedených čtyř potravin lze nahradit kombinací ostatních tří. Např. pro poslední vektor platí

$$\begin{bmatrix} 600 \\ 98 \\ 44 \end{bmatrix} = 0{,}2\begin{bmatrix} 800 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} + 0{,}2\begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}8\begin{bmatrix} 500 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Věcně to znamená, že kg potraviny *D* je co do obsahu účinných složek ekvivalentní součtu 0,2 kg potraviny *A*, 0,2 kg potraviny *B* a 0,8 kg potraviny *C* a může být nahrazen uvedenou kombinací prvních tří potravin.

3.5 HODNOST SOUSTAVY VEKTORŮ

Máme-li soustavu vektorů, jakou je např. soustava čtyř vektorů v právě uvedeném příkladě, je velmi důležité znát, jaký je maximální počet lineárně nezávislých vektorů v této soustavě. Tak např. v soustavě čtyř vektorů posledního příkladu je maximální počet lineárně nezávislých vektorů tři (např. první tři vektory soustavy jsou lineárně nezávislé). Toto číslo je velmi důležitou charakteristikou soustavy vektorů a nazývá se hodností soustavy (označíme ji symbolem h).

Definice: **Hodností soustavy vektorů** nazýváme maximální počet lineárně nezávislých vektorů v dané soustavě.

Platí tato věta: Je-li hodnost soustavy vektorů h, pak každý vektor soustavy se dá vyjádřit jako lineární kombinace libovolných h lineárně nezávislých vektorů soustavy, a to jediným způsobem.

První část této věty je takřka samozřejmá. Předpokládejme totiž opak. Dejme tomu, že v soustavě vektorů o hodnosti h máme h lineárně nezávislých vektorů

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$$

a že další vektor soustavy ($\mathbf{b}$) není možno vyjádřit jako jejich lineární kombinaci. To ale znamená, že $h + 1$ vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$, $\mathbf{b}$ tvoří lineárně nezávislou soustavu v rozporu s předpokladem, že hodnost soustavy je h. Musí tedy $\mathbf{b}$ být lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$.

Že je toto vyjádření jednoznačné, dokážeme rovněž snadno. Předpokládejme totiž, že je možno $\mathbf{b}$ vyjádřit dvěma způsoby jako lineární kombinaci $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$, tj.

$$\mathbf{b} = b_{11}\mathbf{a}_1 + b_{12}\mathbf{a}_2 + \ldots + b_{1h}\mathbf{a}_h$$
$$\mathbf{b} = b_{21}\mathbf{a}_1 + b_{22}\mathbf{a}_2 + \ldots + b_{2h}\mathbf{a}_h$$

Odečteme-li obě rovnice od sebe, dostaneme

$$\mathbf{0} = (b_{11} - b_{21})\,\mathbf{a}_1 + (b_{12} - b_{22})\,\mathbf{a}_2 + \ldots + (b_{1h} - b_{2h})\mathbf{a}_h$$

Protože $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$ jsou lineárně nezávislé, může poslední vztah platit jedině tehdy, jsou-li všechny koeficienty rovny nule, tj. platí-li

$$b_{11} = b_{21},\ b_{12} = b_{22}, \ldots, b_{1h} = b_{2h}$$

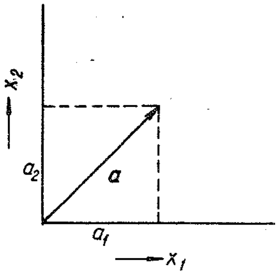
To znamená, že obě vyjádření vektoru $\mathbf{b}$ jsou totožná.

Z uvedené věty plynou dva důležité důsledky, jejichž důkaz přenecháme čtenáři:

Důsledek 1. Vyjmeme-li ze soustavy vektorů vektor, který je lineární kombinací ostatních vektorů, hodnost soustavy se tím nezmění.

Důsledek 2. Přidáme-li k soustavě vektorů vektor (vektory), který (které) se dá (se dají) vyjádřit jako lineární kombinace vektorů soustavy, hodnost soustavy se nezmění.

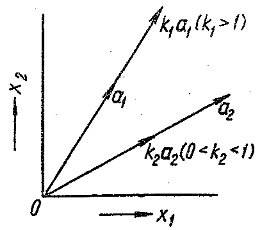
Pojem vektoru definovaný výše má jednoduchou geometrickou interpretaci. Vezmeme nejdříve dvousouřadnicové vektory. Jak je známo z elementární geometrie, lze uspořádanou dvojici reálných čísel $[a_1, a_2]$ interpretovat jako bod v rovině, jehož souřadnicemi v pravoúhlé soustavě jsou čísla a_1, a_2 (viz obr. 3.3).



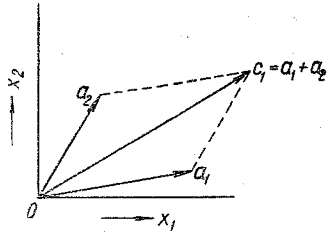
Obr. 3.3

Elementárním operacím s vektory lze pak dát tento názorný smysl: Násobení vektoru skalárem odpovídá posunutí bodu po přímce vedoucí tímto bodem a počátkem (obr. 3.4).

Sčítání (odčítání) vektorů podle výše uvedené definice se pak shoduje se známým rovnoběžníkovým pravidlem o sčítání vektorů*) (obr. 3.5).



Obr. 3.4



Obr. 3.5

Je přitom zřejmé, že množině všech dvousouřadnicových vektorů odpovídá množina všech bodů v rovině, tzv. dvourozměrný lineární prostor.

Třísouřadnicové vektory lze podobným způsobem interpretovat jako body v trojrozměrném prostoru. Jednosouřadnicové vektory (skaláry) lze pak interpretovat jako body na přímce (v jednorozměrném prostoru).

Pojem prostoru se v elementární geometrii zavádí intuitivně s odvoláním na názor.

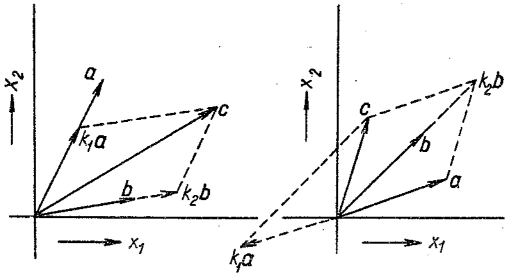
Z geometrického názoru snadno např. nahlédneme, že každý dvousouřadnicový vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci kterýchkoli dvou jiných lineárně nezávislých dvousouřadnicových vektorů.

---

*) Jde o pravidlo o sčítání sil nebo rychlostí, známé ze středoškolské fyziky.

Na obr. 3.6 je znázorněno, jak lze získat vektor **c** jako lineární kombinaci vektorů **a** a **b**. Stačí z bodu **c** vést rovnoběžky k spojnicím bodů **a** a **b** s počátkem a použitím rovnoběžníkového pravidla o sčítání vektorů určit $k_1\mathbf{a}$ a $k_2\mathbf{b}$, jejichž součet dává **c**.

Má tedy množina všech dvousouřadnicových vektorů hodnost 2. Pro vektory o počtu souřadnic větším než tři není podobná názorná interpretace možná. Zavádíme-li však pojem prostoru abstraktně – definitoricky, je možno názorné geometrické pojmy snadno zobecnit.



Obr. 3.6

Definice: **Množina prvků zvaných vektory se nazývá *n* rozměrným vektorovým prostorem, jestliže**

1. **jsou v ní definovány operace sčítání a násobení skalárem,*) přičemž pro uvedené operace platí zákon komutativní, asociativní a distributivní;**

2. **obsahuje nulový prvek té vlastnosti, že jeho přičtením k libovolnému prvku množiny se tento prvek nemění;**

3. **má hodnost *n*.**

Z analytické geometrie je známo, že vzdálenost bodu $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ od počátku je dána vzorcem $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$. Po zavedení skalárního součinu lze tento výraz psát také ve tvaru $\sqrt{(\mathbf{a}^T . \mathbf{a})}$. Toto číslo nazýváme také normou vektoru**) **a** a značíme je stručně $|\mathbf{a}|$. Vzdálenost dvou bodů, $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2]$ a $\mathbf{b}^T = [b_1, b_2]$, je dána vzorcem $\sqrt{[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}$, což je možno opět stručně psát ve tvaru skalárního součinu $\sqrt{[(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T . (\mathbf{a} - \mathbf{b})]}$. Takto zavedený pojem vzdálenosti má tyto vlastnosti:

a) vzdálenost dvou bodů je nezáporná a rovná se nule tehdy, a jen tehdy, jsou-li oba body totožné,

b) vzdálenost dvou bodů nemůže být větší než součet jejich vzdáleností od třetího bodu (pravidlo trojúhelníkové).

Zavedeme-li ve vektorovém prostoru pojem vzdálenosti ve výše uvedeném smyslu, nebo, jak říkáme stručně, zavedeme-li metriku, dostaneme užší pojem – euklidovský prostor.

Abstraktně zavedeme metriku do vektorového prostoru tím, že v něm definujeme skalární součin. Obecně nazveme $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}^T . \mathbf{a})}$ normou (délkou) vektoru **a** a $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ nazveme vzdáleností vektorů **a** a **b**.

---

*) Rozumí se, že příslušné operace lze vždy provést a že výsledek provedení těchto operací je opět prvkem dané množiny.

**) Též absolutní hodnotou vektoru nebo délkou vektoru.

Definice: Je-li v n-rozměrném vektorovém prostoru definován skalární součin, dostaneme n-rozměrný euklidovský prostor, který označíme stručně symbolem E_n.

Soustava n lineárně nezávislých vektorů se nazývá bází n-rozměrného prostoru.

Každý prvek n-rozměrného prostoru se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze.

Snadno lze dokázat, že množina všech n-souřadnicových vektorů definovaných výše, v čl. 3.2, tvoří právě n-rozměrný euklidovský prostor.

V této množině byly totiž definovány všechny operace o vlastnostech požadovaných u euklidovského prostoru. Stačí tedy dokázat, že má hodnost n.

K množině n-souřadnicových vektorů patří též n jednotkových vektorů

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj. vektorů, jejichž jedna souřadnice je jednotka, ostatní nuly. Těchto n vektorů tvoří (jak čtenář snadno dokáže sám) lineárně nezávislou soustavu. Libovolný n-souřadnicový vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto jednotkových vektorů, neboť platí obecně

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$$

Protože přidáním lineárně závislých vektorů se hodnost soustavy nemění, plyne z toho, že soustava všech n-souřadnicových vektorů má právě hodnost n, neboli že příslušný prostor je n-rozměrný.

Z toho plyne též oprávněnost pojmenování n-rozměrný vektor, jehož budeme občas používat ve stejném smyslu jako pojmenování n-souřadnicový vektor.

Určení báze v euklidovském prostoru odpovídá stanovení kartézské souřadnicové soustavy (tj. stanovení souřadnicových os a délkových jednotek). Přechod z jedné báze ke druhé odpovídá transformaci soustavy souřadnic. Později (v čl. 3.14) se naučíme, jak určit souřadnice vektoru v libovolné bázi.

Vybereme-li v E_n určitou soustavu vektorů a utvoříme-li všechny jejich lineární kombinace, dostaneme opět euklidovský prostor. Je totiž zřejmé, že takto utvořené vektory jsou uzavřeny vůči operacím sčítání a násobení skalárem, tj. součet dvou lineárních kombinací nebo jakýkoli násobek lineární kombinace jsou opět lineární kombinace týchž vektorů. Splnění ostatních požadavků na euklidovský prostor plyne z toho, že jde o prvky E_n. Takto konstruovaný prostor je částí E_n a nazývá se podprostorem E_n.

Např. všechny lineární kombinace dvou jednotkových n-rozměrných vektorů tvoří dvourozměrný podprostor E_n. Každá rovina je dvourozměrným podprostorem trojrozměrného prostoru atd.

3.7 MATICE

Matice je **soustava čísel uspořádaných do pravoúhelníkového tvaru:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Obecně má matice m řádků a n sloupců. Každé číslo a_{ij} (čti a-i-j) se nazývá prvkem matice. Každý prvek matice označujeme obecně dvěma indexy. První index, tzv. index řádkový, znamená řádku, do které daný prvek patří, druhý index – index sloupcový – znamená sloupec, do kterého tento prvek patří. Tedy např. a_{34} (čti a-tři-čtyři) je prvek ležící v průsečíku třetí řádky a čtvrtého sloupce matice. Matice o m řádcích a n sloupcích, již budeme stručně nazývat maticí typu $(m \,.\, n)$, má tedy $m \,.\, n$ prvků, z nichž některé nebo všechny mohou být nuly. Matice označíme v dalším výkladu tak, že prvky matice příslušně uspořádané dáme do hranatých závorek, tedy

$$\begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Často se užívá i stručnějšího označení tak, že se do závorek vypisuje jen obecný prvek matice, tedy $[a_{ij}]$, popřípadě se matice označuje pouze tučným písmenem, tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Místo hranatých závorek se užívá k označení matic i kulatých závorek a velmi často i dvou svislých čar, tedy – $\| a_{ij} \|$.

Je třeba zdůraznit, že matice je uspořádanou soustavou prvků. Sám souhrn $m \,.\, n$ čísel ještě neurčuje matici. Aby matice byla určena, je nutno znát též pořadí jednotlivých prvků v řádkách a sloupcích. Z toho bezprostředně vyplývá i pojem rovnosti matic.

Definice: Dvě matice, **A** a **B**, jsou si **rovny** (označení **A** = **B**) tehdy, a jen tehdy jsou-li obě matice **téhož typu a rovnají -li se navzájem všechny stejnolehlé prvky obou matic.**

V aplikacích hrají důležitou úlohu některé zvláštní druhy matic.

Čtvercová matice je taková matice, v níž počet řádek se rovná počtu sloupců, je to tedy matice typu $(n \,.\, n)$. Čtvercová matice o n řádkách se obvykle nazývá maticí n-tého řádu. Prvky, které leží v úhlopříčce čtvercové matice vedoucí z levého horního do pravého dolního rohu, nazývají se diagonálními prvky. Diagonální prvky tvoří dohromady hlavní diagonálu matice. V obecném označení mají diagonální prvky řádkové a sloupcové indexy stejné.

Čtvercová matice je souměrná, jestliže pro všechna i a j platí $a_{ij} = a_{ji}$. Např. matice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

je souměrná. Souměrná matice se zřejmě nezmění, překlopíme-li ji kolem hlavní diagonály.

Pro řešení lineárních rovnic jsou důležité tzv. matice **trojúhelníkové;** jsou to čtvercové matice, v nichž všechny prvky nad hlavní diagonálou nebo pod ní jsou nuly. Trojúhelníková matice (tzv. dolní trojúhelníková matice) má tedy např. tvar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Čtvercová matice, jejíž všechny prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou nuly, tedy matice tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se nazývá maticí diagonální.

Speciálním případem diagonální matice je matice, v níž všechny diagonální prvky jsou jednotky; je to tzv. matice jednotková. Uvidíme dále, že jednotková matice má v maticovém počtu podobnou úlohu jako jednotka u reálných čísel. Budeme ji značit symbolem **I**. (Někdy se užívá i označení **E** nebo **1**.) Pro jistotu se také vyznačuje indexem řád jednotkové matice, tedy např.

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obecněji, čtvercová matice, jejíž sloupce jsou navzájem různé jednotkové vektory (v libovolném pořadí), se nazývá permutační matice. Permutační maticí je například

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, se nazývá nulovou maticí; označíme ji **0**. Jak uvidíme později, má v maticovém počtu nulová matice některé podobné vlastnosti jako nula u reálných čísel.

Matice, která má m řádků a pouze jeden sloupec, tedy matice typu $(m \,.\, 1)$, je zřejmě m-rozměrný sloupcový vektor. Podobně matice o jedné řádce a n sloupcích, tedy matice typu $(1 \,.\, n)$, je n-rozměrný řádkový vektor.

3.8 SUBMATICE

Danou matici je možno vodorovnými a svislými čárami rozdělit na několik matic dílčích, na tzv. submatice. Rozdělení dané matice na submatice lze provést rozmanitým způsobem; jedno takové rozdělení dané matice **A** je znázorněno takto:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$$

V daném případě jsme matici **A** rozdělili na čtyři submatice. Označíme-li v našem příkladě jednotlivé submatice symboly $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$, lze matici **A** psát též ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Rozdělení matice na submatice je velmi účelné, neboť při některých operacích lze s nimi formálně zacházet jako s prvky matic. Speciálně je možno každou řádku matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ považovat za jednořádkovou matici (za řádkový vektor), celou matici je pak možno považovat za složenou z řádkových vektorů, tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{a}^i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$

Obdobně je možno matici $\mathbf{A}$ považovat za složenou ze sloupcových vektorů, tj.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n],$$

kde

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Obdobně jako jsme matici rozdělili vodorovnými a svislými čárami na submatice, je možno také matice rozšířit tak, že spojujeme několik matic o vhodném počtu řádků a sloupců v matici jedinou.

3.9 ZÁKLADNÍ OPERACE S MATICEMI

1. **Sčítání a odčítání** je definováno pouze **pro matice stejného typu:**

Součet (rozdíl) dvou matic stejného typu je matice téhož typu, jejíž **jednotlivé prvky se rovnají součtu (rozdílu) stejnolehlých prvků obou matic.** Tedy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \ldots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \ldots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \ldots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Např.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

2. **Matice se násobí reálným číslem (skalárem) tak, že se tímto číslem násobí každý prvek matice.** Tedy

$$k \,.\, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Např.

$$3 \,.\, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$$

Uvedené operace, jak si to čtenář sám snadno dokáže, se řídí **týmiž základními pravidly jako příslušné operace s čísly.** Platí pro ně zejména

a) zákon komutativní (záměnnosti), tj.

$$k \,.\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \,.\, k$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A};$$

b) zákon asociativní, tj.

$$k \,.\, (r \,.\, \mathbf{A}) = (k \,.\, r) \,.\, \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C};$$

c) zákon distributivní, tj.

$$(k + r) \,.\, \mathbf{A} = k \,.\, \mathbf{A} + r \,.\, \mathbf{A}$$
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \,.\, \mathbf{A} + k \,.\, \mathbf{B}$$

Dále je zřejmé, že nulová matice má při slučování matic stejný význam jako nula při slučování čísel, tj.

a) rozdíl dvou stejných matic je nulová matice,

b) přičtením nebo odečtením nulové matice se daná matice nemění:

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{A} \pm \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

3. **Transponování matic** je zvláštní operace spočívající v tom, že se **v dané matici vymění řádky za sloupce a sloupce za řádky.** Tedy z matice $\mathbf{A}$ typu $(m \,.\, n)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dostaneme transponováním matici typu $(n\,.\,m)$, tzv. matici transponovanou (označení $\mathbf{A}^T$):

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Je-li čtvercová matice souměrná, rovná se zřejmě matici k ní transponované. Podle této vlastnosti je možno konečně souměrnost matice definovat.

Násobení matic je operace podstatně odlišná od násobení čísel. Jsou-li dány dvě matice, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, je jejich součin $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$ definován jedině tehdy, má-li první matice (tj. matice stojící vlevo) tolik sloupců, kolik má druhá matice řádek.

Dříve než přejdeme k obecnému případu, probereme **násobení matice vektorem.** Součin matice typu $(m\,.\,n)$ a n-rozměrného sloupcového vektoru je m-rozměrný sloupcový vektor, jehož i-tá souřadnice se rovná skalárnímu součinu i-té řádky matice a daného vektoru.

Tedy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \dots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}$$

Jak vidíme, je součin matice a sloupcového vektoru lineární kombinací sloupců matice. Součin totiž můžeme psát i ve formě

$$b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \dots + b_n\mathbf{a}_n,$$

kde $\mathbf{a}_j$ je vektor tvořený j-tým sloupcem matice.

Všimněme si, že toto násobení není komutativní (není v opačném pořadí ani definováno).

Příklad 3.3. Abychom tomuto násobení dali ekonomickou interpretaci, předpokládejme, že podnik vyrábí 3 výrobky, na něž potřebuje 4 materiály v množstvích uvedených v tab. 3.2.

Tabulka 3.2

Druh materiálu	Spotřeba materiálu v kg na jednotku výrobku		
	A	*B*	*C*
I	50	80	120
II	40	20	30
III	15	50	5
IV	25	10	5

Tato tabulka představuje matici typu (4.3). Podle plánu má podnik vyrobit 100 jednotek výrobku *A*, 200 jednotek výrobku *B* a 50 jednotek výrobku *C*. Plán je tedy dán trojrozměrným vektorem $\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$. Celková potřeba jednotlivých materiálů bude dána součinem

$$\begin{bmatrix} 50 & 80 & 120 \\ 40 & 20 & 30 \\ 15 & 50 & 5 \\ 25 & 10 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27\,000 \\ 9\,500 \\ 11\,750 \\ 4\,750 \end{bmatrix}$$

Součin m-rozměrného řádkového vektoru a matice typu $(m\,.\,n)$ je n-rozměrný řádkový vektor, jehož j-tá souřadnice se rovná skalárnímu součinu daného vektoru a j-tého sloupce matice, tj.

$$[c_1, c_2, \dots, c_m] . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}\right]$$

Součin řádkového vektoru a matice lze opět psát jako lineární kombinaci jednotlivých řádků matice, a to ve formě

$$c_1\mathbf{a}^1 + c_2\mathbf{a}^2 + \dots + c_m\mathbf{a}^m,$$

kde $\mathbf{a}^i$ je vektor tvořený i-tým řádkem matice.

Jsou-li např. známy ceny jednotlivých materiálů v předchozím příkladě a činí-li třeba 20, 10, 50, popř. 40 Kčs za jednotku, lze materiálové náklady na jednotku jednotlivých výrobků vypočíst takto:

$$[20, 10, 50, 40] . \begin{bmatrix} 50 & 80 & 120 \\ 40 & 20 & 30 \\ 15 & 50 & 5 \\ 25 & 10 & 5 \end{bmatrix} = [3\,150, 4\,700, 3\,150]$$

1000
400
750
1000
3150

Je zřejmé, že má smysl také postupné provedení obou operací násobení matice $\mathbf{A}$ typu $(m\,.\,n)$ zprava n-rozměrným sloupcovým vektorem $\mathbf{b}$ a zleva m-rozměrným řádkovým vektorem $\mathbf{c}$. Přitom, jak se snadno přesvědčíme, je toto násobení asociativní, tj. pořadí, ve kterém obě operace provádíme, je lhostejné:

$$\mathbf{c}\,.\,(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{b}) = (\mathbf{c}\,.\,\mathbf{A})\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{c}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{b}$$

Výsledkem tohoto násobení je skalár. Celkové materiálové náklady na plánovanou výrobu v předchozím příkladě lze vypočítat např. takto:

$$[20, 10, 50, 40] \,.\begin{bmatrix} 50 & 80 & 120 \\ 40 & 20 & 30 \\ 15 & 50 & 5 \\ 25 & 10 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} = 1\,412\,500$$

Obecně se **násobení matic** definuje takto:

Je-li matice A typu $(m \,.\, n)$ **a matice B typu** $(n \,.\, r)$, **pak jejich součin A . B = C je matice typu** $(m \,.\, r)$. **Přitom obecný prvek součinu** c_{ij} (tj. prvek v průsečíku i-té řádky a j-tého sloupce) **je součtem ze součinů prvků** i**-té řádky matice A a příslušných prvků** j**-tého sloupce matice B**. Jinými slovy prvek c_{ij} součinu **A . B** je skalárním součinem i-té řádky matice **A** a j-tého sloupce matice **B**. Jestliže tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ir} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ir} \end{bmatrix}$$

Poznámka: Ukažte, že skalární součin dvou vektorů je zvláštním případem součinu dvou matic.

Příklady:

3.4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

3.5

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 40 & 21 \\ 33 & 5 \\ 9 & -12 \end{bmatrix}$$

Při násobení matic platí také některá pravidla násobení čísel. Tak např. si čtenář může snadno dokázat, že pro násobení matic platí **zákon asociativní,** tj.

$$\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}),$$

a **zákon distributivní,** tj.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \,.\, \mathbf{C} = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C} + \mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} + \mathbf{A} \,.\, \mathbf{C}$$

Násobení matic **není však komutativní,** tj. obecně neplatí

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$$

Tak např. v součinu uvedeném v posledním příkladě nelze pořadí činitelů vůbec obrátit, neboť podle definice násobení matic součin v opačném pořádku neexistuje.

Musíme proto rozlišovat násobení maticí zleva a násobení zprava.

Příklady:

3.6

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \text{ ale}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

3.7

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ale}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3.8

$$[2, 1, 4] \,.\, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 15 \text{ (skalární součin vektorů), ale}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} . \,[2, 1, 4] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ale}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poslední příklad ukazuje další odlišnost součinu matic od součinu reálných čísel. Součin dvou matic se může rovnat nulové matici, i když žádná z nich není nulová matice.

Násobení jednotkovou maticí nechává danou matici beze změny, a to jak násobení zprava, tak i násobení zleva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Je tedy násobení čtvercové matice jednotkovou maticí záměnné.

Jak je vidět, má jednotková matice při násobení matic podobnou úlohu jako jednotka při násobení čísel.

Při násobení matic lze často s výhodou využít možnosti rozdělení matic na submatice. Tak např. máme-li dvě matice,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

pak místo toho, abychom stanovili přímo součin $\mathbf{A} . \mathbf{B}$, je vhodnější obě matice rozdělit na submatice podle schématu

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 5 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rr} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$

a počítat podle vzorce (jehož správnost si ověří čtenář sám)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{array}\right]$$

Protože $\mathbf{A}_{12}$ je jednotková matice a $\mathbf{A}_{22}$ a $\mathbf{B}_{12}$ jsou matice nulové, dostaneme tvar

$$\mathbf{A} . \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|rr} 33 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \\ \hline -3 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rozdělení obou matic musí být pochopitelně takové, aby násobení příslušných submatic bylo možné. Zejména musí odpovídat rozdělení sloupců matice na levé straně obdobnému rozdělení řádků matice na straně pravé.

Abychom ukázali, jak je možno ekonomicky interpretovat násobení matic, vezměme tento příklad:

Příklad 3.10. Podnik montuje čtyři výrobky z pěti různých součástek vlastní výroby. Spotřeba součástek je dána v tab. 3.3.

Tabulka 3.3

Druh součástek	Potřeba součástek v ks na jednotku výrobku			
	A	*B*	*C*	*D*
I	2	3	1	5
II	5	5	2	5
III	4	5	8	4
IV	8	2	4	2
V	1	4	4	2

Označme tabulku 3.3 jako matici $\mathbf{B}$.

Spotřeba různých činitelů na jednotlivé součástky je uvedena v tab. 3.4.

Označme ji jako matici $\mathbf{A}$.

Součin $\mathbf{A} . \mathbf{B}$ je maticí typu (3.4), jejíž jednotlivé sloupce udávají spotřebu jednotlivých činitelů na jednotlivé konečné výrobky:

$$\mathbf{A} . \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 50 & 40 & 10 \\ 5 & 3 & 10 & 2 & 2 \\ 50 & 40 & 80 & 20 & 25 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 & 580 & 680 & 550 \\ 83 & 92 & 107 & 88 \\ 805 & 890 & 950 & 860 \end{bmatrix}$$

Tabulka 3.4

Činitel	Spotřeba činitelů na jeden kus součástky				
	I	II	III	IV	V
Odlitky v kg	20	30	50	40	10
Práce v hodinách	5	3	10	2	2
Režie v Kčs	50	40	80	20	25

Na výrobek *A* je podle toho třeba 720 kg odlitků, 83 hodin práce (bez montáže) a 805 Kčs režijních nákladů (rovněž bez montáže) atp.

3.10 HODNOST MATICE

V článku 3.5 jsme zavedli pojem hodnosti soustavy vektorů jako maximálního počtu lineárně nezávislých vektorů, které lze v dané soustavě vybrat. Protože sloupce matice i její řádky tvoří soustavu vektorů, jsme zřejmě oprávněni mluvit o sloupcové, resp. řádkové hodnosti matice. Dá se však dokázat, že sloupcová a řádková hodnost matice jsou stejné; mluvíme pak prostě o hodnosti matice.

Abychom to dokázali, předpokládejme, že u matice $\mathbf{A}$ typu $(m\,.\,n)$ se hodnost sloupcová rovná s a hodnost řádková $\check{r}$. Můžeme tedy ze sloupců matice vybrat s lineárně nezávislých. Dejme tomu, že právě prvních s sloupců tvoří lineárně nezávislou soustavu. Můžeme z nich utvořit matici

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s]$$

typu $(m\,.\,s)$.

Všechny sloupce matice $\mathbf{A}$ lze vyjádřit jako lineární kombinace těchto s sloupcových vektorů. Obecně tedy můžeme psát

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_1\,.\,\mathbf{b}_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

kde $\mathbf{b}_i$ je s-rozměrný sloupcový vektor $[b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{is}]$.

Lze tedy matici $\mathbf{A}$ psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\mathbf{A}_1\mathbf{b}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{A}_1\mathbf{b}_n] = \\ &= \mathbf{A}_1\,.\,[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n] = \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\,;\end{aligned}$$

zde

$$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]$$

je matice typu $(s\,.\,n)$.

Rozklad matice $\mathbf{A}$ na součin $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ lze zřejmě interpretovat také tak, že každý řádek matice $\mathbf{A}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace s řádků matice $\mathbf{A}_2$. Protože podle předpokladu lze v matici $\mathbf{A}$ vybrat $\check{r}$ lineárně nezávislých řádků (řádková hodnost), musí platit, že

$$\check{r} \leqq s$$

Celý dosavadní postup lze obrátit. Začneme-li s tím, že vyjádříme jednotlivé řádky matice $\mathbf{A}$ jako lineární kombinace $\check{r}$ řádků, dospějeme obdobnou úvahou k závěru, že

$$s \leqq \check{r}\,;$$

z toho nutně plyne, že

$$s = \check{r}\,,$$

tj. že řádková a sloupcová hodnost jsou stejné, jak jsme tvrdili výše.

Rovná se tedy **hodnost matice** (h) **maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků nebo sloupců,** které lze v dané matici vybrat.

Z uvedeného důkazu bezprostředně plyne, že hodnost matice typu $(m\,.\,n)$ nemůže být větší než menší z čísel m a n.

Čtvercová matice n-tého řádu, jejíž hodnost se rovná právě n (tj. počtu řádků nebo sloupců), se nazývá maticí **regulární.** Je-li hodnost čtvercové matice n-tého řádu menší než n, nazývá se **singulární.**

3.11 INVERZE MATIC

U reálných čísel (skalárů) definujeme převratnou (reciprokou) hodnotu k číslu a různému od nuly rovnicí

$$ax = 1$$

Číslo x, které násobeno číslem a dává jednotku, se nazývá převratnou hodnotou čísla a a značí se symbolem a^{-1}. Převratná hodnota je definována ke každému číslu různému od nuly.

Podobně definujeme u regulárních čtvercových matic matici inverzní.

Inverzní maticí k regulární čtvercové matici $\mathbf{A}$ nazýváme tu matici, jejíž součin s maticí $\mathbf{A}$ dává jednotkovou matici.

S ohledem na nekomutativnost násobení matic zde ovšem vyvstává otázka, zda k matici $\mathbf{A}$ neexistují dvě inverzní matice, jedna pravá inverzní matice $\mathbf{X}$, definovaná rovnicí

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}\,,$$

a jedna levá inverzní matice $\mathbf{Y}$, definovaná rovnicí

$$\mathbf{YA} = \mathbf{I}.$$

Snadno však dokážeme, že obě inverzní matice musí být stejné. Násobíme-li totiž první z definujících rovnic zleva inverzní maticí $\mathbf{Y}$, dostaneme

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{YI} = \mathbf{Y}$$

a podobně, násobíme-li druhou z definujících rovnic zprava maticí $\mathbf{X}$, dostaneme

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{IX} = \mathbf{X};$$

z toho bezprostředně plyne, že

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X},$$

tj. že k matici $\mathbf{A}$ existuje pouze jedna inverzní matice, kterou budeme dále označovat $\mathbf{A}^{-1}$. Násobení touto inverzní maticí je zřejmě komutativní.

Například k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

je inverzní

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$

neboť

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

K diagonální matici

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

je inverzní

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix},$$

neboť

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obecně inverzní maticí k diagonální matici, jež má vesměs nenulové diagonální prvky, je opět diagonální matice téhož řádu, jejíž diagonální prvky jsou reciprokými hodnotami diagonálních prvků původní matice. Jestliže tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & k_n \end{bmatrix}, \quad \text{pak} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 1/k_n \end{bmatrix}$$

V obecném případě je inverze matic (tj. výpočet inverzní matice) úkon velmi složitý a pracný; vrátíme se k ní později (viz čl. 3.14).

3.12 LINEÁRNÍ ROVNICE

Řešením soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.3}$$

nebo též vektorem řešení je každá **soustava** n **čísel** $x_1, x_2, \dots, x_n$, **která splňuje současně všech** m **rovnic.**

Soustava rovnic se nazývá homogenní, jestliže

$$b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m);$$

jinak je soustava nehomogenní.

V souvislosti s lineárními rovnicemi nás zajímají dvě otázky, a to:

1. kdy má soustava lineárních rovnic vůbec řešení a kolik jich má,
2. jak nalézt řešení soustavy lineárních rovnic.

Zabývejme se nejdříve druhou otázkou, tj. praktickou otázkou, jak řešit soustavu lineárních rovnic.

Existuje obecná metoda řešení soustavy lineárních rovnic; je to metoda úplné eliminace.

Metoda úplné eliminace spočívá v tom, že dovolenými změnami se jednotlivé neznámé postupně vylučují ze všech rovnic kromě jedné. Ukážeme postup na příkladech:

Příklad 3.11. Mějme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 &= 74 \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 &= 61 \end{aligned}$$

Jako první krok eliminace vyloučíme neznámou x_1 z druhé a třetí rovnice tím, že odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a rovněž odečteme první rovnici od třetí. Dostaneme tak soustavu rovnic, v níž neznámá x_1 se vyskytuje pouze v jedné (první) rovnici:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 25 \\ 3x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 4x_2 + 10x_3 &= 36 \end{aligned}$$

Soustava rovnic, kterou jsme tak dostali, je ekvivalentní původní soustavě, tj. má totéž řešení.

V dalším kroku můžeme vyloučit x_2 z první a třetí rovnice. Odečteme za tím účelem druhou rovnici od první, dělíme pak druhou rovnici třemi a čtyřnásobek takto získané rovnice odečteme od třetí.

Dostaneme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad -2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Konečně eliminujeme x_3 z první a druhé rovnice tak, že přičteme třetí rovnici k první a od druhé rovnice odečteme třetí. Abychom dostali všude jednotkové koeficienty, dělíme ještě poslední rovnici dvěma. Dostaneme tento konečný tvar naší soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 5 \\ x_2 \quad &= 4 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Po těchto třech krocích náš postup končí. Poslední tvar rovnic nám již bezprostředně dává řešení, a to řešení jediné,

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 2$$

Dovolené úkony, o kterých jsme mluvili výše, jsou násobení (dělení) obou stran rovnice libovolným číslem (kromě nuly) a sčítání dvou rovnic. Postupným prováděním obou úkonů dostáváme lineární kombinace původních rovnic.

Příklad 3.12. Pozměňme poněkud předchozí příklad, a to změnou dvou koeficientů v třetí rovnici:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 &= 74 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 36 \end{aligned}$$

Stejným postupem jako u předchozího příkladu dostaneme tyto kroky:

I. krok
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 25 \\ 3x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_2 + 6x_3 &= 11 \end{aligned}$$

II. krok
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad -2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 0 &= -13 \end{aligned}$$

Po dvou krocích jsme zde dospěli k rozpornému výsledku. Protože postup byl správný, usuzujeme, že daná soustava rovnic nemá vůbec řešení, že rovnice jsou nekonzistentní.

Příklad 3.13. Pozměňme ještě absolutní člen první rovnice z 25 na 38. Dostaneme tuto soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 38 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 &= 74 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 36 \end{aligned}$$

Po dvou krocích dostaneme tento výsledek:

I. krok
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 38 \\ 3x_2 + 6x_3 &= -2 \\ 3x_2 + 6x_3 &= -2 \end{aligned}$$

II. krok
$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 2x_3 &= 40 \\ x_2 + 2x_3 &= -2/3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Po dvou krocích jedna z rovnic úplně vymizela. Zbývající dvě můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= 40 + 2x_3 \\ x_2 &= -2/3 - 2x_3 \end{aligned}$$

Za x_3 zde můžeme dosadit jakékoli číslo; dostaneme vždy řešení naší soustavy rovnic. Je tedy v daném případě řešení nekonečně mnoho. Tři rovnice v příkladě jsou lineárně závislé; jednu z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Jinými slovy, jedna ze tří rovnic je zbytečná.

Příklad 3.14. Metody úplné eliminace lze použít i v případě, kdy počet rovnic soustavy se nerovná počtu neznámých. Jako příklad vezmeme tuto soustavu tří rovnic o pěti neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 28x_4 + 12x_5 &= 74 \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 26x_4 + 10x_5 &= 61 \end{aligned}$$

Po třech krocích obdobných jako v předchozích příkladech dostaneme

I. krok

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 25 \\ 3x_2 + 6x_3 + 12x_4 \qquad &= 24 \\ 4x_2 + 10x_3 + 18x_4 + 4x_5 &= 36 \end{aligned}$$

II. krok

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad &= 8 \\ 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 4 \end{aligned}$$

III. krok

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_4 + 10x_5 &= 5 \\ x_2 \qquad + 2x_4 - 4x_5 &= 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Tím jsme původní soustavu tří rovnic o pěti neznámých vyřešili podle prvních tří neznámých. Převedeme-li totiž x_4 a x_5 na pravou stranu, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2x_4 - 10x_5 \\ x_2 &= 4 - 2x_4 + 4x_5 \\ x_3 &= 2 - x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

Za x_4 a x_5 můžeme zde dosadit jakákoli čísla a dostaneme nekonečně mnoho řešení soustavy.

Eliminační postup jsme ovšem nemuseli začít u x_1 a nemuseli jsme eliminovat právě první tři neznámé.

U uvedených příkladů se zatím ukazuje, že soustava lineárních rovnic nemusí mít vůbec řešení, může mít řešení jediné anebo nekonečně mnoho řešení. Uvidíme dále, že obecně existují jen tyto tři možnosti.

Máme-li soustavu h lineárně nezávislých rovnic o n neznámých, $h < n$, je konečným výsledkem eliminačního procesu transformace soustavy na tvar, v němž h neznámých, které nazýváme základními (bazickými), je vyjádřeno pomocí $n - h$ ostatních neznámých, které nazýváme nezákladními (nebazickými).*)

---

*) Předpokládá se, že soustava je v uvedených h základních neznámých řešitelná (čl. 3.13).

Tento tvar nazveme dále **kanonickým tvarem soustavy** lineárních rovnic. V tomto tvaru každá rovnice obsahuje jednu a jen jednu základní neznámou.

Převedením na kanonický tvar je soustava rovnic již řešena. Za nezákladní neznámé je možno dosadit libovolné hodnoty a z kanonického tvaru pak dostaneme bezprostředně i hodnoty základních neznámých.

Protože za $n - h$ neznámých lze dosadit libovolné hodnoty, říkáme také, že soustava rovnic má $n - h$ stupňů volnosti.

Dosadíme-li za nezákladní neznámé speciálně nuly, dostaneme tzv. **základní řešení** soustavy lineárních rovnic. V základním řešení podle toho nemůže mít více než h neznámých (počet lineárně nezávislých rovnic) nenulové hodnoty a nejméně $n - h$ neznámých se rovná nule.

Přesněji, jestliže v kanonické soustavě jsou absolutní členy vesměs nenulové, pak v příslušném základním řešení má přesně $n - h$ neznámých hodnotu nulovou a přesně h neznámých hodnotu nenulovou (řešení **nedegenerované**). Jestliže naopak některý z absolutních členů v kanonické soustavě se rovná nule, pak v příslušném základním řešení některé ze základních neznámých mají hodnotu nulovou, tj. neznámých s hodnotou nenulovou bude méně než h (řešení **degenerované**).

Soustava rovnic může ovšem mít více základních řešení, a to tolik, kolika způsoby lze soustavu převést na kanonický tvar, tj. nejvýše tolik, kolika způsoby je možno z n neznámých vybrat h (počet lineárně nezávislých rovnic), tj. nejvýše $\binom{n}{h}$.

3.13 ZÁKLADNÍ VĚTY O ŘEŠITELNOSTI SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustavu lineárních rovnic můžeme též psát jako jedinou rovnici vektorovou

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}, \tag{3.4a}$$

kde $\mathbf{a}_i$ je vektor koeficientů u neznámé x_i, $\mathbf{b}$ je vektor absolutních členů.

Soustavu lze psát též ve formě rovnice maticové

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

anebo stručně

$$\mathbf{A} . \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.5a}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice koeficientů neznámých, $\mathbf{x}$ je vektor neznámých.

Je zřejmé, že řešit soustavu lineárních rovnic je totéž jako vyjádřit vektor absolutních členů jako lineární kombinaci vektorů koeficientů.

Dejme tomu, že hodnost matice koeficientů je h. Připojíme-li k této matici jako další sloupec vektor absolutních členů, dostaneme tzv. rozšířenou matici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$. Připojením nového sloupce se hodnost matice pochopitelně nemůže snížit.

Hodnost rozšířené matice zůstane buď stejná jako u matice původní, jestliže připojený vektor je lineární kombinací vektorů koeficientů, anebo se zvýší o jednotku, jestliže se připojený vektor nedá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů koeficientů. Z toho bezprostředně plyne tato věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic:

Soustava lineárních rovnic má řešení, jestliže matice koeficientů a rozšířená matice mají stejnou hodnost. Soustava nemá řešení, jestliže hodnost rozšířené matice je větší než hodnost matice koeficientů.

Má-li soustava rovnic řešení, zbývá ještě otázka, kolik řešení má. Abychom tuto otázku zodpověděli, předpokládejme, že matice koeficientů $\mathbf{A}$ a rozšířená matice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mají stejnou hodnost h, a tedy soustava má řešení. Přeřaďme neznámé tak, aby právě prvních h sloupců tvořilo lineárně nezávislou soustavu. Pak podle předpokladu je možno všechny sloupce matice i vektor absolutních členů jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvních h sloupců matice $\mathbf{A}$, tj. můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h] \,.\, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_h, \mathbf{d}_{h+1}, \ldots, \mathbf{d}_n], \\ \mathbf{b} &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h] \,.\, \mathbf{c} \end{aligned} \tag{3.6}$$

nebo stručněji

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1[\mathbf{I}_h \mid \mathbf{D}], \\ \mathbf{b} &= \mathbf{A}_1\mathbf{c}, \end{aligned} \tag{3.6a}$$

kde $\mathbf{A}_1$ je matice typu $(m \,.\, h)$, utvořená z prvních h vektorů matice koeficientů, $\mathbf{I}_h$ je jednotková matice řádu h, $\mathbf{D}$ je matice typu $(h \,.\, n - h)$ a $\mathbf{c}$ je h-rozměrný vektor.

Soustavu lineárních rovnic můžeme tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{A}_1[\mathbf{I}_h \mid \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{c} \tag{3.7}$$

Protože $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$ jednoznačně, plyne z uvedeného, že musí platit také

$$[\mathbf{I}_h \mid \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

To však už máme řešení (resp. máme soustavu rovnic v kanonickém tvaru). Stačí vektor $\mathbf{x}$ rozdělit na dvě části: na $\mathbf{x}^{(1)}$ – obsahující prvních h souřadnic, a na $\mathbf{x}^{(2)}$ – obsahující zbývajících $n - h$ souřadnic. Dostaneme

$$[\mathbf{I}_h \mid \mathbf{D}]\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

a po vynásobení

$$\mathbf{I}_h\,\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{D}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{c}$$

Protože

$$\mathbf{I}_h\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_h \end{bmatrix},$$

pak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_h \end{bmatrix} = \mathbf{c} - \mathbf{D}\mathbf{x}^{(2)} \tag{3.8}$$

Za souřadnice vektoru $\mathbf{x}^{(2)}$ můžeme dosadit libovolné hodnoty; dostaneme tak jednotlivá řešení soustavy.

Z (3.8) plyne bezprostředně, že řešení soustavy lineárních rovnic je jednoznačné, platí-li $h = n$, tj. rovná-li se hodnost matice koeficientů (i rozšířené matice) počtu neznámých (v tom případě totiž $\mathbf{x}^{(2)}$ odpadá vůbec); jinými slovy – jsou-li sloupce matice koeficientů lineárně nezávislé. Jinak, tj. jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení.

Tak např. v soustavě lineárních rovnic (příklad 3.14) jsou první tři vektory koeficientů lineárně nezávislé, a matice koeficientů má tedy hodnost 3 (větší nemůže být, má jenom tři řádky). Lze tedy všechny sloupce rozšířené matice vyjádřit jako lineární kombinace prvních tří sloupců. Platí

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & 7 & 14 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \cdot \Bigg[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{I}_3} \Bigg| \underbrace{\begin{matrix} -2 & 10 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{matrix}}_{\mathbf{D}}\Bigg]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 14 \\ 1 & 7 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Soustavu rovnic příkladu 3.14 můžeme tedy psát ve tvaru

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix};$$

z toho pak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

což je právě řešení nalezené eliminační metodou.

Můžeme tedy shrnout:

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

1. má řešení, jestliže hodnost matice koeficientů a hodnost rozšířené matice jsou stejné;

a) má řešení jediné, jestliže tato hodnost se rovná počtu neznámých n, tj. jestliže sloupce matice koeficientů jsou lineárně nezávislé;

b) má řešení nekonečně mnoho, jestliže hodnost matice koeficientů je menší než počet neznámých;

2. nemá řešení, jestliže hodnost rozšířené matice je větší než hodnost matice koeficientů.

Viděli jsme zároveň, že pomocí metody úplné eliminace lze zjistit, který z těchto případů nastává.

Z uvedené základní věty o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic plynou bezprostředně tyto důsledky:

a) Soustava n lineárních rovnic o n neznámých má jednoznačné řešení tehdy, a jen tehdy, je-li matice koeficientů regulární.

b) Soustava n lineárních homogenních rovnic o n neznámých má vždy řešení, a to:

– jenom řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tzv. triviální řešení, jestliže matice koeficientů je regulární,

– i netriviální řešení, jestliže matice koeficientů je singulární.

3.14 TRANSFORMACE VEKTORŮ

V čl. 3.5 jsme uvedli, že každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů kterékoli báze. Pro různé výpočty je důležitá otázka, jak určit souřadnice vektoru v dané bázi, popř. určit, jak se změní souřadnice vektoru, tj. jak se transformuje vektor, mění-li se báze. Prakticky se tyto transformace provádějí postupně, po krocích, tak že se v každém kroku vyměňuje jediný vektor v bázi. Řetězem takových elementárních transformací lze přejít z dané báze na jakoukoli jinou bázi.

Předpokládejme, že vektory

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$$

tvoří bázi n-rozměrného euklidovského prostoru E_n. Nenulový vektor $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů ve formě

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \ldots + b_k\mathbf{a}_k + \ldots + b_n\mathbf{a}_n \tag{3.9}$$

($b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou souřadnicemi vektoru $\mathbf{b}$ v dané bázi). Je otázkou, zda je možno některý vektor báze nahradit vektorem $\mathbf{b}$ a jak se při této změně transformují souřadnice ostatních vektorů.

Pokud jde o první otázku, je možno nahradit kterýkoli vektor báze $\mathbf{a}_i$ vektorem $\mathbf{b}$ a dostat tak novou bázi, jestliže příslušná souřadnice $b_i \neq 0$.

Předpokládejme pro určitost, že $b_k \neq 0$.

Pak soustava vektorů

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$$

tvoří rovněž bázi E_n. Že tomu tak skutečně je, je nasnadě. Kdyby totiž hodnost uvedené soustavy byla menší než n, znamenalo by to, že vektor $\mathbf{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $n - 1$ vektorů

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$$

v rozporu s předpokladem, že $b_k \neq 0$.

Nazveme pro stručnost vektor $\mathbf{a}_k$, jejž z báze vylučujeme, vylučovaným (vystupujícím) vektorem a vektor $\mathbf{b}$, který ho nahrazuje, zařazovaným (vstupujícím) vektorem. Souřadnici b_k nazveme klíčovým prvkem transformace.

Nyní lze snadno určit, jak se touto změnou transformují souřadnice libovolného vektoru

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k + \ldots + c_n\mathbf{a}_n;$$

stačí, když zde $\mathbf{a}_k$ nahradíme výrazem

$$\mathbf{a}_k = -\frac{1}{b_k} b_1\mathbf{a}_1 - \frac{1}{b_k} b_2\mathbf{a}_2 - \ldots + \frac{1}{b_k}\mathbf{b} - \ldots - \frac{1}{b_k} b_n\mathbf{a}_n,$$

vyplývajícím z (3.9), a shrneme. Dostaneme, že

$$\mathbf{c} = \left(c_1 - \frac{c_k}{b_k} b_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(c_2 - \frac{c_k}{b_k} b_2\right)\mathbf{a}_2 + \ldots + \frac{c_k}{b_k}\mathbf{b} + \ldots + \left(c_n - \frac{c_k}{b_k} b_n\right) . \mathbf{a}_n \tag{3.10}$$

Tím jsou transformované souřadnice vektoru $\mathbf{c}$ určeny.

Tato elementární transformace se v podstatě shoduje s krokem eliminační metody. Je to bezprostředně vidět, upravíme-li transformaci do tabulkové formy:

Tabulka 3.5a

Báze	Vektory	
	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}_1$	b_1	c_1
$\mathbf{a}_2$	b_2	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_k$	b_k	c_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_n$	b_n	c_n

Tabulka 3.5b

Báze	Vektory	
	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
$\mathbf{a}_1$	0	$c_1 - \frac{c_k}{b_k} b_1$
$\mathbf{a}_2$	0	$c_2 - \frac{c_k}{b_k} b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}$	1	$\frac{c_k}{b_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}_n$	0	$c_n - \frac{c_k}{b_k} b_n$

V tab. 3.5a jsou uvedeny souřadnice vektorů $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ v původní bázi, v tab. 3.5b souřadnice týchž vektorů v nové bázi, v níž místo vektoru $\mathbf{a}_k$ je zařazen vektor $\mathbf{b}$. V této bázi se pochopitelně vektor $\mathbf{b}$ transformuje na jednotkový vektor. Pro ilustraci provedeme transformace soustavy vektorů koeficientů z příkladu 3.14.

Tabulka 3.6a

Báze	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	1	0	0	1	3	4	8	6	25
$\mathbf{e}_2$	0	1	0	2	9	14	28	12	74
$\mathbf{e}_3$	0	0	1	1	7	14	26	10	61

Pro názornost je vpředu v tab. 3.6a až d připsána i původní báze, tj. soustava tří jednotkových vektorů.

Nyní můžeme zařadit v tab. 3.6b do báze vektor $\mathbf{a}_1$ místo $\mathbf{e}_1$. Tato výměna je možná, neboť koeficient $a_{11} = 1 \neq 0$:

Tabulka 3.6b

Báze	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	1	3	4	8	6	25
$\mathbf{e}_2$	—2	1	0	0	3	6	12	0	24
$\mathbf{e}_3$	—1	0	1	0	4	10	18	4	36

Výsledek je zřejmě týž jako u prvního kroku eliminační metody.

Zařaďme dále (v tab. 3.6c a d) do báze vektor $\mathbf{a}_2$ místo $\mathbf{e}_2$ a potom vektor $\mathbf{a}_3$ místo $\mathbf{e}_3$:

Tabulka 3.6c

Báze	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	3	—1	0	1	0	—2	—4	6	1
$\mathbf{a}_2$	—2/3	1/3	0	0	1	2	4	0	8
$\mathbf{e}_3$	5/3	—4/3	1	0	0	2	2	4	4

Tabulka 3.6d

Báze	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	14/3	—7/3	1	1	0	0	—2	10	5
$\mathbf{a}_2$	—7/3	5/3	—1	0	1	0	2	—4	4
$\mathbf{a}_3$	5/6	—2/3	1/2	0	0	1	1	2	2

(3.11)

Uvedené tři elementární transformace jsou shodné s jednotlivými kroky eliminační metody provedenými na str. 78, s tím rozdílem, že jsme zde nevypisovali rovnice, ani symboly neznámých – jen příslušné vektory*) a že jsme připsali původní jednotkovou bázi, tj. jednotkovou matici (což nebylo nezbytné).

Každý krok eliminačního procesu lze tedy **interpretovat jako elementární transformaci soustavy vektorů koeficientů a vektoru absolutních členů,** tj. celé rozšířené matice.

V zásadě je možno transformaci soustavy vektorů provést i jinak, nejen jako řetěz elementárních transformací. Můžeme totiž násobit každý vektor zleva jistou maticí, tzv. maticí transformace. Protože v transformované soustavě tvoří báze jednotkovou matici, je zřejmé, že matice transformace je inverzní maticí k dané bázi (blíže viz B. Korda: Učebnice lineárního programování. Praha, SNTL 1962). Např. v (3.11) tvoří bázi soustava vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Inverzní matice k této bázi, tedy matice transformace, je

$$\begin{bmatrix} 14/3 & -7/3 & 1 \\ -7/3 & 5/3 & -1 \\ 5/6 & -2/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Násobíme-li touto maticí zleva jednotlivé vektory v tab. 3.6a, dostaneme bezprostředně soustavu (3.11).

Této interpretace můžeme mimo jiné využít k velmi účinné kontrole výsledků úplné eliminace.

V článku 3.12 jsme se zabývali řešením soustav lineárních rovnic. Ukázali jsme, že eliminační metodou je možno soustavu rovnic převést na kanonický tvar, a tím získat bezprostředně základní řešení. Z vývodů čl. 3.12 vyplývá, že převést soustavu rovnic na kanonický tvar znamená transformovat rozšířenou matici soustavy tak, aby matice koeficientů obsahovala jednotkovou bázi (tj. tak, aby všechny sloupce matice byly vyjádřeny v bázi vybrané z vektorů koeficientů). Základní řešení je pak dáno vyjádřením vektoru absolutních členů v této bázi.**)

---

*) Je dobré v této souvislosti si uvědomit, že řešení soustavy rovnic závisí pouze na koeficientech a nezávisí na označení neznámých.

**) Obsahuje-li výchozí matice koeficientů jednotkovou bázi, máme bezprostředně základní řešení.

Základních řešení je ovšem, jak jsme již uvedli, mnoho a v lineárním programování nás bude zajímat, jak z jednoho řešení přejít na řešení jiné. Víme nyní, že nejde o nic jiného, než o změnu báze, již můžeme uskutečnit pomocí elementárních transformací, tj. postupnou výměnou jednoho z vektorů báze.

Tak z (3.11) vyplývá základní řešení [5, 4, 2, 0, 0], tj. řešení se základními proměnnými x_1, x_2, x_3, resp. s vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ v bázi. Postupnou výměnou těchto vektorů za jiné můžeme dostat kterékoli další základní řešení. Tak např. vyměníme-li $\mathbf{a}_1$ za $\mathbf{a}_5$, zařadíme tím do řešení x_5 místo x_1. Příslušnou transformaci matice (3.11) provedeme opět pomocí eliminační metody; dostaneme

Tabulka 3.6e

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
0,1	0	0	—0,2	1	0,5
0,4	1	0	1,2	0	6
—0,2	0	1	1,4	0	1

což dává základní řešení

$$[0; 6; 1; 0; 0{,}5]$$

Při řešení soustav lineárních rovnic se může vyskytnout zvláštní případ: v některém základním řešení se jedna nebo několik základních proměnných rovná nule. Jinými slovy to znamená, že se vektor absolutních členů dá vyjádřit jako lineární kombinace menšího počtu vektorů koeficientů, než je hodnost soustavy. V takových případech se říká, že je úloha degenerovaná (viz čl. 3.12).

Tak např. změníme-li absolutní člen v poslední rovnici soustavy (v příkladě 3.14) z 61 na 57, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 28x_4 + 12x_5 &= 74, \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 26x_4 + 10x_5 &= 57 \end{aligned}$$

která je degenerovaná. Soustava má totiž, stejně jako původní soustava, hodnost 3 (vždyť se matice koeficientů nezměnila), avšak vektor absolutních členů se dá vyjádřit jako lineární kombinace dvou prvních vektorů koeficientů; platí totiž

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 74 \\ 57 \end{bmatrix}$$

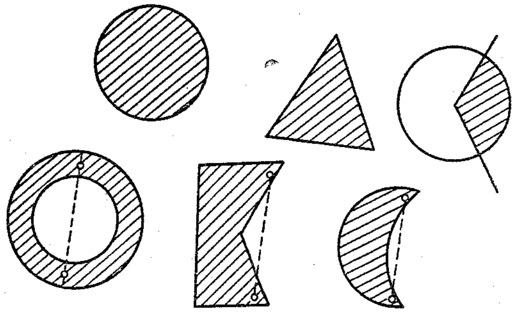
Řešíme-li tuto soustavu metodou úplné eliminace, dostaneme po dvou krocích tuto soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 \quad &= 8 \\ 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Ať už eliminujeme v dalším kroku kteroukoli neznámou, dostaneme zřejmě řešení [1, 8, 0, 0, 0], tedy základní řešení s neúplným počtem nenulových souřadnic. Později poznáme, že degenerace může působit určité potíže při řešení úloh lineárního programování.

3.15 Konvexní množiny

Množinu bodů v rovině nebo v prostoru nazýváme množinou **konvexní (vypuklou), patří-li do ní spojnice kterýchkoli dvou bodů této množiny.** Konvexní množinou je např. celá rovina, první kvadrant, prázdná množina, množina obsahující jediný bod, množina bodů kruhu, trojúhelníku nebo obdélníku. Množiny bodů v mezikruží nebo v mnohoúhelníku, uvedené na obrazci, nejsou konvexní, neboť, jak je vidět na obr. 3.7, je u těchto množin možno nalézt takové dvojice bodů, jejichž spojnice neleží celá v uvedené množině. Podobně v trojrozměrném prostoru jsou konvexními množinami koule, kulová úseč, krychle aj. Není však konvexní např. dvojkužel.



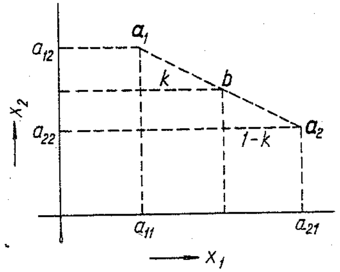
Obr. 3.7

Abychom pojem konvexity mohli zobecnit na vícerozměrné prostory, všimněme si, jak lze určit spojnici dvou bodů. Mějme v rovině dva body, $\mathbf{a}_1^T = [a_{11}, a_{12}]$ a $\mathbf{a}_2^T = [a_{21}, a_{22}]$; nechť libovolný bod $\mathbf{b}^T = [b_1, b_2]$ na jejich spojnici dělí vzdálenost mezi oběma body v poměru $k : (1 - k)$, kde $0 < k < 1$. Potom souřadnice bodu $\mathbf{b}$ se rovnají, jak je zřejmé z obr. 3.8:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11} + k(a_{21} - a_{11}) = (1 - k)\, a_{11} + k a_{21} \\ b_2 &= a_{12} - k(a_{12} - a_{22}) = (1 - k)\, a_{12} + k a_{22} \end{aligned} \tag{3.12}$$

nebo stručně $\mathbf{b} = (1 - k)\,\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2$. Jinými slovy, $\mathbf{b}$ je konvexní kombinací $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ (čl. 3.4).

Snadno se dá dokázat také opak; každá konvexní kombinace bodů $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$, tj. každý bod $(1 - k)\,\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2$, kde $0 \leqq k \leqq 1$,*) leží totiž na jejich spojnici. Nabývá-li k všech hodnot mezi nulou a jednotkou, dostaneme všechny body této spojnice. Představuje tedy množina konvexních kombinací dvou bodů spojnici těchto bodů.



Obr. 3.8

Totéž se dá dokázat pro body v trojrozměrném prostoru.

Nabývá-li k jakýchkoli hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, pak množina bodů

$$(1 - k)\,\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2$$

představuje zřejmě přímku určenou body $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Nabývá-li k jenom nezáporných nebo jenom nekladných hodnot, představuje uvedená množina polopřímku.

Na základě těchto algebraických vyjádření můžeme pojmy – spojnice, přímka a polopřímka – zavést i pro vícerozměrné prostory.

Jsou-li dány dva body n-rozměrného prostoru, $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$, pak

a) **množinu všech jejich konvexních kombinací**, tj. množinu bodů

$$(1 - k)\,\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2 \qquad \text{při} \qquad 0 \leqq k \leqq 1$$

nazýváme jejich spojnicí,

b) množina všech bodů

$$(1 - k)\,\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2 \qquad \text{při} \qquad -\infty < k < \infty$$

představuje přímku určenou body $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$.

Nabývá-li přitom k jenom nezáporných hodnot, jde o polopřímku vycházející z $\mathbf{a}_1$ a jdoucí přes $\mathbf{a}_2$.

Máme-li definici spojnice, můžeme i pojem konvexní množiny zobecnit na n-rozměrný prostor.

Množina bodů se nazývá konvexní, zahrnuje-li spolu s libovolnými dvěma svými body též všechny body jejich spojnice, tj. všechny konvexní kombinace těchto bodů.

Konvexní množina může být **omezená**, neobsahuje-li žádnou polopřímku, nebo **neomezená**, obsahuje-li aspoň jednu polopřímku.

Omezenou množinu lze definovat i tak, že pro každý její bod $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ platí $x_j \leqq M (j = 1, 2, \ldots, n)$, kde M je reálné číslo (konečné).

---

*) Okolnost, že píšeme $0 \leqq k \leqq 1$ místo $0 < k < 1$, znamená, že ke spojnici počítáme též její krajní body $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$.

Z definice konvexní množiny vyplývá takřka bezprostředně věta:

Průnik (společná část) dvou konvexních množin je opět konvexní množina. Jsou-li body $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ současně prvky dvou konvexních množin, A a B, je jejich spojnice obsažena jak v množině A, tak i v množině B, a tedy také v jejich průniku.

Bod konvexní množiny, který neleží na spojnici dvou jiných bodů téže množiny, nazývá se **krajním bodem množiny.**

Množina nemusí mít vůbec krajní body, např. celá rovina nebo vnitřní body kruhu (tedy bez bodů kružnice) tvoří konvexní množinu, která nemá krajní body. Konvexní množina může mít konečný počet krajních bodů (např. první kvadrant, konvexní mnohoúhelník apod.) i nekonečný počet krajních bodů (např. množina bodů kruhu včetně bodů kružnice, neboť všechny body kružnice jsou krajními body).

Omezená konvexní množina, která má konečný počet krajních bodů, se nazývá konvexním polyedrem. Krajní body polyedru se nazývají též vrcholy polyedru.

Souvislost mezi pojmy konvexní kombinace (z čl. 3.4) a konvexní množiny vyplývá z těchto vět:

Má-li konvexní polyedr m krajních bodů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, pak každý bod polyedru lze vyjádřit jako jejich konvexní kombinaci.

Máme-li m bodů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, pak množina všech konvexních kombinací těchto bodů tvoří konvexní polyedr, který může mít krajní body nejvýše v bodech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Tento konvexní polyedr se nazývá **konvexním obalem bodů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.**

Např. konvexním obalem dvou bodů je jejich spojnice. Konvexním obalem tří bodů je trojúhelník, neleží-li ovšem všechny tři body v jediné přímce. Leží-li tři body v jediné přímce, je jejich konvexním obalem spojnice obou krajních bodů, tedy polyedr o dvou vrcholech atd.*)

První z uvedených vět je pro $m = 2$ (tj. pro úsečku) samozřejmá; vyplývá přímo z definice úsečky. Dokážeme ji tedy nejlépe metodou úplné indukce, tj. z předpokladu, že platí pro polyedry o m vrcholech, dokážeme její platnost pro polyedry o $m + 1$ vrcholech.

Předpokládejme tedy, že máme konvexní polyedr A o m vrcholech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ a že libovolný bod $\mathbf{b}$ tohoto polyedru se dá vyjádřit ve formě

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + k_m\mathbf{a}_m, \tag{3.13}$$

kde

$$k_i \geqq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

a

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 1$$

---

*) Konvexním obalem jakékoli (tedy i nekonečné) množiny bodů S nazýváme nejmenší konvexní množinu, jejíž je S podmnožinou.

Připojením dalších bodů utvořme z polyedru A nový konvexní polyedr A' o $m + 1$ vrcholech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}$. Protože polyedr A' má ve srovnání s polyedrem A jediný další vrchol $\mathbf{a}_{m+1}$, musí každý bod polyedru A' ležet na spojnici tohoto dalšího vrcholu a některého bodu polyedru A. Pro libovolný bod $\mathbf{c}$ polyedru A' musí tedy platit

$$\mathbf{c} = (1 - k_{m+1}) \,.\, \mathbf{b} + k_{m+1}\mathbf{a}_{m+1},$$

kde $\mathbf{b}$ je bod polyedru A a $0 \leqq k_{m+1} \leqq 1$
Dosadíme-li za $\mathbf{b}$ z 3.13, máme

$$\mathbf{c} = (1 - k_{m+1})\, k_1\mathbf{a}_1 + (1 - k_{m+1})\, k_2\mathbf{a}_2 + \ldots + (1 - k_{m+1})\, k_m\mathbf{a}_m + k_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}$$

Všechny koeficienty v posledním výrazu jsou nezáporné, neboť $k_i \geqq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m + 1$) i $(1 - k_{m+1}) \geqq 0$; jejich součet se pak rovná jednotce, neboť

$$(1 - k_{m+1})\, k_1 + (1 - k_{m+1})\, k_2 + \ldots + (1 - k_{m+1})\, k_m + k_{m+1} =$$
$$= (1 - k_{m+1})(k_1 + k_2 + \ldots + k_m) + k_{m+1} = 1 - k_{m+1} + k_{m+1} = 1$$

To znamená, že libovolný bod $\mathbf{c}$ konvexního polyedru A' se dá vskutku vyjádřit jako konvexní kombinace jeho vrcholů.

Podobně se dá metodou úplné indukce dokázat i druhá věta.

3.16 CVIČENÍ

1. Jsou dány tři vektory:

$$\mathbf{a}^T = [2, 4, -2, 1] \quad \mathbf{b}^T = [3, 7, 5, -2] \qquad \mathbf{c}^T = [6, 5, 3, 7]\,.$$

Proveďte následující výpočetní operace:

a) $(\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T) + \mathbf{c}^T$ b) $\mathbf{a}^T + (\mathbf{b}^T + \mathbf{c}^T)$
c) $-5(\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T - \mathbf{c}^T)$ d) $-5\mathbf{a}^T - 5\mathbf{b}^T + 5\mathbf{c}^T$

2. Na 1 kg výrobku A je třeba 2 kg první suroviny, 3 kg druhé suroviny a 4 kg třetí suroviny. 1 kg první suroviny stojí 27 Kčs, druhé suroviny 30 Kčs, třetí suroviny 15 Kčs. Jak velké jsou náklady na suroviny ve výrobku A?

3. Podnik vyrábí výrobek třemi způsoby. Volba výrobního programu je omezena kapacitami tří strojů, které činí 23, 23 1/4 a 23 1/2 hodiny denně. Na výrobu výrobku prvním způsobem je třeba 20 minut práce prvního stroje, 22 minut práce druhého stroje a 21 minut práce třetího stroje. Na výrobu výrobku druhým způsobem je třeba 18 minut práce prvního stroje a 20 minut práce třetího stroje. Na výrobu výrobku třetím způsobem je nutná doba 22 minut práce druhého stroje a 19 minut práce třetího stroje. Prověřte (využitím znalostí o nezáporné lineární kombinaci), zda je možný tento denní výrobní program:
vyrobit
60 výrobků prvním způsobem,
10 výrobků druhým způsobem,
40 výrobků třetím způsobem.

4. Jsou tyto vektory lineárně nezávislé?

a) $\mathbf{a}^T = [5, 6, 7, 9]$, $\mathbf{b}^T = [4, 3, 2, 1]$, $\mathbf{c}^T = [2, -3, 4, -5]$,
$\mathbf{d}^T = [1, 5, 1, 6]$

b) $\mathbf{e}_1^T = [1, 0, 0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2^T = [0, 1, 0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_3^T = [0, 0, 1, 0, 0]$,
$\mathbf{e}_4^T = [0, 0, 0, 1, 0]$, $\mathbf{e}_5^T = [0, 0, 0, 0, 1]$

c) $\mathbf{a}_1^T = [2,3, 4, 5]$, $\mathbf{e}_1^T = [1, 0, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2^T = [0, 1, 0, 0]$,
$\mathbf{e}_3^T = [0, 0, 1, 0]$, $\mathbf{e}_4^T = [0, 0, 0, 1]$

5. Dokažte na číselném příkladě platnost věty:

„Jestliže vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ jsou lineárními kombinacemi vektorů $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, přičemž $n > m$, pak jsou vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ lineárně závislé“.

6. Vyberte bázi v soustavě vektorů:

$\mathbf{v}_1^T = [1, 2, 3]$, $\mathbf{v}_2^T = [6, 5, 1]$, $\mathbf{v}_3^T = [1, 2, -3]$, $\mathbf{v}_4^T = [5, 6, 3]$, $\mathbf{v}_5^T = [-1, -2, -7]$,
$\mathbf{v}_6^T = [5, 3, 4]$, $\mathbf{v}_7^T = [1, 0, 0]$, $\mathbf{v}_8^T = [0, 1, 0]$, $\mathbf{v}_9^T = [0, 0, 1]$

(Je tato báze jediná?)

7. Je možno z dále uvedených matic sestavit jednu matici? (Proč?) Jakého typu bude?

a) $$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{bmatrix}$$

8. Potravinářský podnik vyrábí čtyři druhy potravin (P), k nimž používá tří druhů surovin (S). Potřeba surovin na jednotku množství potraviny a obsah živin v jednotce množství suroviny jsou uvedeny v tabulkách 3.7a, 3.7b.

Tabulka 3.7a

OBSAH SUROVIN V POTRAVINÁCH

	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	10	15	18	9
S_2	4	6	3	2
S_3	7	0	0	10

Tabulka 3.7b

OBSAH ŽIVIN V SUROVINÁCH

	S_1	S_2	S_3
$Ž_1$	100	90	80
$Ž_2$	60	110	100

Vypočtěte obsah živin v jednotce množství každé potraviny.

9. Vypočtěte inverzní matici k matici (pokud lze)

$$\text{a) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Vypočtěte k maticím

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

součin inverzních matic $\mathbf{A}_2^{-1} \, . \, \mathbf{A}_1^{-1}$ a porovnejte jej s inverzní maticí k součinu $\mathbf{A}_1 \, . \, \mathbf{A}_2$.

11. Ukažte na číselném příkladu platnost věty: „Transponovaná inverzní matice je rovna inverzní matici k transponované matici“.

12. Podnik uskutečňuje tři procesy (X), jejichž úroveň je třeba určit. Při jednotkové úrovni procesů má spotřebu činitelů ($Č$) v měrných jednotkách:

Tabulka 3.8

	X_1	X_2	X_3
$Č_1$	20	10	0
$Č_2$	10	0	20
$Č_3$	50	80	60

K dispozici jsou tato množství činitelů: 500 j., 300 j., resp. 2 100 j.
Vypočtěte úplnou eliminací, na jakou úroveň procesů postačí tato množství činitelů.

13. Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 35 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 32 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 17 \end{aligned}$$

a) přepište ve vektorové formě. (V jaké bázi v tomto případě vektory vyjadřujete?)

b) Vektory koeficientů u neznámých x_4, x_5 vyjádřete ve formě lineární kombinace vektorů koeficientů u neznámých x_1, x_2 a x_3.

c) Vyřešte soustavu rovnic podle neznámých x_1, x_2, x_3.

d) Určete základní řešení soustavy.

KAPITOLA 4 ZÁKLADNÍ POUČKY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

4.1 LINEÁRNÍ NEROVNOSTI A JEJICH GEOMETRICKÁ INTERPRETACE

V příkladech uvedených v první části jsme viděli, že úlohy lineárního programování vedou většinou k soustavě lineárních nerovností. Všimněme si nyní geometrické interpretace nerovností a ukažme, jak z nerovností je možno přejít na rovnice.

Z analytické geometrie je známo, že **lineární rovnici o dvou neznámých**

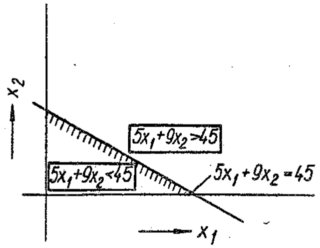
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

lze znázornit přímkou (obr. 4.1), která rozděluje rovinu na dvě poloroviny. V jedné z nich (která zahrnuje i danou přímku) platí

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqq b_i$$

a v druhé

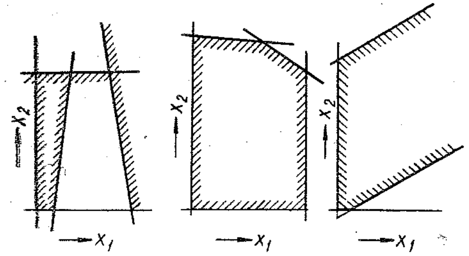
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$$



Obr. 4.1

Lze tedy nerovnost o dvou neznámých znázornit polorovinou. Jinými slovy, řešením této nerovnosti odpovídají body uvedené poloroviny. Příslušná polorovina znázorňuje množinu všech řešení neboli prostor řešení nerovnosti o dvou neznámých.

Poznamenejme ještě, že **polorovina je konvexní množina. Řešením soustavy nerovností o dvou neznámých je každý bod společný všem polorovinám** odpovídajícím příslušným nerovnostem. Množina řešení takové soustavy je znázorněna společnou částí polorovin určených nerovnostmi soustavy. Mohou zde ovšem nastat různé případy (viz obr. 4.2),



a) b) c)

Obr. 4.2

kde šrafovaná strana znamená polorovinu znázorňující příslušnou nerovnost:

a) poloroviny odpovídající nerovnostem soustavy nemají ani jeden bod společný – množina řešení je prázdná;

b) společná část polorovin je mnohoúhelník – množina řešení je omezená;

c) společná část polorovin obsahuje aspoň jednu polopřímku – množina řešení je neomezená.

V každém případě je množina řešení konvexní množinou, neboť je to společná část konvexních množin – polorovin – přiřazených nerovnostem soustavy. V případě b) tomu odpovídá konvexní polyedr.

Lineární rovnici o třech neznámých

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$

odpovídá rovina, která rozděluje trojrozměrný prostor na dva poloprostory. V jednom z nich platí

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leqq b_i$$

a v druhém

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 > b_i$$

Lze tedy **nerovnost o třech neznámých znázornit poloprostorem.** Je to opět konvexní množina.

Množině řešení soustavy nerovností o třech neznámých odpovídá část prostoru společná poloprostorům znázorňujícím jednotlivé nerovnosti. I zde mohou zřejmě nastat případy obdobné jako u dvou neznámých, a to:

a) poloprostory znázorňující nerovnosti soustavy nemají ani jeden bod společný – množina řešení je prázdná;

b) společná část poloprostorů odpovídajících nerovnostem soustavy je konvexní mnohostěn – množina řešení je omezená;

c) společná část poloprostorů odpovídajících nerovnostem soustavy obsahuje aspoň jednu polopřímku – množina řešení je neomezená.

Množina řešení je i zde konvexní, neboť je společnou částí konvexních poloprostorů – určených nerovnostmi soustavy.

Ve vícerozměrné geometrii se útvar znázorňující jednu lineární rovnici o n proměnných

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

nazývá **nadrovinou.** Tato nadrovina rozděluje n-rozměrný prostor na dva **poloprostory.** V jednom platí, že

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqq b_i$$

a v druhém

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n > b_i$$

Odpovídá tedy lineární nerovnosti o n proměnných poloprostor n-rozměrného prostoru.

Množině řešení soustavy nerovností o n neznámých odpovídá společná část poloprostorů znázorňujících nerovnosti soustavy. Je to tedy množina konvexní. Tím je také řečeno, že množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní.

Analogicky s úlohami o dvou a třech proměnných mohou i zde nastat tři případy uvedené výše, a to:

a) množina řešení je prázdná a v tom případě říkáme, že nerovnosti soustavy si navzájem odporují (nejsou konzistentní);

b) množina řešení je omezená, pak ji lze znázornit konvexním polyedrem;

c) množina řešení je neomezená, je to v tom případě, obsahuje-li společná část poloprostorů odpovídajících nerovnostem soustavy aspoň jednu polopřímku.

Poznamenejme ještě, že konvexní polyedr byl zde definován jako společná část poloprostorů. Dá se dokázat, že definice je ekvivalentní definici v předchozím článku, kde konvexní polyedr byl určen jako konvexní obal konečné množiny krajních bodů.

Řešit soustavu lineárních nerovností můžeme tak, že **připojením dalších neznámých utvoříme ekvivalentní soustavu lineárních rovnic.**

Mějme soustavu nerovností

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqq b_m \end{array} \qquad (4.1)$$

Protože nás v lineárním programování zajímají jen nezáporná řešení takových soustav, můžeme z těchto nerovností přejít k rovnicím tak, že připojíme k levé straně nerovností nezáporná čísla $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$, rovnající se rozdílu pravé a levé strany nerovností. Dostaneme tuto soustavu rovnic o $m + n$ neznámých:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & + x'_1 & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & + x'_2 & & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & & + x'_m & = b_m \end{array} \qquad (4.2)$$

Každému řešení soustavy (4.1) odpovídá řešení soustavy (4.2). Stačí totiž k řešení $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ soustavy (4.1) připojit nezáporná čísla $x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_m'^0$, kde

$$x_i'^0 = b_i - a_{i1}x_1^0 - a_{i2}x_2^0 - \ldots - a_{in}x_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Platí také opak, tj. z každého nezáporného řešení $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_m'^0]$ soustavy (4.2) dostaneme nezáporné řešení soustavy (4.1), vynecháme-li prostě

$x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_m'^0$. Je tedy zřejmé, že jde-li nám jen o nezáporná řešení (jen ta jsou v úlohách lineárního programování přípustná), stačí místo soustavy m nerovností o n neznámých (4.1) řešit soustavu rovnic (4.2) o $m + n$ neznámých. V této soustavě rovnic je počet neznámých vždy větší než počet rovnic.

Jsou-li nerovnosti dány ve tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geqq b_i,$$

kde $b_i \geqq 0$, lze z nich přejít na rovnice, odečteme-li na levé straně každé nerovnost nezáporné číslo x_i', rovnající se rozdílu levé a pravé strany nerovnosti, tedy na rovnice tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_i' = b_i$$

Lze opět snadno dokázat, že mezi nezápornými řešeními soustavy nerovností a soustavy rovnic, které z nich takto vznikají, je jednoznačná přiřazenost.

I v tomto případě lze tedy místo soustavy nerovností řešit soustavu rovnic o větším počtu neznámých.

Proměnné $x_1', x_2', \dots, x_m'$, které přidáváme k nerovnostem za účelem jejich změny na rovnice, nazýváme **přídatnými proměnnými**.*)

Zavedením těchto proměnných jsou vlastní omezení úloh lineárního programování vyjádřena v rovnicích o větším počtu proměnných $(m + n)$, než bylo původně (n).

4.2 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ ÚLOH LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Vývody čl. 4.1 umožňují grafické řešení úloh lineárního programování. Pro názornost vyložíme postup na jednoduchém příkladě s dvěma procesy.

Příklad 4.1. Předpokládejme, že podnik vyrábí dva druhy výrobků, A a B, a je omezen ve dvou surovinách, jak je uvedeno v tab. 4.1.

Tabulka 4.1

Pojmenování suroviny	Spotřeba suroviny na jednotku výrobku		Disponibilní množství surovin v plánovacím období
	A	B	
S_1 S_2	3 1	5 1	150 40
Zisk na jednotce výrobků v tis. Kčs	25	35	

Podnik má tedy podle tabulky k dispozici 150 jednotek suroviny S_1, přičemž na jednotku výrobku A se spotřebují 3 jednotky této suroviny a na jednotku výrobku B pět jednotek. Označíme-li množství předpokládané výroby výrobku A a B symboly x_1, resp. x_2, musí platit, že

$$3x_1 + 5x_2 \leqq 150,$$

čímž vyjadřujeme, že podnik nemůže spotřebovat více suroviny S_1, než má k dispozici. Obdobně bude druhé omezení vyjádřeno nerovností $x_1 + x_2 \leqq 40$.

Jiná omezení, ovšem kromě podmínek nezápornosti, nepředpokládáme.

Zisk (v tis. Kčs) je v našem příkladě vyjádřen vzorcem

$$z = 25x_1 + 35x_2$$

Matematicky jde tedy o tento problém:

Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leqq 150 \\ x_1 + x_2 &\leqq 40 \\ x_1, \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

nalézt maximum lineární formy

$$25x_1 + 35x_2$$

Množinu řešení lze v našem příkladě znázornit konvexním čtyřúhelníkem $P_0P_1P_2P_3$ (obr. 4.3) omezeným osami souřadnic

$$(x_1 \geqq 0;\ x_2 \geqq 0)$$

a přímkami

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 150 \\ x_1 + x_2 &= 40 \end{aligned}$$

Nyní chceme na této množině nalézt bod, v němž forma

$$z = 25x_1 + 35x_2$$

nabývá maxima.

Dosadíme-li za z různé hodnoty, dostaneme soustavu rovnoběžných přímek.

Vezměme namátkou jednu z nich, např. přímku

$$25x_1 + 35x_2 = 1\,400$$

Tato přímka neprotíná množinu odpovídající množině přípustných řešení (čtyřúhelník $P_0P_1P_2P_3$), to znamená, že zisk 1 400 (tis. Kčs) je pro podnik za daných omezení nedosažitelný. Musíme tedy přímku posunout směrem k počátku tak, aby měla s množinou přípustných řešení aspoň jeden bod společný. Optimálnímu řešení

---

*) Užívá se též názvu fiktivní proměnné, neboť jak uvidíme později, vyjadřují tyto proměnné v úlohách lineárního programování neskutečné (fiktivní) procesy.

pak odpovídá ta přímka, která má s množinou přípustných řešení aspoň jeden bod společný, a zůstane přitom nejdále od počátku (účelová funkce z na ní bude mít největší možnou hodnotu). V daném příkladě je to zřejmě přímka procházející bodem P_2. Bod P_2 představuje tedy optimální řešení a hodnota účelové funkce v tomto bodě představuje maximálně dosažitelný zisk. Řešení je už nyní velmi jednoduché: určení průsečíku dvou přímek

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 150 \\ x_1 + x_2 &= 40 \end{aligned}$$

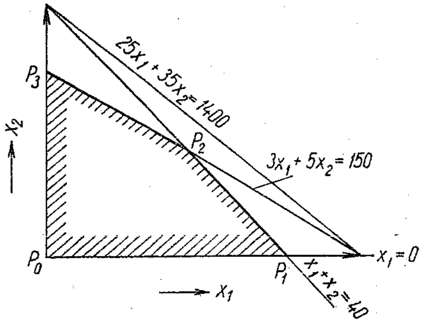
Řešením obou rovnic zjistíme, že

$$x_1 = 25; \quad x_2 = 15$$

Optimálním programem je vyrobit 25 kusů výrobku A a 15 kusů výrobku B; dosahuje se přitom maximálního zisku

$$z = 25 \,.\, 25 + 35 \,.\, 15 = 1\,150 \text{ (tis. Kčs)}$$

Podívejme se nyní, co se stane, zůstanou-li omezení v platnosti beze změny a změní-li se přitom účelová funkce (například tím, že se změní poměr zisku u obou výrobků, nebo že se efektivnost bude posuzovat podle jiného kritéria než podle výše zisku). Jediná změna, která nastane na obr. 4.3, je změna směru soustavy rovnoběžek odpovídajících jednotlivým hodnotám účelové funkce.



Obr. 4.3

Z obr. 4.3 je zřejmé, že v každém případě bude optimální řešení znázorněno některým bodem na obvodě čtyřúhelníku, a to buď jediným bodem, některým vrcholem čtyřúhelníka, nebo nekonečně mnoha body, tj. celou stranou čtyřúhelníka, je-li přímka odpovídající určité hodnotě účelové funkce rovnoběžná s některou stranou čtyřúhelníka. Tedy v každém případě bude optimálnímu řešení odpovídat některý vrchol čtyřúhelníka. Měníme-li přitom spojitě směr soustavy rovnoběžek, odpovídajících jednotlivým hodnotám účelové funkce, zůstává optimální řešení vždy v určitých mezích stálé. Tak například zůstane-li zisk (p_B) u výrobku B nezměněn a mění-li se zisk u výrobku A (p_A), pak pokud se p_A pohybuje v mezích

$$21\,000 < p_A < 35\,000,$$

zůstane jediným optimálním řešením bod P_2. Změní se přitom ovšem úhrnný zisk. Klesne-li p_A na 21 000 při nezměněném $p_B = 35\,000$, bude přímka odpovídající určité hodnotě účelové funkce rovnoběžná s úsečkou $\overline{P_2P_3}$ a optimální řešení bude znázorněno každým bodem této úsečky. Naopak stoupne-li p_A na

$$p_A = p_B = 35\,000,$$

bude odpovídat optimálnímu řešení každý bod úsečky $\overline{P_1P_2}$.

Je-li počet omezení větší než dva, nic se na postupu řešení nemění, jenom místo čtyřúhelníku bude množinu řešení představovat jiný mnohoúhelník s větším počtem stran, popřípadě se může ukázat, že některá omezení de facto omezeními nejsou, neboť jsou splněna v důsledku splnění jiných omezení.

Předpokládejme třeba, že v příkladě 4.1 přistupují tato tři další omezení:

a) Kapacita vlastní slévárny podniku je omezena buď na 45 jednotek výrobku A, nebo na 40 jednotek výrobku B, popřípadě na alikvótní kombinaci obou výrobků, což vyjadřujeme nerovností

$$\frac{x_1}{45} + \frac{x_2}{40} \leqq 1$$

nebo po úpravě

$$8x_1 + 9x_2 \leqq 360$$

b) Montážní linka výrobku A má kapacitu 35 jednotek, tj.

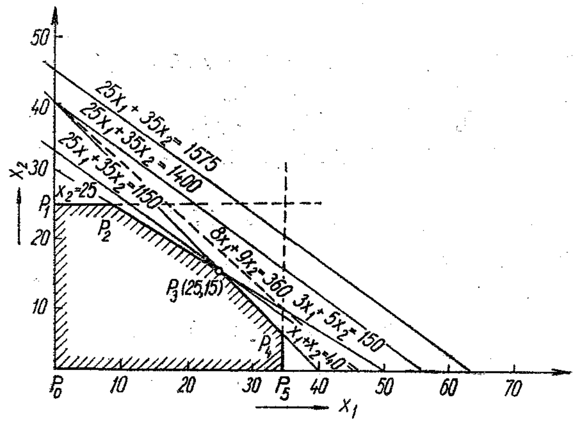
$$x_1 \leqq 35$$

c) Montážní linka výrobku B má kapacitu 25 jednotek, tj.

$$x_2 \leqq 25$$

Geometricky by to znamenalo, že množina řešení bude náležet též do tří dalších polorovin. Jak je však vidět z obr. 4.4, podmínka sub a) vůbec nemá vliv na množinu řešení. To znamená, že kapacita slévárny v daném případě neomezuje rozhodování. Je to tím, že omezení v surovinách jsou silnější než omezení v kapacitě slévárny. Jinými slovy, za daných omezení v surovinách je kapacita slévárny nadměrná.

Z obrázku vidíme dále, že optimální řešení zůstalo nezměněné, tj. že ani podmínky b) a c) neovlivnily řešení. Zdálo by se tedy, že



Obr. 4.4

i kapacity montážních linek jsou přebytečné. To však platí jenom při dané účelové funkci, tj. při daném kritériu optimalizace a při daném ocenění výrobků. Z obr. 4.4 je totiž zřejmé, že změní-li se směr soustavy rovnoběžek odpovídajících jednotlivým hodnotám účelové funkce, může se stát kapacita jedné či druhé montážní linky omezujícím faktorem.

To, co bylo uvedeno v příkladě, platí zřejmě s příslušnými změnami i v jiných příkladech o dvou proměnných. Obecně můžeme problém lineárního programování o dvou proměnných formulovat takto:

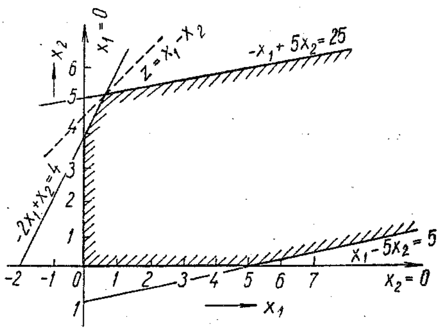
Nalézt extrém (maximum nebo minimum) lineární formy

$$z = c_1x_1 + c_2x_2, \tag{4.3}$$

při vedlejších podmínkách

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{4.4}$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0 \tag{4.5}$$



Obr. 4.5

Avšak obecně, jak jsme viděli v čl. 4.1, nemusí množina řešení mít tvar jako v obr. 4.4. Množina řešení může být také prázdná a může být i neomezená.

Je-li množina řešení nerovností (4.4) a (4.5) prázdná, nepřichází maximalizace nebo minimalizace formy (4.3) v úvahu. Prakticky nás takové případy nebudou zajímat.

Není-li množina řešení prázdná, avšak je omezená, máme případ typu uvedeného v obr. 4.4. Funkce (4.3) nabývá v tomto případě maxima v některém vrcholu mnohoúhelníku řešení a minima rovněž v některém vrcholu.

Vezměme konečně případ, kdy je množina řešení neomezená. V každém případě zůstává množina řešení v prvním kvadrantu, má tedy tvar druhu znázorněného na obr. 4.5.

Z obr. 4.5 je zřejmé, že lineární forma může nabýt na této množině jen určitého extrému, a to buď maxima, nebo minima.

Např. jsou-li omezení obr. 4.5 dána nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &\leqq 5 \\ -x_1 + 5x_2 &\leqq 25 \quad , \\ -2x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ x_1 \geqq 0;\ \ x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$

potom lineární forma

$$z = x_1 - x_2$$

nabývá minima v bodě $A \equiv [5/9,\ 46/9]$, tedy v krajním bodě množiny řešení.

Táž forma $x_1 - x_2$ může však na množině řešení hořejší soustavy nabýt libovolně velikých hodnot, tj. nemá na této množině maxima.

Naopak lineární forma

$$z' = -x_1 + x_2$$

nabývá v bodě $A \equiv [5/9,\ 46/9]$ maxima, ale může nabýt libovolně malých hodnot, a nemá tedy na uvedené množině minimum (rozumí se konečné).

Ve výjimečných případech může lineární forma mít na neomezené množině oba extrémy. Tak při shora uvedených omezeních má lineární forma

$$z = x_1 - 5x_2$$

maximum 5 a minimum −25.

U dvourozměrných úloh je to možné zřejmě jenom v případě, kdy množina řešení obsahuje jedinou polopřímku.

Můžeme tedy pro úlohy o dvou proměnných shrnout výsledky takto:

Při řešení úloh lineárního programování mohou nastat tři případy:

a) úloha nemá vůbec přípustné řešení, tj. omezení si navzájem odporují;

b) má konečné optimální řešení, pak je má v jednom krajním bodě množiny přípustných řešení nebo ve dvou krajních bodech a v jejich konvexním obalu;

c) úloha má sice přípustné řešení, avšak účelová funkce může nabýt libovolně velkých (v případě maximalizace), resp. libovolně malých (v případě minimalizace) hodnot, takže úloha nemá konečné optimální řešení.

Řešení úloh s větším počtem neznámých není sice uvedenou grafickou metodou možné, avšak vývody, které z předchozích odstavců plynou, jsou zřejmě obecnější.

Při úlohách o třech neznámých odpovídá jednotlivým hodnotám účelové funkce svazek rovnoběžných rovin. V případech, kdy množina přípustných řešení je znázorněna konvexním polyedrem (případ b) článku 4.1), nabude účelová funkce maxima (nebo minima) v bodě, v němž se jedna z rovin odpovídajících různým hodnotám účelové funkce dotýká polyedru, přičemž celý polyedr zůstává v jednom z poloprostorů určených touto rovinou. Účelová funkce nabude extrému buď v jediném vrcholu polyedru (odpovídajícího množině řešení), nebo v několika vrcholech (ve dvou nebo ve třech) a ve všech bodech jejich konvexního obalu.

Je-li množina přípustných řešení neomezená, může účelová funkce nabýt na této množině zřejmě opět jen určitého extrému (maxima nebo minima).

Grafické řešení úloh lineárního programování sice prakticky nepřichází v úvahu, nicméně dává názornou představu o řešení těchto úloh. Vývody, ke kterým jsme dospěli, platí totiž, jak ukážeme v dalším článku, s příslušnými změnami zcela obecně.

Příklady, které jsme uvedli v čl. 2.2, vedly k formulaci úloh lineárního programování v lineárních nerovnostech. Ukázali jsme však, že nerovnosti lze vždy změnit na rovnice. **Budeme tedy formulovat obecně úlohu lineárního programování v této standardní formě:**

Nalézt n-rozměrný vektor $\mathbf{x}$, aby lineární forma

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{4.6}$$

nabyla maxima, aby však přitom byly splněny podmínky

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \tag{4.7}$$
$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}; \tag{4.8}$$

přitom $\mathbf{c}$ je n-rozměrný vektor (vektor cen),
$\mathbf{A}$ — matice koeficientů typu $(m \,.\, n)$ (též strukturální matice, matice transformace)*) a
$\mathbf{b}$ — m-rozměrný vektor (vektor požadavků).

Předpokládejme hned, že $m \leqq n$ a že hodnost matice $\mathbf{A}$ se rovná počtu řádků m, tj. předpokládejme, že soustava rovnic je lineárně nezávislá. Kdyby tomu tak nebylo, projevilo by se to při řešení eliminační metodou a pak by bylo možno přebytečné rovnice ze soustavy vyjmout.

Podmínky (4.8) je možno vyjádřit i ve formě vektorové rovnice

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \leqq \mathbf{b}, \tag{4.8a}$$

kde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ jsou m-rozměrné vektory (sloupce matice $\mathbf{A}$); jsou to vektory jednotlivých procesů.**)

Zobecníme nyní výsledky čl. 4.1 a 4.3 a dokážeme, že **množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní, s konečným počtem krajních bodů.**

Důkaz provedeme v několika krocích:

a) Dokážeme nejdříve, že množina přípustných řešení je konvexní. K tomu účelu stačí dokázat, že každá konvexní kombinace dvou přípustných řešení je opět přípustným řešením. Dejme tomu, že $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ jsou přípustná řešení. To znamená, že platí

$$\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}$$

---

*) Tyto názvy souvisejí s různými interpretacemi soustavy omezení.

**) Ukážeme později (čl. 5.2 a 8.8), že i přídatné proměnné lze interpretovat jako úroveň zvláštních procesů, a tedy že i vektory koeficientů těchto proměnných (jednotkové vektory) charakterizují nějaké procesy.

Konvexní kombinací obou uvedených vektorů můžeme psát v tomto tvaru:

$$\mathbf{x} = k\mathbf{x}_1 + (1 - k)\,\mathbf{x}_2,$$

kde $0 \leqq k \leqq 1$. Pro vektor $\mathbf{x}$ platí zřejmě

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

a

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}[k\mathbf{x}_1 + (1 - k)\,\mathbf{x}_2] = k\mathbf{Ax}_1 + (1 - k)\,\mathbf{Ax}_2 = k\mathbf{b} + (1 - k)\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Je tedy $\mathbf{x}$ také přípustným řešením a množina přípustných řešení je vskutku konvexní. Označíme ji v dalším výkladu pro stručnost jako množinu K.

b) Dokážeme dále, že krajními body množiny K jsou přípustná základní řešení, a jenom základní řešení.

Předpokládejme za tím účelem, že úloha má základní řešení a pro jednoduchost předpokládejme, že základním řešením je právě vektor

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0],$$

kde

$$x_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Podle definice základního řešení musí pak prvních m vektorů soustavy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ tvořit bázi a platí, že

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

Snadno dokážeme, že $\mathbf{x}$ je krajním bodem množiny K. Kdyby totiž $\mathbf{x}$ nebyl krajním bodem, musel by být konvexní kombinací dvou jiných přípustných řešení, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$, tj. muselo by platit, že

$$\mathbf{x} = k\mathbf{y} + (1 - k)\,\mathbf{z}, \tag{4.9}$$

kde $0 < k < 1$. Protože souřadnice vektorů $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ jsou nezáporné a k a $1 - k$ jsou čísla kladná, musí se posledních $n - m$ souřadnic těchto vektorů rovnat nule stejně jako u $\mathbf{x}$, tj.

$$\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_m, 0, \ldots, 0]$$
$$\mathbf{z}^T = [z_1, z_2, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0]$$

Dále pak platí (protože $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ jsou řešením), že

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \ldots + y_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$
$$z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + \ldots + z_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

Znamená to tedy, že vektor $\mathbf{b}$ se dá vyjádřit různými způsoby jako lineární kombinace vektorů báze. To však není možné, neboť jak víme (viz. čl. 3.5), vyjádření kteréhokoli vektoru jako lineární kombinace vektorů báze je jednoznačné. To znamená, že $\mathbf{x}$ nemůže být konvexní kombinací jiných bodů množiny K, a je tedy krajním bodem této množiny.

c) Předpokládejme nyní, že máme krajní bod $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ množiny K, a dejme tomu, že má k souřadnic (např. prvních k) kladných a ostatní nulové. Dokážeme, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, přiřazené ke kladným souřadnicím, jsou lineárně nezávislé, a že tedy $k \leqq m$.

Připouštíme-li totiž, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně závislé, pak lze nalézt soustavu čísel $d_1, d_2, \ldots, d_k$, z nichž aspoň jedno se nerovná nule, totiž takových čísel, že

$$d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \ldots + d_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \qquad (4.10)$$

Současně platí podle předpokladu, že

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b} \qquad (4.11)$$

Násobme rovnici (4.10) libovolným číslem $\varepsilon > 0$ a připočtěme a odečtěme od rovnice (4.11); dostaneme

$$(x_1 + \varepsilon d_1)\,\mathbf{a}_1 + (x_2 + \varepsilon d_2)\,\mathbf{a}_2 + \ldots + (x_k + \varepsilon d_k)\,\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$
$$(x_1 - \varepsilon d_1)\,\mathbf{a}_1 + (x_2 - \varepsilon d_2)\,\mathbf{a}_2 + \ldots + (x_k - \varepsilon d_k)\,\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

To znamená, že vektory

$$\mathbf{y}^T = [x_1 + \varepsilon d_1, x_2 + \varepsilon d_2, \ldots, x_k + \varepsilon d_k, 0, \ldots, 0]$$

a

$$\mathbf{z}^T = [x_1 - \varepsilon d_1, x_2 - \varepsilon d_2, \ldots, x_k - \varepsilon d_k, 0, \ldots, 0]$$

jsou rovněž řešeními rovnice (4.8). Přitom ε můžeme volit tak malé, aby prvních k souřadnic $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ zůstalo kladných, tj. aby $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ byly přípustnými řešeními. Protože dále platí, že

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z},$$

tj. $\mathbf{x}$ je konvexní kombinací bodů $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$, znamená to, že $\mathbf{x}$ není krajním bodem množiny K, a to v rozporu s předpokladem. Z toho však vyplývá, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ nemohou být lineárně závislé.

Počet lineárně nezávislých vektorů je možno doplnit nejvýše do počtu m, a tak z b) a c) vyplývá, že každému krajnímu bodu množiny K lze přiřadit m lineárně nezávislých vektorů (bázi) soustavy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ tak, že souřadnice odpovídající těmto m vektorům jsou nezáporné, ostatní pak nulové.

Vidíme tedy, že krajním bodům množiny K odpovídají základní řešení soustavy omezení, a naopak přípustným základním řešením odpovídají krajní body množiny K. Jak jsme však ukázali, základních řešení je jenom konečný počet, a tak množina K může mít jenom konečný počet krajních bodů. Dá se přitom dokázat, že není-li množina K prázdná, má krajní body.

Mohou nastat tyto tři případy:

1. množina K je prázdná;
2. množina K je omezená, je pak znázorněna konvexním polyedrem, tj. konvexním obalem krajních bodů;
3. množina K je neomezená.

První případ stejně jako u úloh s dvěma či třemi proměnnými nás v podstatě nezajímá, neboť v tomto případě úloha nemá řešení, podmínky příkladu jsou rozporné. Většinou to zjistíme ovšem až při pokusu o řešení.

V praxi se setkáváme jenom s případem druhým a jen výjimečně s případem třetím.

V případě druhém, tj. kdy množina přípustných řešení K je konvexním polyedrem, lze všechna řešení psát jako konvexní kombinaci krajních bodů K. Z toho se snadno dokáže, že v tomto případě má úloha nutně optimální řešení, že množina optimálních řešení je konvexní, s krajními body v některých krajních bodech množiny K.

Předpokládejme totiž, že K má r krajních bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ a z těchto bodů nabývá účelová funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ největší hodnoty v bodě $\mathbf{x}_1$ (pořadí krajních bodů je libovolné). Obecný bod $\mathbf{x}$ množiny K, tj. libovolné přípustné řešení, lze psát ve formě konvexní kombinace krajních bodů, tj.

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_r\mathbf{x}_r,$$

kde

$$k_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = 1$$

Hodnota účelové funkce v tomto bodě

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= k_1\mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{c}^T\mathbf{x}_2 + \ldots + k_r\mathbf{c}^T\mathbf{x}_r \\ &\leqq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1 \quad (k_1 + k_2 \quad + \ldots + k_r) \\ &\leqq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_1\end{aligned}$$

To znamená, že hodnota účelové funkce v libovolném bodě množiny K nemůže být větší než v krajním bodě $\mathbf{x}_1$. Jinými slovy účelová funkce dosahuje v krajním bodě $\mathbf{x}_1$ maxima.

Totéž lze dokázat i pro minimum účelové funkce.

V třetím případě obsahuje množina K kromě konvexního obalu krajních bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ další body a aspoň jednu polopřímku. Dosahuje-li přitom účelová funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ maxima v konvexním obalu krajních bodů, lze stejně jako předtím dokázat, že dosahuje maxima v krajním bodě množiny K.

Nedosahuje-li funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ maxima v žádném bodě konvexního obalu krajních bodů, pak zvolme v K bod $\mathbf{x}_e$, ve kterém funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nabývá větší hodnoty než v kterémkoli bodě konvexního obalu krajních bodů K. Tímto bodem lze od některého bodu $\mathbf{x}_i$ konvexního obalu vést polopřímku

$$(1 - k)\,\mathbf{x}_i + k\mathbf{x}_e \qquad (k \geqq 0),$$

která leží celá v K. Hodnota účelové funkce v bodech této polopřímky je

$$(1 - k)\,\mathbf{c}^T\mathbf{x}_i + k\mathbf{c}^T\mathbf{x}_e = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i + k(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_e - \mathbf{c}^T\mathbf{x}_i)$$

Vzhledem k našemu předpokladu je číslo v závorkách kladné. Roste-li tedy k, roste hodnota účelové funkce neomezeně. Jinými slovy, nedosahuje-li účelová funkce maxima v některém krajním bodě množiny K, může růst neomezeně, tj. nemá vůbec maximum.

Totéž, s příslušnými obměnami, lze dokázat o minimu účelové funkce.

Můžeme tedy shrnout, že u úloh lineárního programování mohou nastat tyto tři případy:

1. Úloha nemá řešení.

2. Úloha má konečné optimální řešení, a to buď

a) jediné optimální řešení, v tomto případě nabývá účelová funkce optimální hodnoty v jediném krajním bodě množiny K, nebo

b) nekonečně mnoho optimálních řešení, v tomto případě nabývá účelová funkce optimální hodnoty v několika krajních bodech množiny K a ve všech bodech konvexního obalu vytvořeného těmito body.

3. Účelová funkce může na množině K nabýt libovolně velkých (při úlohách maximalizačních), resp. libovolně malých (při úlohách minimalizačních) hodnot.

Pro praxi je důležitý případ uvedený pod 2, tj. případ, kdy úloha má konečné optimální řešení. V tomto případě proto, že účelová funkce dosahuje optimální hodnoty v krajním bodě množiny K, stačí při hledání optimálního řešení omezit se na tyto krajní body, tj. na nezáporná základní řešení soustavy rovnic (4.8).

Existuje více metod, jak nalézt optimální řešení; jsou to metody vesměs iterační, tj. dosahující optimálního řešení podle udaného postupu postupným přibližováním k řešení. U většiny těchto metod se vychází z nějakého nezáporného řešení soustavy rovnic (4.8), které se postupně zlepšuje, tj. postupuje se od něho k jiným nezáporným základním řešením s lepší hodnotou účelové funkce. Seznámíme se nejdříve s tzv. simplexovou metodou, která je v podstatě modifikací eliminačního postupu z čl. 3.12. Touto metodou se také automaticky zjistí, zda úloha má vůbec řešení (jak jsme to už poznali v čl. 3.12) a zda účelová funkce nemůže růst neomezeně.

4.4 CVIČENÍ

1. Jsou dány tři krajní body $\mathbf{a}_1^T = [1, 1]$, $\mathbf{a}_2^T = [2, 3]$, $\mathbf{a}_3^T = [0, 1]$ konvexní množiny K. Prověřte, zda je bod $\mathbf{a}_4^T = [3, 1]$ bodem jejich konvexního obalu.

2. Převeďte soustavy nerovností na rovnice:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqq 12 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqq 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geqq 18 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\geqq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geqq 6 \end{aligned}$$

3. Podnik vyrábí dva výrobky (P), přičemž je omezen třemi surovinami (S), které má k dispozici v množstvích 1 200 kg, 3 000 kg a 2 100 kg. Cena jednoho výrobku činí 25 Kčs a 20 Kčs. Množství surovin v kg potřebné na výrobek je uvedeno v tab. 4.2.

Tabulka 4.2

	P_1	P_2
S_1	2	0
S_2	4	6
S_3	3	3

Tabulka 4.3

	P_1	P_2	Disponibilní množství
S_4	8	12	7 000
S_5	3	3	1 800

a) Sestavte výrobní program tak, aby celková cena produkce byla maximální.

b) Jak se změní optimální řešení, přistoupí-li omezení v dalších surovinách (tab. 4.3).

c) Jak se změní úhrnná cena produkce při změně cen výrobků na 35 Kčs a 15 Kčs při zachování všech omezení za a) i b)? Úlohu řešte graficky.

4. Určete všechna základní řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 15 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \frac{25}{8}x_4 &= 11 \end{aligned}$$

KAPITOLA 5 SIMPLEXOVÁ METODA

5.1 PODSTATA SIMPLEXOVÉ METODY

Simplexová metoda je nejznámější univerzální metodou řešení problémů lineárního programování a dosud je považována, zejména při neautomatizovaném počítání, za metodu nejefektivnější. Jak jsme uvedli, je to metoda **iterační,** tj. dospívá k optimálnímu řešení jen krok za krokem. Jde přitom o postupné provádění těchto operací:

1. Nalézt výchozí řešení, tj. jakékoli přípustné řešení,*) pokud takové existuje.
2. Zjistit, zda toto řešení je optimální, či ne.
3. Není-li řešení optimální, přejít na řešení lepší.
4. Opakovat operaci 2. atd.

Neukáže-li se hned v prvním kroku, že úloha nemá vůbec přípustné řešení, vede simplexová metoda po konečném počtu kroků k jednomu z těchto dvou možných výsledků:

a) k optimálnímu řešení;

b) k výsledku, který ukazuje, že úloha nemá konečné optimum.

Přecházíme tedy u simplexové metody z jednoho přípustného řešení postupně na jiná, lepší. Proto lze tuto metodu nazvat též metodou postupného zlepšování programů (plánů).

Dříve než pojednáme obecně o uvedených operacích, vezměme příklad:

Příklad 5.1. Chemický podnik vyrábí čtyři druhy výrobků, *A*, *B*, *C* a *D*, které může získat pěti různými technologickými procesy. Při každém z těchto pěti procesů se získávají všechny čtyři výrobky, ovšem v různých poměrech, jak je uvedeno v tab. 5.1.

Podnik má vyrobit přesně 25 jednotek výrobku *A*, 74 jednotek výrobku *B*, 61 jednotek výrobku *C* a co největší množství výrobku *D*. Otázkou je, v jakém rozsahu má uskutečnit jednotlivé procesy.

---

*) Podle základní věty lineárního programování (čl. 2.3 a 4.3) můžeme se omezit při hledání optimálního řešení na řešení základní.

Tabulka 5.1

MNOŽSTVÍ VÝROBKŮ ZÍSKANÝCH PŘI JEDNOTLIVÝCH PROCESECH

Výrobek	Proces				
	1	2	3	4	5
A	1	3	4	8	6
B	2	9	14	28	12
C	1	7	14	26	10
D	2	5	1	8	4

Označíme-li úroveň jednotlivých procesů $x_1, x_2, \ldots, x_5$, vyjádříme okolnost, že z výrobků *A*, *B* a *C* potřebujeme předepsané množství, rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 28x_4 + 12x_5 &= 74 \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 26x_4 + 10x_5 &= 61 \end{aligned}$$

To jsou vlastní omezení našeho problému. Kromě toho platí i zde podmínky nezápornosti $x_j \geqq 0$. Přitom chceme dostat maximální množství výrobku *D*. To nám dává účelovou funkci

$$z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 8x_4 + 4x_5$$

Vlastní omezení našeho příkladu jsou rovnice soustavy příkladu 3.14 z čl. 3.12, kde jsou hned uvedena i některá řešení této soustavy. Soustavu řešíme podle prvních tří proměnných. Příslušné základní řešení je [5, 4, 2, 0, 0] a hodnota účelové funkce při tomto řešení je

$$z_0 = 2 . 5 + 5 . 4 + 1 . 2 = 32$$

Nyní chceme přejít k druhému kroku a zjistit, zda získané řešení je optimální. To je však ekvivalentní otázce, zda přechodem na jiné základní řešení (na jinou bázi) lze zlepšit hodnotu účelové funkce, či ne.

K tomu stačí zkoumat, zda výměnou některého vektoru v bázi za jiný se hodnota účelové funkce může zvýšit, či ne.

V našem příkladě jsou zatím v bázi první tři vektory. Čtvrtý vektor má v této bázi souřadnice [−2, 2, 1], tj. platí

$$\mathbf{a}_4 = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

Věcně to znamená, že jednotka čtvrtého procesu se co do množství prvních tří výrobků rovná dvěma jednotkám druhého procesu plus jedné jednotce třetího minus dvěma jednotkám prvního procesu, tj. chceme-li provést jednou čtvrtý proces (ovšem při zachování všech omezení), musíme dvakrát provést proces první, vynechat dvakrát proces druhý a jednou proces třetí. Stručně můžeme říci, že pravá strana předchozí rovnice udává, jaké kombinaci základních procesů je ekvivalentní jednotka čtvrtého procesu. S ohledem na jednoznačnost vyjádření vektoru v bázi je tato ekvivalentní kombinace dána zcela jednoznačně.*)

Odpověď na otázku, zda je účelné zařadit čtvrtý proces, závisí tedy na tom, zda provedení tohoto procesu dá více výrobku *D* než uvedená ekvivalentní kombinace, či ne. Stručněji vyjádřeno, zda čtvrtý proces má větší *D*-hodnotu než ekvivalentní kombinace základních procesů, či ne. *D*-hodnota čtvrtého procesu je

$$c_4 = 8$$

D-hodnotu ekvivalentní kombinace c'_4 vypočteme, násobíme-li souřadnice vektoru $\mathbf{a}_4$ *D*-hodnotami základních procesů, tj.

$$c'_4 = -2\,.\,2 + 2\,.\,5 + 1\,.\,1 = 7$$

Z toho plyne, že zařazením čtvrtého procesu do řešení se hodnota účelové funkce zvýší (čtvrtý proces dává o jednu jednotku výrobku *D* více než ekvivalentní kombinace základních procesů). To znamená, že dané řešení není optimální.

Za formální kritérium optimality můžeme tedy považovat znaménko rozdílu mezi „cenou" ekvivalentní kombinace a „cenou" příslušného procesu

$$c'_j - c_j$$

Tento rozdíl udává, oč se změní hodnota účelové funkce, zařadíme-li do řešení *j*-tý proces na jednotkové úrovni. Je-li aspoň u jedné z nezákladních proměnných záporný, lze zařazením této proměnné hodnotu účelové funkce zvýšit. Není-li tento rozdíl ani u jedné proměnné záporný, dosáhla účelová funkce maximální možné hodnoty (tj. jde-li o problém maximalizační, je řešení optimální).

Rozdíly $c'_j - c_j$ lze vypočíst i jednodušeji, než jsme to dělali, a to současně u všech nezákladních proměnných, na základě této úvahy:

Mění-li se hodnoty proměnných x_j, mění se též hodnota účelové funkce z. Lze tedy z považovat za další proměnnou, definovanou rovnicí

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0,$$

o kterou rozšíříme soustavu omezení.

---

*) Je třeba upozornit, že jde o ekvivalenci relativní, vztaženou na daná omezení. V našem příkladě se ta ekvivalence týká výroby prvních tří výrobků. Jednorázové provedení čtvrtého procesu dává stejné množství prvních tří výrobků jako příslušná kombinace prvních tří procesů. O tom se můžeme přesvědčit i přímým výpočtem.

V našem příkladě dostaneme tuto soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 25 \\ 2x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 28x_4 + 12x_5 &= 74 \\ x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 26x_4 + 10x_5 &= 61 \\ z - 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 8x_4 - 4x_5 &= 0 \end{array}$$

Jde nyní o to nalézt pro takto rozšířenou soustavu takové řešení, aby x_j byly nezáporné (přípustnost) a aby proměnná z dosáhla maximální hodnoty. Je zřejmé, že můžeme i u rozšířené soustavy rovnic postupovat eliminační metodou; musíme jenom dbát, aby při přechodu na kanonický tvar proměnná z zůstala základní proměnnou.

Provedeme-li tři eliminační kroky jako v čl. 3.12, dostaneme:

$$\begin{array}{rl} x_1 \qquad - 2x_4 + 10x_5 &= 5 \\ x_2 \quad + 2x_4 - 4x_5 &= 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ z \qquad\qquad - x_4 - 2x_5 &= 32 \end{array} \qquad (5.1)$$

Základní řešení, které zde dostáváme [32, 5, 4, 2, 0, 0], znamená, že provedeme-li první proces pětkrát, druhý čtyřikrát a třetí dvakrát, učiníme zadost omezením a získáme 32 jednotek výrobku *D*.

To je řešení nám už známé a víme, že není optimální. Zde to poznáme podle znamének koeficientů v poslední rovnici (obsahující základní proměnnou z). Je-li aspoň jeden z těchto koeficientů záporný, lze hodnotu účelové funkce ještě zvýšit, tj. řešení není optimální. Převedeme-li totiž v poslední rovnici nezákladní proměnné na pravou stranu, dostaneme

$$z = 32 + x_4 + 2x_5$$

Z tohoto tvaru je už bezprostředně zřejmé, že dosadíme-li např. za x_4 kladné číslo, hodnota účelové funkce poroste. Koeficienty v poslední rovnici soustavy se rovnají právě rozdílům $c'_j - c_j$, jak se o tom můžeme snadno přesvědčit.

Další krok záleží nyní v tom, že přejdeme na jiné řešení zařazením proměnné x_4 do řešení. Příslušný postup je nám už znám z čl. 3.12; zde však musíme pamatovat, že přípustná jsou jenom řešení s $x_j \geqq 0$. To znamená, že dosadíme-li za x_4 kladné číslo (při ponechání $x_5 = 0$), nesmí se ani jedna z proměnných x_1, x_2, x_3 stát zápornou. To dává podle rovnic (5.1) pro x_4 tyto podmínky:

$$5 + 2x_4 \geqq 0 \quad \text{čili} \quad x_4 \geqq -\frac{5}{2}$$

$$4 - 2x_4 \geqq 0 \quad \text{čili} \quad x_4 \leqq \frac{4}{2}$$

$$2 - x_4 \geqq 0 \quad \text{čili} \quad x_4 \leqq \frac{2}{1}$$

První podmínka vůbec neomezuje x_4. Další dvě podmínky připouštějí stejnou maximální hodnotu $x_4 = 2$.

Dosadíme-li tuto hodnotu za x_4, anuluje se jak x_2, tak i x_3. Při dalším eliminačním kroku můžeme tedy za vylučovanou proměnnou považovat jak x_2, tak i x_3. Vylučujeme-li x_3, dostaneme toto nové řešení:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & + 14x_5 & = & 9 \\ & x_2 & - 2x_3 & & - 8x_5 & = & 0 \\ & & x_3 & + x_4 & + 2x_5 & = & 2 \\ z & & + x_3 & & & = & 34 \end{array}$$

Základní řešení, které nám z toho vyplývá [34, 9, 0, 0, 2, 0], je optimální, neboť podle poslední rovnice nelze zařazením dalších proměnných hodnotu účelové funkce zvýšit. Optimálním řešením je tedy uskutečnění prvního procesu devětkrát a čtvrtého procesu dvakrát; získá se tím maximální počet 34 jednotek výrobků *D*.

Vezměme ještě jednoduchý příklad, který nemá konečné optimum.

Příklad 5.2. Je třeba najít maximum lineární formy

$$z = x_4 - x_5$$

při podmínkách

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & - x_4 + 5x_5 & = & 25 \\ & x_2 & & + x_4 - 5x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & - x_4 + x_5 & = & 1 \end{array}$$

$$x_j \geqq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, 5)$$

Soustava čtyř rovnic

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & - x_4 + 5x_5 & = & 25 \\ & x_2 & & + x_4 - 5x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & - x_4 + x_5 & = & 1 \\ z & & & - x_4 + x_5 & = & 0 \end{array}$$

je zde dána v kanonickém tvaru; máme tedy hned základní řešení. Není to však řešení optimální. Zařadíme-li v dalším kroku do řešení x_4 a vyloučíme-li x_2 (jedině ve druhé rovnici je u x_4 kladný koeficient), dostaneme

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & + x_2 & & & & = & 30 \\ & x_2 + & & x_4 & - 5x_5 & = & 5 \\ & x_2 + x_3 & & & - 4x_5 & = & 6 \\ z & + x_2 & & & - 4x_5 & = & 5 \end{array} \qquad (5.2)$$

Řešení, které z této soustavy vyplývá [5, 30, 0, 6, 5, 0], není ještě optimální. Do řešení můžeme zařadit x_5, a tím zvýšit hodnotu účelové funkce. Avšak ani jeden koeficient u x_5 není kladný. To znamená, že můžeme za x_5 dosadit libovolná kladná čísla; dostaneme přípustná řešení (ovšem nezákladní), v nichž x_5 i z může růst neomezeně. Vskutku, z poslední soustavy vyplývá řešení

$$\begin{array}{ll} x_1 = 30 & \\ x_2 = 0 & \\ x_3 = 6 + 4t & \\ x_4 = 5 + 5t & \\ x_5 = t & \qquad t > 0 \end{array}$$

s hodnotou účelové funkce

$$z = 5 + 4t,$$

která naše tvrzení dokazuje.

V dalším textu vyložíme postup řešení simplexovou metodou obecně. Začneme přitom prvním krokem, tj. nalezením výchozího řešení.

5.2 NALEZENÍ VÝCHOZÍHO ŘEŠENÍ

U příkladu 5.1 jsme výchozí řešení našli eliminační metodou. Tento postup má však nevýhodu v tom, že nevíme předem, zda zvolená báze bude přípustná (tj. nemáme zaručeno, zda získané řešení bude nezáporné).

Musíme se tedy při hledání výchozích řešení vyhnout nepřípustným řešením. V závislosti na výchozích podmínkách úlohy můžeme postupovat různě.

Nejjednodušší případ nastává, když matice koeficientů obsahuje bez transformací – pouze přidáním přídatných proměnných – úplnou soustavu jednotkových vektorů (jednotkovou bázi), tj. jestliže soustava omezujících rovnic je dána v kanonickém tvaru, přičemž absolutní členy rovnic jsou nezáporné. Tento případ nastává dosti často zejména u úloh, u nichž omezení jsou původně dána ve tvaru

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$$

Typickým představitelem těchto úloh je sestavení výrobního programu při omezených činitelích.

Dejme tomu, že podnik vyrábí *n* různých výrobků a má omezení v *m* různých činitelích. Jsou známy ceny jednotlivých výrobků, disponibilní množství činitelů i potřeba těchto činitelů na jednotku toho či onoho výrobku. Je otázka, jaký má být výrobní program podniku (tj. které výrobky a v jakém množství má podnik vyrábět), aby dosáhl maximální hodnoty odbytu (předpokládejme, že podnik nemá omezení v odbytu u svých výrobků). Uspořádejme nejdříve známé údaje do přehledné tabulky:

Tabulka 5.2

Název činitele	Potřeba činitelů na jednotku				Disponibilní množství činitelů
	V_1	V_2	...	V_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
:	:	:		:	:
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Cena jednotky výrobku	c_1	c_2	...	c_n	

Zde a_{ij} znamená množství činitele S_i, potřebné na výrobu jednotky výrobku V_j; b_i znamená maximální disponibilní množství činitele S_i a c_j znamená cenu jednotky výrobku V_j.

Označíme-li množství jednotlivých výrobků (tj. úroveň jednotlivých procesů) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, činí hodnota odbytu

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

celková spotřeba činitele S_i pak

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n;$$

podle podmínek příkladu nesmí tato spotřeba být větší než b_i (disponibilní množství).

Můžeme tedy problém matematicky formulovat takto: máme nalézt n nezáporných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která splňují nerovnosti (omezení)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqq b_m \end{array} \qquad (5.3)$$

a při nichž účelová funkce (lineární forma)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (5.4)$$

dosahuje maxima.

Zavedením m přídatných proměnných $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ dostaneme omezení ve formě rovnic

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x'_1 & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x'_2 & & & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & & + x'_m & = b_m \end{array} \qquad (5.5)$$

Soustava rovnic (5.5) je v kanonickém tvaru (matice koeficientů obsahuje úplnou soustavu jednotkových vektorů u m přídatných proměnných). Základní řešení

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad x'_1 = b_1, \quad x'_2 = b_2, \ldots, \quad x'_m = b_m$$

je přípustné, neboť z povahy příkladu plyne, že $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Přestože je to v daném případě prakticky neúčelné řešení (nic se při něm nevyrábí a hodnota účelové funkce se rovná nule), je dobrým východiskem pro další postup.

Uvedeme ještě stručný maticový zápis soustavy (5.5)

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{x}' \end{array}\right] = \mathbf{b}, \qquad (5.6)$$

kde **A** je původní matice koeficientů typu (m. n)
I — jednotková matice m-tého řádu
x — n-rozměrný vektor původních proměnných
x' — m-rozměrný vektor přídatných proměnných
b — vektor absolutních členů.

V ostatních případech, kdy matice koeficientů (včetně koeficientů u přídatných proměnných) neobsahuje jednotkovou bázi, lze výchozí řešení získat zaváděním tzv. pomocných proměnných, resp. celé pomocné báze.

Dejme tomu, že úloha je dána obecněji:

Maximalizovat

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

při podmínkách

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \qquad (5.7)$$

při čemž matice koeficientů neobsahuje jednotkovou bázi.

Abychom získali výchozí řešení, rozšíříme umělým způsobem soustavu rovnic (5.7) o tzv. **pomocné proměnné** $x_1'', x_2'', \ldots, x_m''$ tak, aby jejich koeficienty tvořily jednotkovou matici, tzv. pomocnou (umělou) bázi, tj. přejdeme ze soustavy rovnic (5.7) na soustavu

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_1'' \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_2'' \qquad = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_m'' = b_m \end{array} \tag{5.8}$$

Všimněme si hned rozdílu mezi přídatnými a pomocnými proměnnými. Pomocí přídatných proměnných jsme přešli ze soustavy nerovností (5.3) na ekvivalentní soustavu rovnic (5.5). Přidáním pomocných proměnných jsme však přešli ze soustavy rovnic (5.7) na rozšířenou soustavu rovnic (5.8), která jí není ekvivalentní. Hned prvnímu základnímu řešení rozšířené soustavy (5.8)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,\ x_1'' = b_1,\ x_2'' = b_2, \ldots, x_m'' = b_m$$

neodpovídá žádné řešení původní soustavy (5.7).

Zdálo by se tedy, že zavedení pomocných proměnných je neúčelné. Je však zřejmé, že každému řešení rozšířené soustavy (5.8), v němž pomocné proměnné se rovnají nule, odpovídá řešení původní soustavy omezení. Půjde tedy o to přejít při dalším postupu na taková řešení soustavy (5.8), při nichž pomocné proměnné se rovnají nule. Za tím účelem stačí řešit tento pomocný problém:

Minimalizovat lineární formy

$$z'' = x_1'' + x_2'' + \ldots + x_m'' \tag{5.9}$$

při podmínkách

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_1'' \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_2'' \qquad = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_m'' = b_m \end{array} \tag{5.8}$$

$$x_j \geqq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.10}$$

$$x_i'' \geqq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{5.11}$$

S ohledem na podmínky (5.11) musí též platit

$$z'' \geqq 0$$

Mohou zde pak nastat dva případy:

a) $\min z'' = 0$;

v tomto případě, s ohledem na (5.9), též

$$x_1'' = x_2'' = \ldots = x_m'' = 0,$$

tj. získáme výchozí řešení původní soustavy (5.7)

b) $\min z'' > 0$

Vzhledem k tomu, že každému přípustnému řešení původní soustavy (5.7) odpovídá přípustné řešení rozšířené soustavy (5.8) se $z'' = 0$, vyplývá nutně z okolnosti, že $\min z'' > 0$, že původní soustava nemá přípustné řešení.

S praktickým provedením výpočtů pomocí pomocných proměnných se seznámíme později (viz čl. 5.7). Zde jenom poznamenáme, že vylučování pomocných proměnných z řešení vyžaduje nejméně tolik iterací, kolik je pomocných proměnných. Zavádíme tedy pomocné proměnné jen v té míře, jak je to nutné. Obsahuje-li např. matice koeficientů jeden nebo několik jednotkových vektorů, nezavádíme celou pomocnou bázi, ale jen tolik pomocných vektorů, abychom získali úplnou soustavu jednotkových vektorů.

V některých případech lze v matici koeficientů získat jednotkové vektory nepatrnou úpravou původních podmínek. Tak je tomu u úloh, kde omezení jsou dána ve tvaru

$$\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}\ (\mathbf{b} \geqq \mathbf{0})$$

Vezměme např. nutriční problém (příklad 2.5). Dosadíme-li v omezeních přídatné proměnné, bude úloha znít takto:

$$\begin{array}{l} 2\,350x_1 + 3\,540x_2 + 700x_3 + 2\,830x_4 + 370x_5 + 200x_6 + 510x_7 + 1\,500x_8 + \\ + 1\,580x_9 + 2\,570x_{10} - x_1' = 3\,000 \\ \quad 61x_1 + 67x_2 + 16x_3 + 216x_4 \qquad + 25x_6 + 34x_7 + 115x_8 + \\ + 208x_9 + 184x_{10} - x_2' = 70 \\ \quad 1{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}7x_3 + 8{,}1x_4 + 0{,}3x_5 + 1{,}3x_6 + 0{,}4x_7 + 0{,}1x_8 + \\ + x_9 + 0{,}8_{10} - x_3' = 1{,}8 \\ \qquad 100x_3 \qquad + 600x_5 + 630x_6 \quad - x_4' = 75 \end{array}$$

Změníme-li v soustavě rovnic na obou stranách znaménka, dostaneme sice kanonický tvar, avšak příslušné základní řešení je nepřípustné. Původní soustavu rovnic lze však transformovat tak, že vybereme rovnici s největším absolutním členem, v našem případě je to první rovnice, a odečteme od ní postupně ostatní rovnice. Dostaneme tak tuto ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} 2\,350x_1 + 3\,540x_2 + 700x_3 + 2\,830x_4 + 370x_5 + 200x_6 + 510x_7 + 1\,500x_8 + \\ + 1\,580x_9 + 2\,570x_{10} - x_1' = 3\,000 \\ \quad 2\,289x_1 + 3\,473x_2 + 684x_3 + 2\,614x_4 + 370x_5 + 175x_6 + 476x_7 + 1\,385x_8 + \\ + 1\,372x_9 + 2\,386x_{10} - x_1' + x_2' = 2\,930 \\ \quad 2\,348{,}9x_1 + 3\,539{,}8x_2 + 699{,}3x_3 + 2\,821{,}9x_4 + 369{,}7x_5 + 198{,}7x_6 + \\ + 509{,}6x_7 + 1\,499{,}9x_8 + 1\,579x_9 + 2\,569{,}2x_{10} - x_1' + x_3' = 2\,998{,}2 \\ \quad 2\,350x_1 + 3\,540x_2 + 600x_3 + 2\,830x_4 - 230x_5 - 430x_6 + 510x_7 + 1\,500x_8 + \\ + 1\,580x_9 + 2\,570x_{10} - x_1' + x_4' = 2\,925 \end{array}$$

Matice koeficientů této soustavy obsahuje $m - 1$ jednotkových vektorů, stačí tedy doplnit jedinou pomocnou proměnnou (jediný pomocný vektor), a to právě v rovnici s největším absolutním členem.

5.3 INTERPRETACE PŘÍDATNÝCH PROMĚNNÝCH

Proměnné v úlohách lineárního programování znamenají úroveň (intenzitu) procesů charakterizovaných číselně příslušnými vektory koeficientů. Přídatné proměnné lze rovněž interpretovat jako úroveň procesů charakterizovaných příslušnými vektory, které jsou v daném případě jednotkové.

Vezměme třeba příklad 2.1. Jednotlivé procesy jsou tu charakterizovány spotřebou činitelů. Můžeme přídatnou proměnnou x'_i formálně považovat za úroveň nějakého procesu, který je charakterizován i-tým jednotkovým vektorem, tj. záleží ve spotřebě jedné jednotky i-tého činitele. Věcně tu ovšem nejde o spotřebu, ale o nevyužití příslušného činitele. Představují tedy přídatné proměnné úroveň fiktivních procesů, při nichž se nic nevyrábí a jež tedy nemají ani „cenu", tj. mají v účelové funkci koeficient nulový.

Podobně u nutričního problému je procesem nákup některé potraviny, přičemž vektor příslušného procesu udává obsah účinných složek v jednotce příslušné potraviny. Přídatnou proměnnou x'_i lze tedy považovat za úroveň procesu spočívajícího v nákupu -1 jednotky (vrácení jedné jednotky) i-té účinné složky. Nejde opět o skutečný nákup, jde vlastně o přebytečné jednotky účinných složek, obsažené v nakoupených potravinách; proto také zde mají tyto procesy „cenu" nulovou.

Interpretace přídatných proměnných jako úroveň fiktivních procesů se jeví účelnou pro zjednodušení výkladu.

5.4 KRITÉRIUM OPTIMÁLNOSTI

Přejdeme nyní k obecnému posouzení kritéria optimálnosti. Předpokládejme, že jsme vyšli z úlohy lineárního programování formulované v čl. 2.3.

Považujeme-li z za $(n + 1)$-ní proměnnou, můžeme úlohu formulovat také takto: Řešit soustavu $m + 1$ rovnic o $n + 1$ neznámých,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Přitom musí být

$$x_j \geqq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

a z má dosáhnout maximální hodnoty.

Přípustné řešení úlohy najdeme tak, že převedeme soustavu (5.12) na kanonický tvar s nezápornými pravými stranami u prvních m rovnic.

Dejme tomu, že takové řešení už máme a pro určitost předpokládejme, že základními proměnnými jsou kromě z právě první m proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_m$. To znamená, že máme soustavu (5.12) převedenou na tvar

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \alpha_{10} \\ x_2 \quad + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \alpha_{20} \\ x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \alpha_{m0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z \quad + \alpha_{0,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{0n}x_n &= \alpha_{00} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Zde

$$\alpha_{i0} \geqq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Dosadíme-li za nezákladní proměnné nuly, dostaneme základní řešení

$$x_1 = \alpha_{10}, \quad x_2 = \alpha_{20}, \ldots, \quad x_m = \alpha_{m0}, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$
$$z = \alpha_{00}$$

Toto řešení je optimální, jestliže přechodem na jiné přípustné řešení není už možno zvýšit hodnotu účelové funkce. Je-li možno hodnotu z zvýšit, pak řešení optimální není. Máme-li na paměti, že z kanonického tvaru (5.13) můžeme dostat kterékoli řešení soustavy, dosadíme-li za $x_{m+1}, \ldots, x_n$ vhodná čísla, můžeme snadno poznat, zda lze hodnotu z ještě zvýšit, a to podle poslední rovnice (5.13). Přeneseme-li tam nezákladní proměnné na pravou stranu, dostaneme

$$z = \alpha_{00} - \alpha_{0,m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{0n}x_n$$

Protože nám jde jenom o přípustná řešení, můžeme přejít na jiné řešení jedině tak, že v soustavě (5.13) dosadíme za některé z nezákladních proměnných kladná čísla. Dosadíme-li např. za x_{m+1} v (5.13) kladné číslo, poroste tím hodnota z jedině tehdy, jestliže

$$\alpha_{0,m+1} < 0$$

Máme tedy jednoduché formální kritérium optimality:

Jsou-li v poslední rovnici soustavy (5.13) **všechny koeficienty nezáporné,** tj. $\alpha_{0j} \geqq 0$ pro všechna j, **nelze hodnotu** z **už zvýšit a příslušné základní řešení je optimální.** Je-li aspoň jeden koeficient záporný, je možno hodnotu účelové funkce ještě zvýšit.

Jde-li o úlohu minimalizační, tj. hledáme-li řešení s minimální hodnotou z, bude základní řešení vyplývající ze soustavy (5.13) optimální, jestliže v poslední rovnici nebude ani jeden koeficient kladný.

Zkoumejme ještě, jaký je význam jednotlivých koeficientů soustavy (5.13), zejména pak koeficientů α_{0j} poslední řádky této soustavy. Za tím účelem přepišme soustavu (5.12) ve tvaru maticovém

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \hline 1 & -\mathbf{c}^T \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} z \\ \hline \mathbf{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hline 0 \end{array}\right], \tag{5.12a}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice koeficientů soustavy omezení. Přechod na kanonický tvar (5.13) předpokládá, že prvních m sloupců matice $\mathbf{A}$ je lineárně nezávislých. Označme submatici tvořenou z těchto prvních m sloupců $\mathbf{B}$ a submatici tvořenou ze zbývajících sloupců $\mathbf{A}_1$. Rozdělíme-li ve shodě s tím též vektory $\mathbf{c}$ a $\mathbf{x}$ na dvě části, tj. na m-složkový vektor $\bar{\mathbf{c}}$ a $(n - m)$ – složkový $\mathbf{c}^{(1)}$, resp. na $\bar{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{x}^{(1)}$, můžeme soustavu přepsat ještě takto:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{A}_1 \\ \hline 1 & -\bar{\mathbf{c}}^T & -\mathbf{c}^{(1)T} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z \\ \hline \bar{\mathbf{x}} \\ \hline \mathbf{x}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{5.12b}$$

Transformujeme-li vhodným způsobem matici koeficientů, dostaneme z poslední rovnice kanonický tvar (5.13). Příslušnou maticí transformace je, jak se snadno přesvědčíme,

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{-1} & 0 \\ \hline \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1} & 1 \end{array}\right]$$

Násobíme-li jí zleva obě strany poslední rovnice, dostaneme

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 \\ \hline 1 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}^{(1)T} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z \\ \hline \bar{\mathbf{x}} \\ \hline \mathbf{x}^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right], \tag{5.14}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice m-tého řádu. Soustavu (5.14) můžeme po vynásobení na levé straně rozepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ z + (\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 - \mathbf{c}^{(1)T})\,\mathbf{x}^{(1)} &= \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Soustavy (5.14) a (5.15) jsou jenom různé přepisy kanonické soustavy (5.13). V nich $\bar{\mathbf{x}}$ znamená m-rozměrný vektor základních proměnných, $\mathbf{x}^{(1)}$ je $(n - m)$-rozměrný vektor nezákladních proměnných. Podobně $\bar{\mathbf{c}}$ je vektor cen základních procesů, $\mathbf{c}^{(1)}$ pak vektor cen nezákladních procesů.

Všimněme si nyní koeficientů u nezákladní proměnné x_{m+1}. Podle (5.13) a (5.15) platí

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,m+1} \\ \alpha_{2,m+1} \\ \vdots \\ \alpha_{m,m+1} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

nebo po vynásobení obou stran (5.16) zleva maticí $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \alpha_{1,m+1} \\ \alpha_{2,m+1} \\ \vdots \\ \alpha_{m,m+1} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Poslední rovnici lze psát také ve tvaru

$$\mathbf{a}_{m+1} = \alpha_{1,m+1}\mathbf{a}_1 + \alpha_{2,m+1}\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{m,m+1}\mathbf{a}_m, \tag{5.17a}$$

kde $\mathbf{a}_{m+1}$ je $(m + 1)$-ní sloupec matice koeficientů $\mathbf{A}$ (strukturální vektor $(m + 1)$-ního procesu). Podle této rovnice jsou koeficienty $\alpha_{i,m+1}$ kanonické soustavy souřadnicemi vektoru $\mathbf{a}_{m+1}$ v bázi, kterou tvoří vektory koeficientů základních proměnných. (Totéž platí i pro další sloupcové vektory.) Věcně uvedená rovnice znamená, že každý proces je z hlediska daných omezení ekvivalentní lineární kombinaci základních procesů v tom smyslu, že bereme-li v úvahu jenom soustavu omezení (nikoli ocenění), je zcela lhostejné, zda uskutečňujeme daný proces nebo kombinaci základních procesů jemu podle (5.17a) ekvivalentní. Koeficient α_{ij} udává právě, kolik jednotek i-tého základního procesu je obsaženo v kombinaci základních procesů, ekvivalentní s procesem j-tým.

Pokud jde o koeficienty α_{0j}, jak vyplývá ze srovnání poslední řádky (5.13) a (5.15),

$$\alpha_{0j} = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j\,(j = m + 1, m + 2, \ldots, n) \tag{5.18}$$

Dosadíme-li obdobně s (5.16) $[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j]^T = [\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}]$ a násobíme-li $\bar{\mathbf{c}}$, dostaneme

$$\alpha_{0j} = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \ldots + \alpha_{mj}c_m - c_j = c_j' - c_j \tag{5.18a}$$

Zde $c_j' = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \ldots + \alpha_{mj}c_m$ znamená podle toho, co bylo uvedeno, cenu kombinace základních procesů ekvivalentní jednotce j-tého procesu. Koeficient α_{0j} je tedy záporně vzatý rozdíl mezi cenou j-tého procesu a cenou ekvivalentní kombinace základních procesů, jak jsme ostatně viděli v příkladě (5.1).

Kritérium optimality dostává tím velmi názornou interpretaci. Je-li účelem maximalizovat úhrnnou cenu realizovaných procesů, pak daná kombinace základních procesů dává optimální řešení, jestliže žádný z nezákladních procesů nemá cenu vyšší než ekvivalentní kombinace základních procesů.

Vraťme se ještě k soustavě (5.12). Převést tuto soustavu na kanonický tvar znamená obecně transformovat vhodným způsobem soustavu vektorů koeficientů tak, aby obsahovala úplnou soustavu jednotkových vektorů (tj. tolik, kolik je hodnost matice koeficientů, v našem případě $m + 1$). Protože mezi jednotkovými vektory má stále být obsažen vektor koeficientů z, vyžaduje to především vybrat v matici $\mathbf{A}$ soustavu m lineárně nezávislých sloupců. Matici z nich utvořenou ($\mathbf{B}$) nazveme v dalším výkladu pro stručnost bází a matici k ní inverzní $\mathbf{B}^{-1}$ inverzní bází. Máme-li vybráno $\mathbf{B}$ a známe-li $\mathbf{B}^{-1}$, můžeme potřebnou transformaci snadno provést. Kanonická soustava má obecně tvar (srovnej s (5.14))

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \\ \hline 1 & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z \\ \hline \mathbf{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]; \tag{5.19}$$

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ je zde transformovaná matice koeficientů soustavy omezení,
$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ je transformovaný vektor absolutních členů, tj. jeho souřadnice dávají hodnoty základních proměnných v příslušném základním řešení,
$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ je hodnota účelové funkce při daném základním řešení,
$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ je n-rozměrný vektor; jeho souřadnice jsou uvedeny již rozdíly $c'_j - c_j$.

Protože nás zajímají jenom přípustná řešení, musíme bázi $\mathbf{B}$ volit tak, aby

$$\mathbf{B}^{-1}b \geqq \mathbf{0}$$

Takovou bázi $\mathbf{B}$ nazveme stručně přípustnou bází. Jestliže

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0},$$

pak podle předchozího je $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ maximální hodnotou účelové funkce.

5.5 ZLEPŠOVÁNÍ ŘEŠENÍ

Předpokládejme, že v soustavě jsou některá α_{0j} záporná, tj. že je možno zvýšit hodnotu účelové funkce. Zlepšit řešení je možno zřejmě tak, že zařadíme do řešení kteroukoli nezákladní proměnnou x_j, pro niž $\alpha_{0j} < 0$. Je-li v poslední rovnici (5.13) několik koeficientů záporných, vzniká otázka, kterou z uvedených proměnných zařadit do nového řešení, a ovšem také, kterou z proměnných z řešení vyloučit. Zásadně je možno zařadit do řešení kteroukoli proměnnou x_j, pro niž $\alpha_{0j} < 0$. Zařazením této proměnné hodnota účelové funkce vzroste o Δ:

$$\Delta = -\alpha_{0j}x_j \quad (j = m + 1,\ m + 2,\ \ldots,\ n)$$

K urychlení optimalizačního procesu je účelné volit tu proměnnou, jejímž zařazením účelová funkce vzroste nejvíce. Přírůstek z závisí, jak vidíme, jednak na hodnotě koeficientů α_{0j}, tu známe z poslední rovnice (5.13), jednak na hodnotě x_j v novém řešení, již předem neznáme. Určit tuto hodnotu u všech proměnných, které přicházejí v úvahu pro zařazení do řešení, je obvykle velmi pracné. Spokojujeme se proto zpravidla s tím, že zařadíme tu proměnnou x_j, u které koeficient α_{0j} má největší absolutní hodnotu.

Dejme tomu, že chceme konkrétně zařadit do řešení proměnnou x_{m+1} (resp. zařadit do báze vektor $\mathbf{a}_{m+1}$). Je otázka, kterou proměnnou máme přitom z řešení vyloučit.

Dosadíme-li za x_{m+1} kladné číslo a za ostatní x_j ($j = m + 2, \ldots, n$) nuly, bude podle (5.13)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{10} - \alpha_{1,m+1}x_{m+1} \\ x_2 &= \alpha_{20} - \alpha_{2,m+1}x_{m+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \alpha_{m0} - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} \end{aligned} \tag{5.20}$$

S ohledem na požadavek nezápornosti musí tedy platit

$$\alpha_{i0} - \alpha_{i,m+1}x_{m+1} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Tento požadavek je automaticky splněn pro všechna i, pro něž $\alpha_{i,m+1} \leqq 0$. Pro všechna i, pro něž $\alpha_{i,m+1} > 0$, musí zařazená proměnná splnit podmínku plynoucí z (5.20)

$$x_{m+1} \leqq \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{i,m+1}}$$

Jestliže je kladných koeficientů $\alpha_{i,m+1}$ několik, musíme vypočíst všechny zlomky tvaru

$$\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{i,m+1}}$$

a určit nejmenší z nich. Dejme tomu, že nejmenší z těchto zlomků je v k-té rovnici, tj. že

$$\frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{k,m+1}} = \min_i \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{i,m+1}}$$

Hodnota x_{m+1} nesmí být větší než tento zlomek. Dosadíme-li přesně

$$x_{m+1} = \frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{k,m+1}},$$

anuluje se podle (5.20) x_k a ostatní proměnné zůstanou nezáporné. Přejdeme tím na nové základní řešení s lepší hodnotou účelové funkce.

Není-li ani jeden z koeficientů $\alpha_{i,m+1}$ kladný, pak podle (5.20) je možno za x_{m+1} dosadit libovolně veliké hodnoty; řešení zůstane přípustné (nebude to už ovšem řešení základní), účelová funkce může přitom růst neomezeně.

Nyní můžeme shrnout výsledky tohoto článku:

Existují-li v poslední rovnici soustavy (5.13) záporné koeficienty, je možno hodnotu účelové funkce zvýšit tím, že zařazujeme do řešení některou z proměnných, u nichž je tento koeficient (tj. α_{0j}) záporný. Zařazujeme obvykle tu proměnnou, u níž je absolutní hodnota koeficientu α_{0j} největší. Mohou nastat dva případy:

1. Existuje nezákladní proměnná x_j s koeficientem α_{0j} záporným, taková, že ani jeden z koeficientů α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m, j = m + 1, \ldots, n)$ není kladný. Úloha pak nemá optimální řešení, účelová funkce může růst neomezeně. Tímto krokem tedy výpočet končí.

2. U všech proměnných se záporným α_{0j} se vyskytují i kladné koeficienty α_{ij}. Zvolíme pak jednu z nich, třeba x_j, za novou základní proměnnou (zařazovaná proměnná). Vypočteme podíly $\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ij}}$ v těch rovnicích, v nichž $\alpha_{ij} > 0$. Určíme nejmenší z těchto podílů; nechť jím je $\frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{kj}}$. Pak x_k bude vylučovanou proměnnou a x_j bude mít v novém řešení právě hodnotu $\frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{kj}}$. Účelová funkce vzroste přitom o $\alpha_{0j} \frac{\alpha_{k0}}{\alpha_{kj}}$.

U nového řešení se postup opakuje, tj. zkoumá se optimálnost, a není-li ani toto řešení optimální, přechází se na řešení další atd. Pokud řešení není degenerované, roste každým krokem účelová funkce o konečnou hodnotu. Nemůžeme se tedy uvedeným postupem vracet ke stejnému základnímu řešení. Protože počet základních řešení je konečný, musí simplexová metoda u nedegenerovaných úloh vést v konečném počtu kroků k jednomu z těchto dvou výsledků:

a) k optimálnímu řešení,

b) k poznatku, že účelová funkce může růst neomezeně, tj. že úloha nemá konečné optimální řešení.

U úloh degenerovaných, jak uvidíme později, se hodnota účelové funkce v některých krocích nemění. Avšak i tam je možno zabránit návratu téže báze, jak uvidíme v článku (5.10).

Tím jsme obecně vyložili simplexovou metodu. V obecném případě postupují výpočty ve dvou fázích. V první fázi se hledá výchozí základní řešení, v druhé fázi se pak řešení postupně zlepšuje. V obou fázích se používá stejného iteračního postupu, který jsme právě odvodili a který se nazývá **simplexovým algoritmem**.

Cvičení: Formulujte a odůvodněte simplexovou metodu pro úlohy minimalizační.

5.6 PRAKTICKÉ USPOŘÁDÁNÍ VÝPOČTŮ.
SIMPLEXOVÁ TABULKA

Výsledky předchozích odstavců nám dávají možnost řešit jakoukoli úlohu lineárního programování. Jde nyní o to dát výpočtům vhodnou formu a stanovit pro ně mechanická pravidla. Velmi dobře se osvědčuje tabelování výpočtů do tzv. simplexové tabulky. Existují různé úpravy simplexové tabulky; jejich podstata je však stejná. Spočívá v tom, že místo řešení soustavy rovnic se postupně transformuje soustava vektorů (rozšířená matice soustavy) způsobem popsaným v čl. 3.14, tj. postupnou výměnou jednoho vektoru báze.

Postup vysvětlíme nejlépe na příkladech.

Příklad 5.3. Podnik vyrábí čtyři výrobky a má omezení ve třech surovinách. Potřeba surovin na jednotku jednotlivých výrobků, disponibilní množství surovin i ceny jednotlivých výrobků jsou uvedeny v tab. 5.3a.

Tabulka 5.3a

Název suroviny	Potřeba surovin uvedených v legendě na jednotku výrobku				Disponibilní množství surovin
	V_1	V_2	V_3	V_4	
S_1	10	5	4	2	2 000
S_2	8	5	1,2	5,6	1 800
S_3	5	8	2,5	10	2 000
Cena jednotky výrobků uvedených v hlavičce	500	300	200	280	

Je třeba stanovit výrobní program (tj. které výrobky a v jakém množství vyrábět) tak, aby hodnota odbytu byla maximální. Předpokládá se přitom, že podnik má pro své výrobky neomezený odbyt a že nemá ani žádná jiná omezení (např. nemá plánem předepsáno, které výrobky má vyrábět).

Označíme-li množství jednotlivých výrobků x_1, x_2, x_3, x_4, pak hodnota odbytu (účelová funkce) bude činit

$$z = 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 280x_4$$

Protože spotřeba surovin nemůže překročit disponibilní množství, musí přitom platit tato omezení:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leqq 2\,000 \\ 8x_1 + 5x_2 + 1,2x_3 + 5,6x_4 &\leqq 1\,800 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2,5x_3 + 10x_4 &\leqq 2\,000 \end{aligned}$$

Zavedením přídatných proměnných získáváme z nich tyto rovnice:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x'_1 \qquad &= 2\,000 \\ 8x_1 + 5x_2 + 1{,}2x_3 + 5{,}6x_4 + \quad x'_2 \quad &= 1\,800 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2{,}5x_3 + 10x_4 + \qquad x'_3 &= 2\,000 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Tím dostaneme hned první základní řešení [0, 0, 0, 0, 2 000, 1 800, 2 000], ve kterém základními proměnnými jsou přídatné proměnné. První fáze výpočtů zde tedy odpadá. Toto řešení znamená, že ani jeden ze čtyř výrobků se nebude vyrábět ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) a že celé množství všech tří surovin zůstane nevyužito ($x'_1 = 2\,000$, $x'_2 = 1\,800$, $x'_3 = 2\,000$). Hodnota účelové funkce (v našem případě hodnota odbytu) při tomto řešení se rovná samozřejmě nule ($z = 500 \,.\, 0 + 300 \,.\, 0 + 200 \,.\, 0 + 280 \,.\, 0 + 0 \,.\, 2\,000 + 0 \,.\, 1\,800 + 0 \,.\, 2\,000 = 0$).

Přidáme-li k soustavě (5.21) anulovanou účelovou funkci

$$z - 500x_1 - 300x_2 - 200x_3 - 280x_4 = 0,$$

dostaneme soustavu čtyř rovnic o osmi neznámých, psaných hned v kanonickém tvaru.

Tabulka 5.3b

Ceny základních procesů	Báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3		
0	x'_1	$\boxed{10}$	5	4	2	1	0	0	2 000	1.
0	x'_2	8	5	1,2	5,6	0	1	0	1 800	2.
0	x'_3	5	8	2,5	10	0	0	1	2 000	3.
	z	—500	—300	—200	—280	0	0	0	0	4.

Místo soustavy čtyř rovnic o osmi neznámých napíšeme jako první část simplexové tabulky (5.3b) rozšířenou matici této soustavy, již budeme krok za krokem transformovat (tuto matici jsme ovšem mohli napsat přímo podle tab. 5.3a, aniž jsme vypsali nejdříve rovnice). Z rozšířené matice soustavy byl vynechán jedině vektor koeficientů proměnné z. Proměnná z zůstává totiž základní proměnnou v celém průběhu řešení. Příslušný vektor je tedy jednotkovým vektorem ve všech krocích a je zbytečné ho stále opisovat.

Jednotlivé sloupce tabulky jsme nadepsali symboly příslušných proměnných místo symbolů příslušných vektorů, a proto sloupec absolutních členů, který je od ostatních oddělen, není označen.

Jednotlivé řádky tabulky jsou zřejmě jednotlivé rovnice (ovšem jenom koeficienty, bez označení neznámých). Přitom je poslední řádka od ostatních oddělena, neboť příslušná rovnice (je to účelová funkce) má jinou povahu než ostatní (omezení); dává kritérium pro další postup. Vlevo je každá řádka označena symbolem příslušné základní proměnné.

Konečně úplně vlevo jsou uvedeny „ceny“ základních procesů, v daném případě nuly, neboť základními procesy jsou procesy fiktivní s cenou nulovou. Vepsání těchto cen je účelné (není však nutné) pro snadný výpočet „cen ekvivalentních kombinací“ (c'), a tím i pro snadnou kontrolu údajů řádky z (viz čl. 5.8).

Vpravo je zatím z důvodů didaktických uvedeno i pořadí jednotlivých řádků a v dalších krocích pak bude uveden i způsob jejich výpočtu.

V tabulce je obsaženo přípustné základní řešení. Čteme je takto:

Základní proměnné uvedené vlevo se rovnají číslům uvedeným v posledním sloupci vpravo, tj.

$$x'_1 = 2\,000, \qquad x'_2 = 1\,800, \qquad x'_3 = 2\,000, \qquad z = 0,$$

a ostatní proměnné se rovnají nule.

Kritérium pro to, zda a jak máme pokračovat v řešení, dává řádka označená z. Protože tam jsou záporné koeficienty, není řešení optimální.

Zařadíme v dalším kroku do řešení tu proměnnou (ten proces), u které má záporný koeficient v řádce z největší absolutní hodnotu, tedy proměnnou x_1 (s koeficientem v řádce z rovným 500). V dalším výkladu nazveme stručně sloupec zařazované proměnné **klíčovým sloupcem.**

Abychom určili vylučovanou proměnnou, dělíme čísla v posledním sloupci (absolutní členy) stejnolehlými čísly klíčového sloupce, pokud poslední čísla jsou kladná $\left(\text{pro náš příklad dostaneme zlomky } \frac{2\,000}{10}, \frac{1\,800}{8}, \frac{2\,000}{5}\right)$.

Vylučovanou proměnnou pak bude základní proměnná té řádky, v níž je nejmenší z takto získaných podílů.

V našem příkladě je nejmenší podíl $\frac{2\,000}{10}$ v první řádce, vylučujeme tedy z řešení x'_1.

Řádku obsahující vyloučenou proměnnou nazveme pro stručnost **klíčovou řádkou** a koeficient ležící v průsečíku klíčové řádky a klíčového sloupce nazveme **klíčovým prvkem** (doporučuje se klíčový prvek zřetelně označit, v naší tabulce je to provedeno zarámováním).

Při dalším řešení (v další části simplexové tabulky) postupujeme takto:

a) V legendě tabulky vyměníme symbol vylučované proměnné (u nás x'_1) za symbol zařazované proměnné (u nás x_1) a místo „ceny“ vylučovaného procesu (0) napíšeme rovněž „cenu“ zařazovaného procesu (500).

b) Vypočteme nejdříve řádku zařazované proměnné tak, ža dělíme všechny prvky klíčové řádky klíčovým prvkem.

Tabulka 5.4

			x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3		
II. krok	500	x_1	1	0,5	0,4	0,2	0,1	0	0	200	ř. 5 = $\frac{1}{10}$ × ř. 1
	0	x'_2	0	1	—2	$\boxed{4}$	—0,8	1	0	200	ř. 6 = ř. 2 — 8 × ř. 5
	0	x'_3	0	5,5	0,5	9	—0,5	0	1	1 000	ř. 7 = ř. 3 — 5 × ř. 5
		z	0	—50	0	—180	50	0	0	100 000	ř. 8 = ř. 4 + 500 × ř. 5
III. krok	500	x_1	1	0,45	0,5	0	0,14	—0,05	0	190	ř. 9 = ř. 5 — 0,2 × ř. 10
	280	x_4	0	0,25	—0,5	1	—0,2	0,25	0	50	ř. 10 = $\frac{1}{4}$ × ř. 6
	0	x'_3	0	3,25	$\boxed{5}$	0	1,3	—2,25	1	550	ř. 11 = ř. 7 — 9 × ř. 10
		z	0	—5	—90	0	14	45	0	109 000	ř. 12 = ř. 8 + 180 × ř. 10
IV. krok	500	x_1	1	0,125	0	0	0,01	0,175	—0,1	135	ř. 13 = ř. 9 — 0,5 × ř. 15
	280	x_4	0	0,575	0	1	—0,07	0,025	0,1	105	ř. 14 = ř. 10 + 0,5 × ř. 15
	200	x_3	0	0,65	1	0	0,26	—0,45	0,2	110	ř. 15 = $\frac{1}{5}$ × ř. 11
		z	0	53,5	0	0	37,4	4,5	18	118 900	ř. 16 = ř. 12 + 90 × ř. 15

c) Ostatní řádky vypočteme tak, že násobíme řádku zařazované proměnné (tj. řádku vypočtenou podle b) prvkem příslušné řádky, který se nachází v klíčovém sloupci, a součin odečteme od této řádky. Jinými slovy odečteme od každé řádky tolikanásobek řádky zařazované proměnné, aby v klíčovém sloupci zůstaly samé nuly (kromě jednotky v řádce zařazované proměnné).

Provedení je zřejmé z tabulky 5.4, kde je vpravo uvedeno, jak byly jednotlivé řádky vypočteny.

Další postup je z tabulky rovněž zřejmý. Klíčovým sloupcem v druhém kroku je sloupec čtvrtý (je tam v řádce z největší záporný koeficient v absolutní hodnotě); klíčovou řádkou je řádka druhá (podíl 200/4 je nejmenší). Vymění se tedy v dalším kroku základní proměnná x'_2 za proměnnou x_4 atd.

Ve čtvrtém kroku tabulky už není v řádce pro z žádný záporný koeficient. To znamená, že základní řešení [135, 0, 110, 105, 0, 0, 0], které dává poslední část tabulky, se už nedá zlepšit. Podle tohoto řešení může podnik za daných podmínek dosáhnout maximálního odbytu 118 900 Kčs, vyrobí-li 135 jednotek výrobku V_1, 110 jednotek výrobku V_3, 105 jednotek výrobku V_4 a nic z výrobku V_2 ($x_2 = 0$). Při tomto programu bude všech tří surovin plně využito ($x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$).

Optimální řešení, které jsme získali, je jediné. Poznáme to podle toho, že v řádce z jsou u nezákladních proměnných vesměs kladné koeficienty. To znamená, že pro všechny nezákladní proměnné je $c'_j - c_j > 0$, tj., že „cena“ příslušných procesů je nižší než „cena“ ekvivalentní kombinace základních procesů. Jejich zařazením do řešení by hodnota účelové funkce poklesla.

V praxi se ovšem často vyskytuje, že řešení není jediné, že existuje více optimálních řešení (podle čl. 4.3 jich pak existuje nekonečně mnoho). Projevuje se to tak, že v řádce z sice už neexistují záporné koeficienty, některé koeficienty i u nezákladních proměnných jsou však nulové. Vezměme tento příklad.

Příklad 5.4. Podnik vyrábí pět různých výrobků a má omezení ve dvou surovinách a v kapacitě slévárny. Potřeba surovin na jednotku výrobku a nároky jednotlivých výrobků na kapacitu slévárny (v promilech) jsou uvedeny v tabulce 5.5.

Tabulka 5.5

Název činitele	Potřeba činitelů na jednotku výrobku					Disponibilní množství činitelů
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
Surovina 1	10	8	12	20	6	6 000
Surovina 2	5	6	2	4	6	2 000
Kapacita slévárny	4	1	5	4	1	1 000
Zisk na jednotku výrobku	100	90	80	120	90	

Tabulka 5.6a

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1'	x_2'	x_3'		
I. krok	0	x_1'	10	8	12	20	6	1	0	0	6 000	ř. 1
	0	x_2'	5	6	2	4	6	0	1	0	2 000	ř. 2
	0	x_3'	4	1	5	$\boxed{4}$	1	0	0	1	1 000	ř. 3
		z	—100	—90	—80	—120	—90	0	0	0	0	ř. 4
II. krok	0	x_1'	—10	3	—13	0	1	1	0	—5	1 000	ř. 5 = ř. 1 — 20×ř. 7
	0	x_2'	1	5	—3	0	$\boxed{5}$	0	1	—1	1 000	ř. 6 = ř. 2 — 4×ř. 7
	120	x_4	1	0,25	1,25	1	0,25	0	0	0,25	250	ř. 7 = 0,25×ř. 3
		z	20	—60	70	0	—60	0	0	30	30 000	ř. 8 = ř. 4 + 120×ř. 7
III. krok	0	x_1'	—10,2	2	—12,4	0	0	1	—0,2	—4,8	800	ř. 9 = ř. 5 — ř. 10
	90	x_5	0,2	1	—0,6	0	1	0	0,2	—0,2	200	ř. 10 = $\frac{1}{5}$ ×ř. 6
	120	x_4	0,95	0	1,4	1	0	0	—0,05	0,3	200	ř. 11 = ř. 7 — 0,25×ř. 10
		z	32	0	34	0	0	0	12	18	42 000	ř. 12 = ř. 8 + 60×ř. 10

Úkolem je sestavit výrobní program s maximálně dosažitelným ziskem.

Po zavedení přídatných proměnných dostaneme zde tři omezení ve formě rovnic o osmi neznámých, které sestavíme přímo do simplexové tabulky 5.6a a řešíme:

V třetím kroku už nemáme v řádce z žádné záporné číslo. Máme tedy již optimální řešení, a to řešení [0, 0, 0, 200, 200, 800, 0, 0] s hodnotou účelové funkce 42 000. Podle toho je v daném případě optimálním programem výroba 200 jednotek výrobku V_4 a 200 jednotek výrobku V_5, maximálně dosažitelný zisk je 42 000 Kčs. Je zajímavé, že v optimálním řešení jsou zastoupeny jenom dva reálné procesy (místo očekávaných tří, tj. počtu omezení); jeden ze základních procesů v optimálním řešení je fiktivní. Znamená to, že při optimálním řešení zůstává 800 jednotek první suroviny nevyužito ($x_1' = 800$).

Podobné případy, kdy z hlediska žádoucího výsledku není účelné plně využívat disponibilních činitelů, se v praxi vyskytují velmi často. Bývá to způsobeno tím, že plné využití těchto činitelů má za následek nevýhodné využití jiných činitelů.

Optimální řešení dané třetím krokem není jediné. V řádce pro z nemáme sice záporné koeficienty, avšak v druhém sloupci (tj. v sloupci nezákladní proměnné) je nula. Zařadíme-li tedy x_2 do řešení, nezmění se hodnota účelové funkce a nové řešení bude opět optimální. Proveďme další, čtvrtý krok (tab. 5.6b):

Tabulka 5.6b

IV. krok	0	x_1'	—10,6	0	—11,2	0	—2	1	—0,6	—4,4	400	ř. 13 = ř. 9 — 2× ×ř. 10
	90	x_2	0,2	1	—0,6	0	1	0	0,2	0,2	200	ř. 14 = ř. 10
	120	x_4	0,95	0	1,4	1	0	0	0,05	0,3	200	ř. 15 = ř. 11
		z	32	0	34	0	0	0	12	18	42 000	ř. 16 = ř. 9

Optimální řešení, které tu dostaneme, tj. řešení [0, 200, 0, 200, 0, 400, 0, 0], se liší od předchozího tím, že místo 200 jednotek výrobku V_5 se má vyrábět 200 jednotek stejně výnosného výrobku V_2. I u tohoto řešení zůstává první surovina nevyužita, zůstává ovšem nevyužito pouze 400 jednotek této suroviny ($x_1' = 400$).

V řádce pro z je nyní opět nula v pátém sloupci. Je zřejmé, že v dalším kroku bychom se vrátili k původnímu řešení.

Máme tedy v daném příkladě dvě optimální základní řešení, a to:

a) [0, 0, 0, 200, 200, 800, 0, 0]

b) [0, 200, 0, 200, 0, 400, 0, 0]

Optimálním řešením (ovšem nezákladním) je také každá konvexní kombinace obou těchto řešení, jako např.

$$[0, 100, 0, 200, 100, 600, 0, 0] \ldots \text{váhy } 0{,}5 \text{ a } 0{,}5$$
$$[0, 160, 0, 200, 40, 520, 0, 0] \ldots \text{váhy } 0{,}2 \text{ a } 0{,}8$$

V praxi je obvykle velmi důležité znát všechna optimální řešení, neboť se málokdy podaří zahrnout do matematické formulace všechny momenty zkoumaného problému. Obvykle řadu podružných momentů zanedbáváme buď proto, že by příliš ztížily řešení, nebo proto, že by porušily linearitu účelové funkce či omezení. Máme-li více optimálních řešení, je možno při volbě jednoho z nich brát dodatečně zřetel i na některá z dosud zanedbaných hledisek.

5.7 TECHNIKA POMOCNÝCH PROMĚNNÝCH

V předchozím článku jsme na příkladech vyložili postup řešení v případě, kdy matice koeficientů obsahuje jednotkovou bázi. Neobsahuje-li matice jednotkovou bázi, pomůžeme si (viz čl. 5.2) pomocnou bází. Postup výpočtů vyložíme opět na příkladě:

Příklad 5.5. Tři prvky, *A*, *B*, a *C*, jsou obsaženy ve čtyřech různých sloučeninách. Obsah prvků v jednotlivých sloučeninách, jakož i ceny sloučenin a potřebné množství prvků jsou uvedeny v tab. 5.7.

Tabulka 5.7

Název prvku	Množství prvku v g, které lze získat z 1 kg sloučeniny				Potřebné množství prvků v kg
	I	II	III	IV	
A	0	2	4	5	5
B	2	2	0	4	6
C	10	5	4	10	18
Ceny sloučenin Kčs/kg	15	10	12	25	

Úkolem je určit, které sloučeniny a v jakém množství je třeba nakoupit, abychom získali potřebné množství prvků za nejnižší cenu.

Procesem v daném příkladě bude nákup některé sloučeniny. Označíme-li tedy nakoupené množství jednotlivých sloučenin x_1, x_2, x_3, x_4, máme za úkol:

Minimalizovat lineární formu

$$z = 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 25x_4 \tag{5.22}$$

při podmínkách

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \geqq & 5\,000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 & \geqq & 6\,000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 & \geqq & 18\,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqq & 0 \end{array} \tag{5.23}$$

Po zavedení přídatných proměnných dostaneme omezení ve tvaru rovnic

$$\begin{array}{l} 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_1' = 5\,000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_2' = 6\,000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 - x_3' = 18\,000 \end{array} \tag{5.24}$$

Jejich matice koeficientů neobsahuje jednotkovou bázi. Jednotkovou bázi by bylo sice možno získat násobením všech tří rovnic -1, tím bychom však dospěli k nepřípustnému řešení. Zavedeme tedy pomocné proměnné, a abychom je anulovali, budeme v první fázi řešit pomocnou úlohu: *)

Na množině řešení rovnic a nerovností

$$\begin{array}{l} 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_1' + x_1'' = 5\,000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_2' + x_2'' = 6\,000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 - x_3' + x_3'' = 18\,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0, \quad x_1', x_2', x_3' \geqq 0, \quad x_1'', x_2'', x_3'' \geqq 0 \end{array} \tag{5.25}$$

minimalizovat lineární formu

$$z'' = x_1'' + x_2'' + x_3'' \tag{5.26}$$

I zde připojíme účelovou funkci v anulovaném tvaru, tj.

$$z'' - x_1'' - x_2'' - x_3'' = 0 \tag{5.27}$$

Základními proměnnými výchozího řešení jsou pomocné proměnné x_1'', x_2'', x_3''. Proto, dříve než sestavíme simplexovou tabulku, musíme tyto proměnné vyloučit z rovnice (5.27). Učiníme to tak, že k poslední rovnici přičteme všechny tři rovnice (5.25). Dostaneme tak soustavu čtyř rovnic:

$$\begin{array}{l} 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_1' + x_1'' = 5\,000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_2' + x_2'' = 6\,000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 - x_3' + x_3'' = 18\,000 \\ z'' + 12x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 19x_4 - x_1' - x_2' - x_3' = 29\,000 \end{array}$$

Můžeme ji sestavit do simplexové tabulky. Je to ovšem jenom pomocná úloha, jejímž řešením dostaneme teprve výchozí řešení vlastní úlohy. Je proto účelné vepsat do simplexové tabulky hned též původní účelovou funkci (5.22), minimalizovat nejprve z'' a jakmile z'' dosáhne nuly, minimalizovat z. Postup vysvitne z tabulky:

---

*) Jiný přístup k technice pomocných proměnných viz Korda, B.: Učebnice lineárního programování. Praha, SNTL 1962, str. 161—169.

Tabulka 5.8 a

I. krok

Ceny základ. procesů	Báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	x_1''	x_2''	x_3''		
1	x_1''	0	2	4	5	—1	0	0	1	0	0	5 000	ř. 1
1	x_2''	2	2	0	4	0	—1	0	0	1	0	6 000	ř. 2
1	x_3''	$\boxed{10}$	5	4	10	0	0	—1	0	0	1	18 000	ř. 3
	z''	12	9	8	19	—1	—1	—1	0	0	0	29 000	ř. 4
	z	—15	—10	—12	—25	0	0	0	0	0	0	0	ř. 5

Kritérium optimalizace budeme zatím hledat v řádce z''. Protože jde o problém minimalizační, je možno řešení zlepšovat, pokud v této řádce existuje kladný koeficient. Největším kladným koeficientem je zde 19 ve čtvrtém sloupci. Měli bychom tedy podle jednoduchého pravidla ze str. 122 zvolit tento sloupec za klíčový. Avšak v tomto jednoduchém příkladě snadno spočteme, že je účelnější volit za klíčový sloupec sloupec první (volbou čtvrtého sloupce by účelová funkce poklesla o 1 000 . 19 = = 19 000, volbou prvního sloupce o 1 800 . 12 = 21 600). Protože ze dvou zlomků $\frac{6000}{2}$ a $\frac{18\,000}{10}$ je menší druhý, bude klíčovou řádkou třetí řádka. Provedeme příslušný eliminační krok a dostaneme další část simplexové tabulky (tab. 5.8b).

Tabulka 5.8b

II. krok

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	x_1''	x_2''	x_3''		
x_1''	0	2	4	5	—1	0	0	1	0	0	5 000	ř. 6 = ř. 1
x_2''	0	$\boxed{1}$	—0,8	2	0	—1	0,2	0	1	—0,2	2 400	ř. 7 = ř. 2 — 2×ř. 8
x_1	1	0,5	0,4	1	0	0	—0,1	0	0	0,1	1 800	ř. 8 = 1/10×ř. 3
z''	0	3	3,2	7	—1	—1	0,2	0	0	—1,2	7 400	ř. 9 = ř. 4 — 12×ř. 8
z	0	—2,5	—6	—10	0	0	—1,5	0	0	1,5	27 000	ř. 10 = ř. 5 + + 15×ř. 8

Tabulka 5.8c

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	x_1''	x_2''	x_3''		
III. krok	x_1''	0	0	$\boxed{5,6}$	1	—1	2	—0,4	1	—2	0,4	200	ř. 11 = ř. 6 — 2×ř. 10
	x_2	0	1	—0,8	2	0	—1	0,2	0	1	—0,2	2 400	ř. 12 = ř. 7
	x_1	1	0	0,8	0	0	0,5	—0,2	0	—0,5	0,2	600	ř. 13 = ř. 9 — 0,5×ř. 12
	z''	0	0	5,6	1	—1	2	—0,4	0	—3	—0,6	200	ř. 14 = ř. 9 — 3×ř. 12
	z	0	0	—8	—5	0	—2,5	—1	0	2,5	1	33 000	ř. 15 = ř. 10 + 2,5×ř. 12
IV. krok	x_3	0	0	1	10/56	—10/56	$\boxed{20/56}$	—4/56	10/56	—20/56	4/56	250/7	ř. 16 = 1/5,6×ř. 11
	x_2	0	1	0	15/7	—1/7	—5/7	1/7	1/7	5/7	—1/7	17 000/7	ř. 17 = ř. 12 + 0,8×ř. 11
	x_1	1	0	0	—1/7	1/7	3/14	—1/7	—1/7	—3/14	1/7	4 000/7	ř. 18 = ř. 13 — 0,8×ř. 11
	z''	0	0	0	0	0	0	0	—1	—1	—1	0	ř. 19 = ř. 14 — 5,6×ř. 11
	z	0	0	0	—25/7	—10/7	5/14	—11/7	10/7	—5/14	11/7	233 000/7	ř. 20 = ř. 15 + 8×ř. 11

Zde se opět odchýlíme od jednoduchého pravidla a volíme za klíčový sloupec sloupec druhý, neboť dává lepší výsledek než sloupec čtvrtý (sloupec čtvrtý by vedl k snížení hodnoty účelové funkce o 1 000 . 7 = 7 000, zatímco sloupec druhý dává snížení 2 400 . 3 = 7 200). Klíčovou řádkou pak bude řádka druhá. Výsledek je uveden v další tabulce, která obsahuje i čtvrtý krok, jehož provedení je zřejmé z popisu na pravé straně tabulky 5.8c.

Tímto čtvrtým krokem je pomocný problém vyřešen; hodnota z'' poklesla na nulu a pomocné proměnné jsou anulovány. Máme tedy už přípustné výchozí řešení původní úlohy

$$x_1 = 4\,000/7, \qquad x_2 = 17\,000/7, \qquad x_3 = 250/7,$$

$x_4 = x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$, s hodnotou účelové funkce $z = 233\,000/7$. Můžeme tedy dále sloupce pro pomocné proměnné vynechat*) (pokud příslušné údaje nebudeme potřebovat pro jiné účely) stejně jako řádku z'' a přejít k druhé fázi. Kritérium optimalizace hledáme dále v řádce z.

Jediný kladný koeficient, po vyškrtnutí sloupců pro pomocné proměnné, je v šestém sloupci (5/14), zařadíme tedy do řešení x'_2, a protože klíčovou řádkou je přitom řádka první, bude vylučovanou proměnnou x_3. Výsledek je uveden v tab. 5.8d.

Tabulka 5.8d

		x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3		
V. krok	x'_2	0	0	2,8	0,5	—0,5	1	—0,2	100	ř. 21 = 56/20×ř. 16
	x_2	0	1	2	2,5	—0,5	0	0	2 500	ř. 22 = ř. 17 + 5/7×ř. 21
	x_1	1	0	—0,6	—0,25	0,25	0	—0,1	550	ř. 23 = ř. 18 — 3/14× ×ř. 21
	z	0	0	—1	—3,75	—1,25	0	—1,5	33 250	ř. 24 = ř. 20 — 5/14× × ř. 21

V poslední tabulce (5.8d) řádka z už neobsahuje ani jeden kladný koeficient. Dospěli jsme k optimálnímu řešení:

$$x_1 = 550, \qquad x_2 = 2\,500, \qquad x'_2 = 100, \qquad x_3 = x_4 = x'_1 = x'_3 = 0, \qquad z = 33\,250$$

Je zajímavé si povšimnout, že optimálním řešením je koupě 550 kg sloučeniny I a 2 500 kg sloučeniny II (v celkové ceně 33 250), což dává 100 g prvku B nad potřebné množství ($x'_2 = 100$). Řešení obsažené ve 4. kroku je dražší (233 000/7 ≐ ≐ 33 286), přestože neobsahuje přebytek ani jednoho prvku.

Je třeba poznamenat, že v daném příkladě nebylo bezpodmínečně nutné zavést tři pomocné proměnné. Můžeme nejdříve upravit soustavu omezení (5.24) takto:

Najdeme rovnici s největším absolutním členem, v našem příkladě je to rovnice třetí, a odečteme od ní ostatní rovnice. Dostaneme místo soustavy (5.24) ekvivalentní soustavu rovnic, jejíž matice obsahuje dva jednotkové vektory:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} + 5x_4 + x'_1 \phantom{{}+x'_2} - x'_3 &= 13\,000 \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \phantom{{}+x'_1} + x'_2 - x'_3 &= 12\,000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \phantom{{}+x'_1+x'_2} - x'_3 &= 18\,000 \end{aligned}$$

Stačí pak zavést jedinou pomocnou proměnnou x'', a to ve třetí rovnici. Jako pomocnou úlohu stačí pak minimalizovat tuto pomocnou proměnnou. Uvedeme ještě malý číselný příklad, který nemá vůbec přípustné řešení:

Příklad 5.6. Dejme tomu, že v podniku, kde jediným úzkým profilem je nějaká surovina, jsou možné dva procesy; jejich charakteristiky jsou uvedeny v tab. 5.9.

Tabulka 5.9

	Proces	
	I	II
Spotřeba suroviny v t	2	1
Výroba výrobku A v kg	10	30
Výroba výrobku B v kg	50	12

K dispozici je celkem 10 t suroviny; je třeba vyrobit nejméně 360 kg výrobku A a maximální množství výrobku B. Označíme-li intenzitu provedení jednotlivých procesů x_1, resp. x_2, půjde matematicky o tuto úlohu:

Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 10 \\ 10x_1 + 30x_2 &\geqq 360 \\ x_1, \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

nalézt maximum lineární formy

$$z = 50x_1 + 12x_2$$

---

*) Ostatně tyto sloupce bylo možno z tabulky vyškrtat postupně, jak jsme vylučovali jednotlivé pomocné proměnné, neboť je nikdy zpátky do řešení nezařazujeme.

Tabulka 5.10

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x''_1	
x'_1	2	$\boxed{1}$	1	0	0	10
x''_1	10	30	0	—1	1	360
z''	10	30	0	—1	0	360
z	—50	—12	0	0	0	0

Tabulka 5.11

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x''_1	
x_2	2	1	1	0	0	10
x''_1	—50	0	—30	—1	1	60
z''	—50	0	—30	—1	0	60
z	—26	0	12	0	0	120

Po zavedení dvou přídatných proměnných a jedné pomocné proměnné a po stejné úpravě jako u předchozí úlohy můžeme sestavit simplexovou tabulku 5.10.

V řádce z'' je největší kladný koeficient v druhém sloupci, jejž volíme klíčovým sloupcem. Klíčovou řádkou pak bude řádka první. Po provedení příslušného eliminačního kroku dostaneme tab. 5.11.

V řádce z'' není už ani jeden kladný koeficient. To znamená, že jsme u pomocné úlohy (u níž jsme měli minimalizovat $z'' = x''_1$) už dosáhli optimálního řešení; je to

$$x_2 = 10; \qquad x''_1 = 60;$$
$$x_1 = x'_1 = x'_2 = 0; \qquad z'' = 60$$

Minimální hodnotou pomocné proměnné je tedy 60, nikoli nula. To znamená, že původní úloha nemá přípustné řešení.

Vskutku v tomto jednoduchém příkladě jsme mohli bezprostředně zjistit, že úloha nemá přípustné řešení. Podmínky

$$2x_1 + x_2 \leqq 10$$
$$10x_1 + 30x_2 \geqq 360$$

nelze totiž současně splnit v nezáporných číslech, jak se snadno přesvědčíme, násobíme-li např. první z obou nerovností třiceti.

5.8 STRUČNÉ SHRNUTÍ. KONTROLA VÝSLEDKŮ

Jak jsme viděli, je simplexová metoda metodou iterační, která v konečném počtu kroků vede k výsledku. Jde v ní v podstatě o postupné transformace rozšířené matice soustavy omezení, doplněné o účelovou funkci.

Vyjděme pro určitost z této úlohy:
Nalézt n-rozměrný vektor

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$

který splňuje podmínku

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

a maximalizuje lineární formu

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Přitom $\mathbf{A}$ je matice typu $(m \,.\, n)$, $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ je m-rozměrný vektor a $\mathbf{c}$ je n-rozměrný vektor.

Výchozí část simplexové tabulky můžeme v tomto případě psát ve tvaru složené matice

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}^T & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right], \tag{5.28}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice m-tého řádu.

Je-li $\mathbf{B}_k$ bází k-té iterace, bude k-tá část simplexové tabulky mít tvar (viz 5.19)

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}_k^{-1} & \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1} & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right], \tag{5.29}$$

kde $\bar{\mathbf{c}}^T$ je vektor „cen“ základních procesů.

Tabulka 5.29 dává dobrý podklad pro kontrolu výsledků. Prvních m řádků tab. 5.29 můžeme totiž dostat přímo z (5.28), násobíme-li zleva inverzní bází $\mathbf{B}_k^{-1}$; popř. naopak, násobíme-li prvních m řádků (5.29) zleva bází $\mathbf{B}$, musíme dostat zpět prvních m řádků (5.28). Správnost poslední řádky lze pak zkontrolovat přímým výpočtem, tj. násobením prvních m řádků zleva vektorem $\bar{\mathbf{c}}^T$ (cenami základních procesů, které jsme právě z tohoto důvodu připsali vlevo k simplexové tabulce) a odečtením vektoru $\mathbf{c}^T$.

Tak např. zkontrolujeme namátkou druhý sloupec v poslední části simplexové tabulky příkladu 5.3 (str. 128). Bázi tam tvoří soustava vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_3$. Násobíme-li zleva druhý sloupec touto bází, musíme dostat zpět původní vektor $\mathbf{a}_2$, tj.

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 8 & 5{,}6 & 1{,}2 \\ 5 & 10 & 2{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}575 \\ 0{,}650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},$$

což v daném případě skutečně platí. Poslední prvek druhého sloupce (53,5) můžeme pro kontrolu vypočíst přímo tak, že násobíme prvních m prvků tohoto sloupce cenami základních procesů, sečteme a odečteme cenu druhého procesu, tj.

$$53{,}5 = 0{,}125 \,.\, 500 + 0{,}575 \,.\, 280 + 0{,}65 \,.\, 200 - 300$$

Všimněme si ještě jednotlivých částí (5.29). Submatice $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}$ je transformovaná matice koeficientů. Každý sloupec této submatice udává, kolika jednotkám základních procesů (lépe řečeno jaké kombinaci základních procesů) je z hlediska omezení ekvivalentní jedna jednotka daného procesu. To je prakticky často velmi důležitá informace. Např. u směšovacích problémů nám to říká, jak lze nahradit některou surovinu kombinací jiných.

Prvky submatice $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ (tj. poslední řádky tabulky) jsou známé již rozdíly cen ekvivalentních kombinací a cen jednotlivých procesů. Udávají, oč poklesne hodnota účelové funkce, zařadíme-li jednotku daného procesu do řešení. Vezměme jako příklad opět druhý sloupec v poslední části simplexové tabulky příkladu 5.3. V poslední řádce tam máme 53,5. Kdybychom tedy uskutečnili jednou druhý proces, poklesla by hodnota účelové funkce o 53,5. Vysvětluje se to takto: Jednotka druhého procesu dá sice hodnotu 300, avšak s ohledem na omezenost zdrojů můžeme druhý proces uskutečnit jedině tehdy, upustíme-li od provedení ekvivalentní kombinace základních procesů. Cena této ekvivalentní kombinace je

$$0{,}125 \,.\, 500 + 0{,}575 \,.\, 280 + 0{,}65 \,.\, 200 = 353{,}5;$$

o tolik se hodnota účelové funkce sníží. Celkový efekt je tedy snížení o

$$353{,}5 - 300 = 53{,}5$$

Další dvě submatice, tj. $\mathbf{B}_k^{-1}$ a $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$, mají věcně stejný význam jako předchozí dvě, avšak ve vztahu k fiktivním procesům. Souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ tedy udávají, oč poklesne hodnota účelové funkce, provedeme-li jednou příslušný fiktivní proces. „Uskutečnění fiktivního procesu“ má ovšem zvláštní význam. Tak v příkladě 5.3 znamenají fiktivní procesy nevyužití příslušných surovin (obecně činitelů). Uskutečníme-li např. jednou první fiktivní proces, znamená to, že necháme jednu jednotku první suroviny nevyužitu. Souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ tedy udávají, oč se sníží hodnota účelové funkce, necháme-li jednotku toho či onoho činitele nevyužitu, resp. oč se zvýší hodnota účelové funkce využitím další jednotky toho či onoho činitele. Znamenají tedy souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ jakési ocenění omezených činitelů. Tuto otázku osvětlíme ještě blíže v čl. 6.5.

Vektor $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b}$ je řešením, tj. jeho souřadnice udávají hodnoty základních proměnných.

Konečně skalár $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ je hodnota účelové funkce při tomto řešení. Platí-li

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1} \geqq \mathbf{0},$$

je $\mathbf{B}_k$ optimální bází, tj. základní řešení plynoucí z tab. 5.4 je optimální a $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b}$ je maximální hodnotou účelové funkce.

Simplexová metoda vyžaduje poměrně jednoduché početní operace, nicméně je u úlohy praktického rozsahu dosti pracná a vzniká přirozeně snaha zjednodušit výpočty. Snaha po zjednodušení je vedena v různých směrech. Jednak pro dosti rozsáhlé skupiny úloh se zvláštní strukturou matice koeficientů existují jednodušší metody řešení, které se však dají odvodit ze simplexové metody, jednak existuje i řada jiných univerzálních metod, které v tom či onom případě jsou výhodnější než simplexová metoda. O některých z nich pojednáme později. V tomto článku se seznámíme jenom s jednoduchou úpravou simplexové metody, při níž se vynechává v jednotlivých krocích jednotková matice. Jak jsme totiž viděli, obsahuje každý krok simplexové tabulky koeficienty soustavy lineárních rovnic v kanonickém tvaru, tj. úplnou soustavu jednotkových vektorů. Protože symboly základních proměnných jsou uvedeny vlevo v tabulce, nemůže vést k omylu, jestliže tyto jednotkové vektory vůbec vynecháme. Je jenom třeba udat vhodné mechanické pravidlo, jak přejít z jednoho řešení na druhé. K tomu účelu si opět všimejme, jak se provádí v simplexové metodě výměna základních proměnných (tab. 5.12).

Tabulka 5.12

Řešení r-tého kroku								Řešení $(r + 1)$-ního kroku							
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_j	…		x_1	x_2	…	x_i	…	x_j	…
x_r	α_{11}	α_{12}	…	α_{1i}	…	0	…	x_r	$\alpha_{11} - \alpha_{1i}\dfrac{\alpha_{j1}}{\alpha_{ji}}$	$\alpha_{12} - \alpha_{1i}\dfrac{\alpha_{j2}}{\alpha_{ji}}$	…	0	…	$-\dfrac{\alpha_{1i}}{\alpha_{ji}}$	…
x_s	α_{21}	α_{22}	…	α_{2i}	…	0	…	x_s	$\alpha_{21} - \alpha_{2i}\dfrac{\alpha_{j1}}{\alpha_{ji}}$	$\alpha_{22} - \alpha_{2i}\dfrac{\alpha_{j2}}{\alpha_{ji}}$	…	0	…	$-\dfrac{\alpha_{2i}}{\alpha_{ji}}$	…
⋮								⋮							
x_j	α_{j1}	α_{j2}	…	α_{ji}	…	1	…	x_i	$\dfrac{\alpha_{j1}}{\alpha_{ji}}$	$\dfrac{\alpha_{j2}}{\alpha_{ji}}$	…	1	…	$\dfrac{1}{\alpha_{ji}}$	…
⋮								⋮							

Vektor zařazované proměnné (klíčový sloupec) se při přechodu k další bázi transformuje na jednotkový vektor, kdežto vektor vylučované proměnné (jednotkový vektor) se transformuje takto: v klíčové řádce má převratnou hodnotu klíčového prvku, na ostatních místech má podíl ze stejnolehlých prvků klíčového sloupce a záporně vzatého klíčového prvku.

Podle toho lze postup výpočtů v simplexové tabulce při vynechání jednotkových vektorů upravit takto:

1. Výchozí řešení se sestavuje do simplexové tabulky podobně jako v předchozích kapitolách, s tím rozdílem, že se sloupce pro základní proměnné vynechávají.

2. Najde se klíčový sloupec, klíčová řádka a klíčový prvek podle stejných pravidel jako dříve.

3. Nová základní proměnná (zařazovaná proměnná) a vylučovaná proměnná si navzájem vyměňují místa, tj. v dalším kroku se symbolem zařazované proměnné označuje řádka vylučované proměnné (původní klíčová řádka), a naopak symbolem vylučované proměnné se označuje sloupec zařazované proměnné (původní klíčový sloupec).

4. Jednotlivé údaje tabulky se přitom přepočítávají takto:

a) v řádce nové základní proměnné se místo klíčového prvku napíše jeho převratná hodnota;

b) ostatní položky této řádky jsou podílem původních koeficientů a klíčového prvku;

c) ostatní položky klíčového sloupce se dělí zápornou hodnotou klíčového prvku;

d) zbývající položky se vypočtou tak, že z původních koeficientů se odečte součin čísla ležícího v téže řádce jako daná položka, avšak v klíčovém sloupci (starém), a čísla ležícího ve sloupci dané položky a v řádce nové základní proměnné.

Pro ilustraci provedeme výpočet podle upravené metody na dalším příkladě:

Příklad 5.7. Podnik vyrábí tři výrobky a potřebuje na ně tři úzkoprofilové suroviny. Potřeba surovin na jednotku produkce, jakož i disponibilní množství surovin a ceny výrobků jsou uvedeny v tab. 5.13.

Tabulka 5.13

Surovina	Výroba			Disponibilní množství surovin
	V_1	V_2	V_3	
S_1	8	—	3	5 000
S_2	2	6	4	5 000
S_3	—	8	8	6 000
Cena jednotky výrobku	50	64	70	

Podnik musí dále podle plánu vyrobit 400 jednotek V_1, 300 jednotek V_2 a 350 jednotek V_3. Nad plán může podnik vyrábět, pokud nemá omezení v odbytu. Pro první dva výrobky má podnik zaručen prakticky neomezený odbyt, u třetího výrobku je odbyt omezen na 400 jednotek.

Při jakém výrobním programu bude mít podnik maximální hodnotu produkce, nemá-li jiná omezení?

Je zřejmé, že reálným procesem v daném případě bude výroba některého výrobku. Označíme-li úroveň j-tého procesu jako obvykle symbolem x_j, bude hodnota produkce (účelová funkce) dána výrazem

$$50x_1 + 64x_2 + 70x_3$$

Omezení zde budou trojího druhu:

a) omezení na straně vstupu, tj. omezení v surovinách, dají se vyjádřit nerovnostmi

$$\begin{aligned} 8x_1 \qquad\quad + 3x_3 &\leqq 5\,000 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\leqq 5\,000 \\ 8x_2 + 8x_3 &\leqq 6\,000, \end{aligned}$$

b) omezení na straně výstupu daná plánem

$$x_1 \geqq 400, \quad x_2 \geqq 300, \quad x_3 \geqq 350$$

c) konečně omezení odbytová (rovněž na straně výstupu)

$$x_3 \leqq 400$$

Máme tedy celkem 7 omezení.

Ukážeme nejdříve, že omezení sub b), jaká se v plánovaném hospodářství budou často vyskytovat, je zbytečné řešit jako samostatné rovnice. Tato omezení lze totiž psát ve formě

$$x_1 - 400 \geqq 0, \quad x_2 - 300 \geqq 0, \quad x_3 - 350 \geqq 0$$

Místo toho, abychom považovali za proměnné našeho problému celkovou produkci, můžeme za ně považovat produkci nad plán, tj.

$$x_1 - 400, \quad x_2 - 300, \quad x_3 - 350$$

Potom však omezení sub b) se zřejmě mění na běžné podmínky nezápornosti. Dosadíme-li tedy

$$x_1 - 400 = \bar{x}_1, \quad x_2 - 300 = \bar{x}_2, \quad x_3 - 350 = \bar{x}_3,$$

kde $\bar{x}_j$ je nadplánová produkce j-tého výrobku, dostaneme účelovou funkci ve tvaru

$$z = 50\bar{x}_1 + 64\bar{x}_2 + 70\bar{x}_3 + 63\,700,$$

a místo původních omezení tato:

$$\begin{aligned} 8\bar{x}_1 \qquad\quad + 3\bar{x}_3 &\leqq 750 \\ 2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 &\leqq 1\,000 \\ 8\bar{x}_2 + 8\bar{x}_3 &\leqq 800 \\ \bar{x}_3 &\leqq 50 \\ \bar{x}_1 \geqq 0; \quad \bar{x}_2 \geqq 0; \quad \bar{x}_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Pokud jde o účelovou funkci, je zřejmé, že konstantu 63 700 (je to vlastně hodnota plánované produkce) můžeme vynechat, resp. přenést na levou stranu, a maximalizovat funkci

$$z - 63\,700 = 50\bar{x}_1 + 64\bar{x}_2 + 70\bar{x}_3,$$

tj. nadplánovou produkci.

Nyní již můžeme napsat přímo simplexovou tabulku 5.14a a řešit příklad podle výše uvedeného návodu. První krok simplexové tabulky bude mít tvar:

Tabulka 5.14a

I. krok

		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	
0	y_1	8	—	3	750
0	y_2	2	6	4	1 000
0	y_3	—	8	8	800
0	y_4	—	—	$\boxed{1}$	50
	z	—50	—64	—70	0

Přídatné proměnné y_1, y_2, y_3 znamenají tedy nevyužití surovin, přídatná proměnná y_4 znamená, oč je nadplánová výroba V_3 menší než 50.

Základní řešení dané touto tabulkou [0, 0, 0, 750, 1 000, 800, 50] znamená, že se nad plán nebude nic vyrábět ($\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$), že zůstane nevyužito 750 jednotek první suroviny, 1 000 jednotek druhé a 800 jednotek třetí suroviny a že nadplánová výroba V_3 bude o plných 50 jednotek menší než maximálně přípustných 50 ($y_4 = 50$).

Protože klíčovým prvkem je tu jednotka, je přechod k dalšímu kroku velmi jednoduchý. Symboly $\bar{x}_3$ a y_4 (zařazovaná a vylučovaná proměnná) si vymění místa, poslední řádka zůstane nezměněna; v klíčovém sloupci se změní jenom znaménka (kromě znaménka klíčového prvku). Protože v prvních dvou sloupcích je v klíčové řádce nula, nezmění se tyto sloupce vůbec. V posledním sloupci odečteme od jednotlivých položek součin stejnolehlého prvku klíčového sloupce a klíčové řádky (tedy $0 - (-70) . 50$; $750 - 3 . 50$; atd.). Dostaneme tab. 5.14b.

Klíčovým sloupcem je nyní sloupec druhý, klíčovou řádkou řádka třetí. Proto si vyměňují y_3 a $\bar{x}_2$ místa. Po příslušných přepočtech dostaneme třetí a další části simplexové tabulky (tab. 5.14c, 5.14d, 5.14e).

Tabulka 5.14b

II. krok

		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y_4	
0	y_1	8	—	—3	600
0	y_2	2	6	—4	800
0	y_3	—	$\boxed{8}$	—8	400
70	$\bar{x}_3$	—	—	1	50
	z	—50	—64	70	3 500

Tabulka 5.14c

III. krok

		$\bar{x}_1$	y_3	y_4	
0	y_1	$\boxed{8}$	—	—3	600
0	y_2	2	—6/8	2	500
64	$\bar{x}_2$	—	1/8	—1	50
70	$\bar{x}_3$	—	—	1	50
	z	—50	8	6	6 700

Tabulka 5.14d

IV. krok

		y_1	y_3	y_4	
50	$\bar{x}_1$	1/8	—	—3/8	75
0	y_2	—1/4	—6/8	11/4	350
64	$\bar{x}_2$	—	1/8	—1	50
70	$\bar{x}_3$	—	—	$\boxed{1}$	50
	z	50/8	8	—102/8	10 450

Tabulka 5.14e

			y_1	y_3	$\bar{x}_3$	
V. krok	50	$\bar{x}_1$	1/8	—	3/8	93,75
	0	y_2	—1/4	—6/8	—11/4	212,5
	64	$\bar{x}_2$	—	1/8	1	100
	0	y_4	—	—	1	50
		z	50/8	8	102/8	11 087,5

V pátém kroku máme zřejmě už optimální řešení [93,75; 100; 0; 0; 212,5; 0; 50]. Podle toho maximální hodnota produkce nad plán je 11 087,50 Kčs (hodnota celkové produkce je ovšem o 63 700 Kčs větší). Dosáhne se jí při výrobě 93,75 jednotek V_1 a 100 jednotek V_2 nad plán. Přitom 212,5 jednotek druhé suroviny zůstane nevyužito (y_2 = 212,5) a z výrobku V_3 nebude nic vyrobeno nad plán (y_4 = 50 znamená, že u výrobku V_3 bude vyrobeno nad plán o 50 jednotek méně než maximálně přípustných 50 jednotek).

Jde-li o kusovou výrobu, není toto řešení přípustné (pak totiž nelze vyrobit 93,75 jednotek V_1) a je nutno je upravit (viz čl. 10.3).

Poznámka: V právě probraném příkladě byly všechny proměnné omezeny zdola ($x_1 \geqq 400$, $x_2 \geqq 300$, $x_3 \geqq 350$) a proměnná x_3 byla omezena i shora ($x_3 \leqq 400$).

Pokud jde o omezení proměnných zdola, ukázali jsme, že je zbytečné s nimi počítat jako se samostatnými rovnicemi. Později v čl. 10.1 se seznámíme s metodou, při níž ani omezení shora, tj. ani omezení typu $x_i \leqq b_i$, není nutno výslovně uvádět.

5.10 ŘEŠENÍ DEGENEROVANÝCH ÚLOH

V čl. 5.5 jsme uvedli, že simplexová metoda vede v konečném počtu kroků k optimálnímu řešení (pokud problém má konečné optimální řešení), přičemž při každé simplexové iteraci účelová funkce roste (resp. klesá, jde-li o problém minimalizační) o konečnou hodnotu. Jde-li však o problém degenerovaný, tj. mají-li v některém řešení základní proměnné hodnoty nulové, nemusí tomu tak být. Zařazujeme-li totiž do řešení novou proměnnou s hodnotou nulovou, pak hodnota účelové funkce se zřejmě nezmění (neporoste ani nepoklesne), ať má příslušné $c'_j - c_j$ jakoukoli hodnotu. Přírůstek účelové funkce se totiž rovná $(c'_j - c_j)$ násobeno hodnotou zařazované proměnné. Rovná-li se poslední nule, je i přírůstek účelové funkce nulový.

Degenerace se může objevit během simplexového postupu, a to v případě, kdy volba vylučované proměnné není jednoznačná. Někdy však degenerace vyplývá přímo z formulace úlohy. Pro ilustraci uvedeme dvě degenerované úlohy.

Příklad 5.8. Podnik vyrábí 4 výrobky, na něž potřebuje tři různé suroviny. Spotřeba surovin na jednotku produkce, disponibilní množství surovin i ceny výrobků jsou uvedeny v tab. 5.15a.

Tabulka 5.15a

Název suroviny	Potřeba surovin na jednotku výrobku				Disponibilní množství surovin
	V_1	V_2	V_3	V_4	
S_1	2	3	3	4	2 000
S_2	4	1	1	2	1 280
S_3	5	1	2	1	1 600
Cena jednotky výrobku	500	300	250	280	

Z těchto údajů můžeme sestavit přímo simplexovou tabulku 5.15b s třemi přídatnými proměnnými.

Tabulka 5.15b

			x_1	x_2	x_3	x_4	
I. krok	0	x'_1	2	3	3	4	2 000
	0	x'_2	4	1	1	2	1 280
	0	x'_3	$\boxed{5}$	1	2	1	1 600
		z	—500	—300	—250	—280	

Zařazovanou proměnnou podle našeho kritéria (největší záporný koeficient v řádce z) je zřejmě x_1. Chceme-li však určit vylučovanou proměnnou, vidíme, že jí může být jak x'_2, tak i x'_3 (u obou je totiž podíl absolutních členů a příslušného koeficientu stejný, tj. 320, a menší než příslušný podíl u x'_1).

Nelze zde tedy jednoznačně určit vylučovanou proměnnou, a můžeme postupovat zcela libovolně.*)

Je však zřejmé, že ať už zvolíme kteroukoli z obou proměnných za vylučovanou, budou mít všechny proměnné přicházející v úvahu pro zařazení do řešení v dalším (u nás v druhém) kroku hodnotu nulovou; řešení bude tedy obsahovat více nul než $n-m$ (u nás více než čtyři). Zvolme, jak označeno v tab. 5.15b, za vylučovanou x_3' a dostaneme pak druhý krok.

Tabulka 5.15c

			x_3'	x_2	x_3	x_4	
II. krok	0	x_1'	—0,4	2,6	2,2	3,6	1 360
	0	x_2'	—0,8	$\boxed{0,2}$	—0,6	1,2	—
	500	x_1	0,2	0,2	0,4	0,2	320
		z	100	—200	—50	—180	160 000

Zařazením proměnné x_2 do řešení se hodnota účelové funkce nemění, ačkoli s každou jednotkou x_2 vzroste účelová funkce o 200. V novém řešení má totiž x_2 hodnotu nulovou.

Tabulka 5.15d

			x_3'	x_2'	x_3	x_4	
III. krok	0	x_1'	$\boxed{10}$	—13	10	—12	1 360
	300	x_2	—4	5	—3	6	—
	500	x_1	1	—1	1	—1	320
		z	—700	1 000	—650	1 020	160 000

V našem příkladě se řešení v dalším kroku již zlepší. Zařazovanou proměnnou je nyní totiž x_3'. Protože proti nule je nyní záporné číslo, nebude vylučovanou proměnnou x_2, ale x_1'. Toto další řešení ukazuje tab. 5.15e.

---

*) Pro účely strojového zpracování je ovšem třeba udat jednoznačné pravidlo (třeba konvenční) pro volbu vylučované proměnné. Takovým pravidlem může např. být, že se z proměnných přicházejících v úvahu volí proměnná s nejmenším indexem.

Tabulka 5.15e

			x_1'	x_2'	x_3	x_4	
IV. krok	0	x_3'	0,1	—1,3	1	—1,2	136
	300	x_2	0,4	—0,2	1	1,2	544
	500	x_1	—0,1	0,3	—	0,2	184
		z	70	90	50	180	255 200

Řešení, které dává 4. krok [0, 184, 544, 0, 0, 0, 0, 136], je zřejmě již optimální. Znamená, že při výrobě 184 jednotek V_1 a 544 jednotek V_2 dosáhne podnik maximální hodnoty produkce 255 200 Kčs. Přitom 136 jednotek suroviny S_3 ($x_3' = 136$) zůstane nevyužito.

Příklad 5.9. Podnik vyrábí tři výrobky, *A*, *B*, *C*, a má omezení ve třech surovinách, jak je uvedeno v tab. 5.16a.

Tabulka 5.16a

Druh surovin	Spotřeba surovin na jednotku výrobku			Disponibilní množství surovin
	A	*B*	*C*	
S_1	3	1	1	500
S_2	—	2	1	460
S_3	0,5	0,8	1	240
Velkoobchodní cena jednotky výrobku	100	160	150	

Kromě toho se na výrobu každé jednotky výrobku *B* spotřebuje 0,2 jednotek výrobku *A* a na každou jednotku výrobku *C* se spotřebuje 0,1 jednotky výrobku *A* a 0,2 jednotky výrobku *B*. Jaký výrobní program zaručuje podniku největší hodnotu odbytu za předpokladu, že na počátku období neměl podnik žádnou zásobu výrobků *A* a *B*?

Zformulujme nejdříve tento problém matematicky. Označíme-li jako dosud množství produkce jednotlivých výrobků x_1, x_2, x_3, pak z okolnosti, že tři suroviny jsou k dispozici v omezeném množství, vyplývají omezení:

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 + x_3 &\leqq 500 \\ 2x_2 + x_3 &\leqq 460 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 + x_3 &\leqq 240 \end{aligned}$$

Dále množství výrobku A spotřebovaného na výrobu dalších dvou výrobků (tj. $0{,}2x_2 + 0{,}1x_3$) nesmí být zřejmě větší než výroba tohoto výrobku (x_1) čili

$$0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 \leqq x_1$$

nebo po úpravě

$$-x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 \leqq 0$$

Podobně z okolnosti, že množství výrobku B spotřebovaného na výrobu výrobku C nesmí být větší než výroba výrobku B, vyplývá omezení

$$-x_2 + 0{,}2x_3 \leqq 0$$

Máme zde celkem pět omezení, z nichž poslední dvě mají na pravé straně nuly. Po zavedení přídatných proměnných dostaneme zde hned výchozí řešení [0, 0, 0, 500, 460, 240, 0, 0], v němž se dvě základní proměnné rovnají nule.

Dříve než sestavíme simplexovou tabulku, musíme ještě zkonstruovat účelovou funkci. Je třeba si přitom uvědomit, že hodnota odbytu je dána součinem z množství určeného k odbytu a ceny jednotky. Z prvního a druhého výrobku je však k dispozici pro odbyt jen část vyrobeného množství, která zbývá po odečtení výrobní spotřeby, tj. $x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3$, resp. $x_2 - 0{,}2x_3$. Je tedy účelová funkce dána vzorcem

$$\begin{aligned} z &= 100(x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3) + 160(x_2 - 0{,}2x_3) + 150x_3 = \\ &= 100x_1 + 140x_2 + 108x_3 \end{aligned}$$

Nyní už můžeme snadno sestavit simplexovou tabulku a řešit příklad (tab. 5.16b až f).

Tabulka 5.16b

			x_1	x_2	x_3	
I.krok	0	x_1'	3	1	1	500
	0	x_2'	—	2	1	460
	0	x_3'	0,5	0,8	1	240
	0	x_4'	—1	$\boxed{0{,}2}$	0,1	—
	0	x_5'	—	—1	0,2	—
		z	—100	—140	—108	—

Tabulka 5.16c

			x_1	x_4'	x_3	
II. krok	0	x_1'	8	—5	0,5	500
	0	x_2'	$\boxed{10}$	—10	—	460
	0	x_3'	4,5	—4	0,6	240
	140	x_2	—5	5	0,5	—
	0	x_5'	—5	5	0,7	—
		z	—800	700	—38	—

Tabulka 5.16d

			x_2'	x_4'	x_3	
III. krok	0	x_1'	—0,8	$\boxed{3}$	0,5	132
	100	x_1	0,1	—1	—	46
	0	x_3'	—0,45	0,5	0,6	33
	140	x_2	0,5	—	0,5	230
	0	x_5'	0,5	—	0,7	230
		z	80	—100	—38	36 800

Tabulka 5.16e

			x_2'	x_1'	x_3	
IV. krok	0	x_4'	—4/15	1/3	—1/6	44
	100	x_1	—1/6	1/3	—1/6	90
	0	x_3'	—19/60	—1/6	$\boxed{31/60}$	11
	140	x_2	0,5	—	0,5	230
	0	x_5'	0,5	—	0,7	230
		z	160/3	100/3	—164/3	41 200

Tabulka 5.16f

			x_2'	x_1'	x_3'	
V. krok	0	x_4'	—51/310	12/31	—10/31	1 254/31
	100	x_1	—2/31	12/31	—10/31	2 680/31
	108	x_3	—19/31	—10/31	60/31	660/31
	140	x_2	25/31	5/31	—30/31	6 800/31
	0	x_5'	144/155	7/31	—42/31	6 668/31
		z	1 248/31	820/31	1 280/31	1 291 280/31

Po pátém kroku jsme dostali optimální řešení [2 680/31, 6 800/31, 660/31, 0, 0, 0, 1 254/31, 6 668/31]. Podle toho podnik dosáhne maximálního odbytu 1 291 280/31 Kčs při výrobě 2 680/31 jednotek *A*, 6 800/31 jednotek *B* a 660/31 jednotek *C*. Pro odbyt zbude přitom pouze 1 254/31 jednotek *A* (x_4') a 6 668/31 jednotek *B* (x_5'); zbytek jde na vnitropodnikovou potřebu.

Je zajímavé si povšimnout, že v obou uvedených příkladech jsme dostali nakonec optimální řešení s plným počtem základních proměnných. Nemusí tomu ovšem tak být a může se stát, že v optimálním řešení bude využito méně procesů, než je počet omezení.

V obou příkladech jsme dospěli známým již postupem k optimálnímu řešení. Tak tomu prakticky většinou bývá a dosud se nevyskytla praktická úloha, při níž by běžná simplexová metoda selhala. V zásadě však existuje možnost selhání této metody u degenerovaných úloh. Nemění-li se totiž v některých krocích hodnota účelové funkce, může se stát, že po určitém kroku se vrátíme k témuž řešení, čili že se cyklicky budou opakovat táž řešení (tytéž báze).

Je zřejmé, že u degenerovaných problémů může vzniknout potíž jedině z toho, že volba vylučované proměnné není jednoznačná a jde o to, jak tuto nejednoznačnost odstranit. Dosáhneme toho tím, že místo dané degenerované úlohy uvažujeme úlohu nedegenerovanou, konstruovanou tak, že vhodně změníme vektor absolutních členů **b**.

Předpokládejme tedy, že soustava omezení

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b} \tag{5.29}$$

je degenerovaná, tj. že *m*-rozměrný vektor **b** lze vyjádřit jako lineární kombinaci menšího počtu než *m* vektorů $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \ldots, m$). Abychom degeneraci odstranili, uvažujeme místo (5.29) poněkud pozměněnou soustavou rovnic

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{a}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \varepsilon^n \mathbf{a}_n, \tag{5.30}$$

kde ε je zatím neurčené, vhodně volené malé kladné číslo.

Je zřejmé, že má-li soustava vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ hodnost *m*, pak vektor na pravé straně nemůže být lineární kombinací menšího počtu vektorů koeficientů než *m*, tj. soustava (5.30) je nedegenerovaná. Provedeme-li na soustavě (5.30) simplexové iterace, budou se vektory **a** transformovat pochopitelně na obou stranách stejně. Číslo ε můžeme volit tak malé, aby každá přípustná báze původní úlohy byla přípustnou bází i pro pozměněnou úlohu. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků dostaneme tab. 5.17.

Tabulka 5.17

Báze	x_1	$\ldots$	x_k	$\ldots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_i	α_{i1}	$\ldots$	α_{ik}	$\ldots$	$\alpha_{i0} + \varepsilon\alpha_{i1} + \varepsilon^2\alpha_{i2} + \ldots + \varepsilon^n\alpha_{in}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_j	α_{j1}	$\ldots$	α_{jk}	$\ldots$	$\alpha_{j0} + \varepsilon\alpha_{j1} + \varepsilon^2\alpha_{j2} + \ldots + \varepsilon^n\alpha_{jn}$

Předpokládejme, že klíčovým sloupcem je zde *k*-tý sloupec, tj. že se v dalším kroku zařazuje do řešení x_k a že jako vylučované proměnné přicházejí v původní úloze v úvahu x_i a x_j, tj. α_{ik} a α_{jk} jsou kladné, dále platí

$$\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}} = \frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{jk}}$$

a tyto zlomky jsou menší než ostatní příslušné zlomky. U pozměněného problému nemůže uvedená rovnost nastat. Kdyby totiž nastala, znamenalo by to, že koeficienty obou řádků jsou navzájem přímo úměrny. Jinými slovy, znamenalo by to, že soustava rovnic není lineárně nezávislá, tj. že hodnost soustavy je menší než *m*, v rozporu s naším předpokladem. V pozměněné úloze je tedy možno vždy jednoznačně určit vylučovanou proměnnou a lze ji tedy řešit konečným počtem simplexových iterací. Limitním přechodem (protože jde o lineární výrazy, tedy prostě dosazením $\varepsilon = 0$ ve výsledku) pak přejdeme z řešení pozměněné úlohy na řešení úlohy původní.

Prakticky však není třeba žádnou pozměněnou úlohu řešit. Všimněme si totiž obou zlomků (kdyby jich bylo více, nic se na postupu nezmění), podle nichž v tab. 5.17 rozhodujeme o vylučované proměnné, tj. zlomků

$$\frac{\alpha_{i0} + \varepsilon\alpha_{i1} + \varepsilon^2\alpha_{i2} + \ldots + \varepsilon^n\alpha_{in}}{\alpha_{ik}},$$
$$\frac{\alpha_{j0} + \varepsilon\alpha_{j1} + \varepsilon^2\alpha_{j2} + \ldots + \varepsilon^n\alpha_{jn}}{\alpha_{jk}}. \tag{5.31}$$

Jsou-li $\frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{ik}}$ a $\frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{jk}}$ stejné, jak předpokládáme, pak při dostatečně malém ε bude při srovnání obou zlomků (5.31) rozhodující druhý člen v čitateli (ostatní členy obsahují vyšší mocniny ε a jsou to tedy při velmi malém ε řádově menší čísla), tj. stačí pak srovnávat zlomky $\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{ik}}$ a $\frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{jk}}$. Rovnají-li se i tyto zlomky, pokračujeme, podle téže úvahy, srovnáním zlomků $\frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{ik}}$ a $\frac{\alpha_{j2}}{\alpha_{jk}}$ atd. tak dlouho, až narazíme na dvojici zlomků $\frac{\alpha_{ir}}{\alpha_{ik}}$, $\frac{\alpha_{jr}}{\alpha_{jk}}$, která se liší. Řádka, ve které je menší zlomek, je klíčovou řádkou. Stačí si zde všimnout, že jmenovatele srovnávaných zlomků jsou stále stejné a v čitatelích se prvky α_{i0} a α_{i0} nahrazují postupně stejnolehlými prvky jednotlivých vektorů koeficientů.

5.11 Revidovaná simplexová metoda

Simplexová metoda patří k nejrozšířenějším univerzálním metodám lineárního programování; zejména pro ruční počítání je považována za metodu nejvhodnější. Při rozsáhlých úlohách je však dosti pracná. Při každé simplexové iteraci se totiž transformuje celá matice koeficientů, i kdyby některé sloupce nevcházely do báze při žádné iteraci. U úloh, u nichž počet neznámých je mnohem větší než počet rovnic, je pravděpodobné, že řada sloupců nepřichází pro optimální řešení vůbec v úvahu; postupná transformace těchto sloupců je tedy zbytečná práce a je oprávněná otázka, zda ji není možno ušetřit. Z této úvahy vychází určitá modifikace simplexové metody, obecně nazývaná revidovanou simplexovou metodou.

Abychom pochopili podstatu této metody, zrekapitulujme, které údaje jsou potřebné k provedení simplexové iterace a které operace se přitom uskutečňují. Vyjděme pro určitost z úlohy:

Maximalizujme $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
při podmínkách

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

a předpokládejme, že máme k-tou iteraci s bází $\mathbf{B}_k$. Pro určitost předpokládejme, že báze $\mathbf{B}_k$ se skládá právě z prvních m vektorů $\mathbf{A}$. Tvar příslušné části simplexové tabulky ukazuje tab. 5.18.

Stručně můžeme tuto tabulku napsat v maticovém tvaru takto:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}_k^{-1} & \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1} & \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right] \tag{5.32}$$

Tabulka 5.18

	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	x'_1	x'_2	…	x'_m	
x_1	1	0	…	0	$\alpha_{1,m+1}$	…	α_{1n}	$\alpha_{1,n+1}$	$\alpha_{1,n+2}$	…	$\alpha_{1,n+m}$	α_{10}
x_2	0	1	…	0	$\alpha_{2,m+1}$	…	α_{2n}	$\alpha_{2,n+1}$	$\alpha_{2,n+2}$	…	$\alpha_{2,n+m}$	α_{20}
…..	….	…	…	….	……..	…	…..	…….	…….	…	…….	……,
x_m	0	0	…	1	$\alpha_{m,m+1}$	…	α_{mn}	$\alpha_{m,n+1}$	$\alpha_{m,n+2}$	…	$\alpha_{m,n+m}$	α_{m0}
z	0	0	…	0	$\alpha_{0,m+1}$	…	α_{0n}	$\alpha_{0,n+1}$	$\alpha_{0,n+2}$	…	$\alpha_{0,n+m}$	α_{00}

K provedení další iterace je nutno znát klíčový sloupec. Kritérium pro nalezení klíčového sloupce dává poslední řádka, tj. vlastně dvojice vektorů

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \quad \text{a} \quad \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1} \tag{5.33}$$

Najdeme v ní záporný prvek s největší absolutní hodnotou. Sloupec, ve kterém tento prvek leží, je sloupcem klíčovým. Dejme tomu, že klíčovým sloupcem je právě $(m + 1)$-ní sloupec. Známe-li inverzní bázi $\mathbf{B}_k^{-1}$, je možno klíčový sloupec vypočítat přímo z výchozích údajů úlohy, a to transformací vektoru $(m + 1)$-ho procesu, tj. jeho násobením inverzní bází

$$\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{a}_{m+1} \tag{5.34}$$

Konečně, abychom určili klíčovou řádku, je třeba znát kromě klíčového sloupce též poslední sloupec tabulky, tj.

$$\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \tag{5.35}$$

Jiné údaje pro provedení další iterace nepotřebujeme. Podstatnou složkou všech uvedených údajů je inverzní báze $\mathbf{B}_k^{-1}$. Tu je nutno určit při každé iteraci. U úloh našeho typu najdeme inverzní bázi ve sloupcích pro přídatné proměnné a stačí vlastně soustavně transformovat jen tyto sloupce. Ostatní potřebné údaje je pak možno snadno vypočíst, jak je zřejmé z (5.32). Prakticky je však účelné transformovat soustavně posledních $m + 1$ sloupců simplexové tabulky. Tím dostáváme jednak inverzní bázi $\mathbf{B}_k^{-1}$, jednak druhý vektor (5.33), tj. $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$, jednak vektor (5.35) $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b}$ (tj. hodnoty základních proměnných). Vektor $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ nutný ke stanovení klíčového sloupce pak snadno určíme, násobíme-li jednotlivé sloupce matice $\mathbf{A}$ zleva vektorem $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ a odečteme cenu příslušného procesu. Zjistíme-li, který sloupec je klíčový, transformujeme jej podle (5.32), a tím je vše připraveno pro další iteraci.

Prakticky v revidované simplexové metodě se postupuje takto:

1. Sestavuje se výchozí tabulka stejně jako u obyčejné simplexové metody. Tato tabulka zůstává pak v dalším pomocnou tabulkou. K ní připojujeme v každém kroku, pro usnadnění výpočtu, sloupec obsahující prvky vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ (označíme tyto sloupce u', u'', ...). Pomocí nich vypočteme v každém kroku prvky vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$, které se připojují jako další řádky k pomocné tabulce (označíme je z', z'', ...).

2. V hlavní tabulce transformujeme pouze posledních $m + 1$ sloupců, a to tak, že zprava připojíme transformovaný klíčový sloupec a provádíme transformaci stejně jako u čl. 5.9.

Pro ilustraci budeme řešit revidovanou simplexovou metodou opět úlohu 5.3. Výchozí tabulka 5.3b, na str. 126, nám tu bude sloužit jako základ pomocné tabulky 5.19.

Tabulka 5.19

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'		u'	u''	u'''
x_1'	10	5	4	2	1	0	0	2 000	50	14	37,4
x_2'	8	5	1,2	5,6	0	1	0	1 800	0	45	4,5
x_3'	5	8	2,5	10	0	0	1	2 000	0	0	18
z'	—500	—300	—200	—280	0	0	0	0			
z''	0	—50	0	—180	50	0	0	100 000			
z'''	0	—5	—90	0	14	45	0	109 000			
z''''	0	53,5	0	0	37,4	4,5	18	118 900			

Za klíčový sloupec volíme nejprve sloupec první. Pomocí něho transformujeme poslední čtyři sloupce tabulky tak, že zprava připíšeme klíčový sloupec, určíme klíčovou řádku a pokračujeme normálně eliminační metodou (tab. 5.20).

V poslední řádce druhého kroku máme vektor $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_2^{-1}$, tj. [50, 0, 0]. Ten napíšeme do dalšího sloupce pomocné tabulky 5.19 (označeného u'). Násobíme-li zleva tímto vektorem skalárně jednotlivé sloupce matice $\mathbf{A}$ a odečteme-li příslušné ceny (c_j), dostaneme vektor $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$, který je rovněž uveden v pomocné tabulce v řádce označené z''. Podle ní volíme za klíčový sloupec sloupec čtvrtý. Násobíme jej zleva maticí $\mathbf{B}_2^{-1}$, tj.

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5{,}6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Tabulka 5.20

I. krok	x_1'	1	0	0	2 000	10
	x_2'	0	1	0	1 800	8
	x_3'	0	0	1	2 000	5
		0	0	0	0	—500
II. krok	x_1	0,1	0	0	200	0,2
	x_2'	—0,8	1	0	200	4
	x_3'	—0,5	0	1	1 000	9
		50	0	0	100 000	—180

Transformovaný klíčový sloupec připojujeme i s příslušným koeficientem z řádky z'' k hlavní tabulce; v druhém kroku už je připsán (viz tab. 5.20). Určíme klíčovou řádku a pokračujeme takto dále, jak je zřejmo z tab. 5.21.

Tabulka 5.21

III. krok	x_1	0,14	—0,05	0	190	0,5
	x_4	—0,2	0,25	0	50	—0,5
	x_3'	1,3	—2,25	1	550	5
		14	45	0	109 000	—90
IV. krok	x_1	0,01	0,175	—0,1	135	
	x_4	0,07	0,025	0,1	105	
	x_3	0,26	—0,45	0,2	110	
		37,4	4,5	18	118 900	

Po čtvrtém kroku není už v řádce z žádný záporný prvek, máme tedy optimální řešení.

Revidovaná simplexová metoda je výhodná u úloh, kde počet proměnných je podstatně větší než počet omezení, neboť může ušetřit mnoho zbytečných výpočtů.

Při ručním počítání jsou ovšem výpočty u jednotlivých iterací poněkud složitější než u obvyklé simplexové metody.

5.12 CVIČENÍ

1. Podnik vyrábí pět výrobků v ceně 64, 72, 54, 50, 52 Kčs za kg. K výrobě kg těchto výrobků (V) je potřebné toto množství surovin (S) v kg (tab. 5.22):

Tabulka 5.22

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
S_1	8	6	0	2	0
S_2	0	1	0	0	4
S_3	0	1	9	6	5

Podnik disponuje 14 q první suroviny, 2 q druhé a 4,5 q třetí suroviny. Navrhněte výrobní program zajišťující při těchto podmínkách maximální cenu odbytu.

2. Podnik má možnost vyrábět jeden výrobek šesti způsoby. Spotřeba činitelů ($Č$) v kg na kus při jednotlivých způsobech provedení (Z) je (tab. 5.23):

Tabulka 5.23

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
$Č_1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{1}{4}$	0
$Č_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	1
$Č_3$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
$Č_4$	0	1	1	$\frac{1}{4}$	0	0

Podnik má k dispozici 5 000 kg prvního činitele, 3 400 kg druhého, 9 200 kg třetího a 9 000 kg čtvrtého činitele. Cena výrobků při prvním až čtvrtém výrobním způsobu je stejná, a to 128 Kčs za kus. Cena výrobků vyrobených pátým a šestým způsobem (jsou horší jakosti) činí 110 Kčs za kus.

Vypočtěte výrobní program dávající maximální hrubou produkci.

3. Hutní závod zpracovává tři druhy rudy, obsahující tři důležité prvky:

1. ruda obsahuje v 1 t 1 kg prvního prvku
1 kg třetího prvku
2. ruda obsahuje v 1 t 1 kg druhého prvku
1 kg třetího prvku
3. ruda obsahuje v 1 t 1 kg prvního prvku
2 kg třetího prvku
Je třeba získat nejméně 350 kg prvního prvku
300 kg druhého prvku
800 kg třetího prvku

Náklady na zpracování 1 t první rudy činí 200 Kčs, druhé 150 Kčs a třetí rudy 250 Kčs. Rudy lze prakticky zabezpečit v libovolném množství.

Navrhněte výrobní program tak, aby celkové náklady byly minimální.

4. Zjistěte optimální řešení úlohy

$$\begin{aligned}
4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\geqq 7\,580\\
4x_1 + 5x_2 \qquad\qquad &\geqq 3\,250\\
4x_1 \qquad + 8x_3 + 10x_4 &\geqq 9\,280\\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &\geqq 460\\
x_j &\geqq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)\\
z = 82x_1 + 60x_2 + 64x_3 + 80x_4 \ldots \text{min.}
\end{aligned}$$

(Dejte úloze ekonomickou náplň.)

5. Podnik vyrábí výrobek na třech soustavách strojů. Pracovní doba strojů v hodinách (S), potřebná na jeden kus výrobku (V) a měsíční fond pracovní doby (F) činí (tab. 5.24):

Tabulka 5.24

	V_1	V_2	V_3	V_4	F
S_1	1	3	2	0	1 320
S_2	4	4	4	4	1 280
S_3	2	0	1	3	1 110

Cena všech výrobků je stejná, a to 66 Kčs za kus.

Sestavte výrobní program tak, aby celková cena odbytu byla maximální. Je řešení jednoznačné? Jestliže není, určete množinu optimálních základních řešení.

6. Podnik vyrábí pět výrobků (V), přičemž má tuto spotřebu polotovarů (P) v kusech, surovin (S) v kg a elektrické energie (E) ve Wh na jeden výrobek (tab. 5.25).

Zásoby polotovarů činí 5 000 ks, surovin 5 t a lze vyčerpat 15 kWh elektrické energie.

Tabulka 5.25

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
P	1	1	1	0	1
S	2	0	1	1	0
E	2	2	3	4	4

Ceny výrobků jsou 200, 150, 250, 160 a 190 Kčs.
Určete výrobní program o maximální hrubé produkci.

7. Podnik vyrábí pět druhů potravin (P), které obsahují v kg tato množství látek (L) v g (tab. 5.26):

Tabulka 5.26

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
L_1	1	0	1	0,9	1
L_2	1	1	0	0,1	0,1
L_3	0	1	1	1	0,9

Je třeba zabezpečit od každé látky aspoň 1 620 g.

Náklady na výrobu prvních tří potravin jsou stejné, a to 20 Kčs za 1 kg; u čtvrté a páté potraviny jsou rovněž stejné, a to 22 Kčs.

Určete výrobní program tak, aby úhrnné náklady na potraviny byly nejnižší.

8. Podnik vyrábí ze šesti směsí (S) tři složky (F).
Obsah složek v kg směsí měřený v dkg činí (tab. 5.27):

Tabulka 5.27

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
F_1	1	0	6	1	0	6
F_2	2	6	2	5	7	1
F_3	5	2	0	2	1	1

Minimální požadavky spotřebitelů jsou 252 kg F_1; po 42 kg F_2 a F_3. Průměrné náklady na kg zpracované směsi činí u S_1 84 Kčs, u S_2 86 Kčs, u S_3 78 Kčs, u S_4 100 Kčs, u S_5 80 Kčs a u S_6 82 Kčs.

Určete výrobní program zajišťující splnění požadavků spotřebitelů při minimálních nákladech.

KAPITOLA 6 DUALITA

6.1 OCENĚNÍ VÝROBNÍCH ČINITELŮ

Předpokládejme uzavřenou výrobní jednotku (stručně podnik), která má k dispozici určitá omezená množství výrobních činitelů (suroviny, výrobní kapacity, pracovní síly), pomocí nichž může uskutečnit několik procesů (výrobu určitých výrobků nebo provedení určitých služeb). Styk jednotky s vnějším světem je omezen na prodej výrobků a služeb za ceny, na které jednotka nemá vliv, tj. které jsou dány zvenčí (exogenně). Jednotka zřejmě bude chtít maximalizovat své výnosy. Jsou-li vstupy a výstupy u jednotlivých procesů přímo úměrny úrovni procesů, půjde o jednoduchou úlohu lineárního programování (tzv. úlohu výrobního programování), jako jsme měli třeba v příkladě 5.3.

Předpokládejme pro určitost tento případ:

Příklad 6.1. Podnik má k dispozici tři různé činitele A, B, C, v omezeném množství 800, 600, resp. 420 jednotek a může s jejich pomocí provést pět různých procesů $P_1, P_2, \ldots, P_5$, popsaných vektory $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots, \mathbf{p}_5$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 & \mathbf{p}_5 \\ \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ -1\,250 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \\ -1\,260 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \\ -1\,250 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \\ -1\,200 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ -1\,240 \end{bmatrix} \end{array}$$

První tři čísla u každého vektoru znamenají vstupy (tj. spotřebu činitelů) při jednotkové úrovni jednotlivých procesů, poslední číslo je výstup (proto je označen —) v Kčs výnosů.

Jak jsme uvedli, ceny jednotlivých výrobků, resp. služeb, které náš podnik vyrábí, jsou dány zvenčí (jsou určeny na trhu) a podniku jde vlastně o to, zpeněžit co nejlépe činitele, které má k dispozici, prostřednictvím pěti daných procesů. Pro činitele, které podnik má k dispozici, nejsou ceny stanoveny. Pro podnik by však bylo jistě užitečné mít vhodné ocenění těchto činitelů, a to takové, aby podnik mohl rychle určit, zda ten či onen proces je rentabilní, resp. zda je rentabilní přímo nějaká transakce s činiteli (nevylučujeme možnost, že za určitých obětí lze další množství některého činitele získat, popřípadě je možno činitele i přímo prodávat). Ředitel podniku může postupovat tímto způsobem:

Všimne si, že největší výnos na jednotku dává druhý proces ($\mathbf{p}_2$) a klade si tedy otázku, zda by nebylo nejrozumnější omezit se jenom na druhý proces. Druhý proces lze uskutečnit celkem 80krát, čímž jsou zásoby prvního činitele vyčerpány. To dává celkový výnos 1 260 . 80 = 100 800 Kčs. Zbývá přitom sice 440 jednotek (600 — — 80 . 2) druhého činitele a 260 jednotek (420 — 80 . 2) třetího, z nich však podnik nemůže již nic vyrobit (při každém procesu se požaduje i první činitel, který je již plně vyčerpán). Jak ocení za těchto okolností ředitel jednotlivé činitele? Protože činitele B a C má při uvedeném programu v přebytku, nemůže získání další jednotky těchto činitelů nebo ztráta jedné jednotky těchto činitelů mít vliv na celkový výnos. Za těchto okolností musí tedy činitelům B a C přisoudit ceny nulové a celkový výnos přisoudit prvnímu činiteli. To znamená, že každé jednotce činitele A přisoudí cenu 126 Kčs (100 800 : 800).

Bere-li v úvahu takto určené ceny činitelů (tj. 126 Kčs, 0 Kčs a 0 Kčs), snadno zjistí, zda je rentabilní uskutečnit i některý další proces. Stačí totiž spočítat cenu činitelů potřebných při jednotlivých procesech a porovnat ji s příslušnými výnosy. Je-li výnos z některého procesu větší než cena činitelů v něm obsažených, je jistě rentabilní takový proces uskutečnit.

Tak zjistí u prvního procesu, že cena činitelů obsažených v jednotce je 8.126 + + 5.0 + 2.0 = 1 008. Protože výnos z jednotky je 1 250 Kčs, je první proces rentabilní; na každou jednotku dá totiž další výnos 1 250 Kčs — 1 008 Kčs = 242 Kčs.

Podobně vypočte u třetího procesu, že rentabilita jednotky je 1 250 Kčs — — 10.126 Kčs — 4.0 Kčs — 1.0 Kčs = —10 Kčs (tj. proces je nerentabilní).

Pro čtvrtý proces má rentabilitu 1 200 Kčs — 5.126 Kčs — 5.0 Kčs — 6.0 Kčs = 570 Kčs; pro pátý proces 1 240 Kčs — 4.126 Kčs — 8.0 Kčs — 4.0 Kčs = 736 Kčs.

Protože pátý proces je za daných okolností nejrentabilnější, rozhodne se ředitel uskutečnit kromě druhého také pátý proces ($\mathbf{p}_5$). K uskutečnění pátého procesu je však třeba prvního činitele, ten ale k dispozici už není, leda že by upustil částečně od druhého procesu. Protože na jednotku P_2 je třeba 10 jednotek činitele A a na jednotku P_5 4 jednotek A, je zřejmé, že na jednotku P_5 je třeba upustit od $\frac{4}{10}$ jednotky P_2. Upustí-li však od 0,4 jednotky P_2, získá tím současně i 0,4 . 2 = 0,8 jednotky činitele B a 0,4 . 2 = 0,8 jednotky C. Z volných zásob bude tedy na jednotku P_5 potřebovat už jenom 7,2 (= 8 — 0,8) jednotek činitele B a 3,2 (= 4 — 0,8) jednotek činitele C. Stručně řečeno, jedna jednotka P_5 je ekvivalentní $0{,}4P_2 + + 7{,}2B + 3{,}2C$.

Protože proces P_5 je velmi rentabilní, je třeba jej uskutečnit v co největším měřítku. Snadno však ředitel zjistí, že brzy narazí na mez, jíž je v daném případě omezené množství B. Činitele B má při osmdesátinásobném provedení druhého procesu k dispozici ještě 440 jednotek. Protože na jednotku P_5 potřebuje z toho 7,2 jednotek, znamená to, že proces P_5 lze uskutečnit nejvýše $440 : 7{,}2 = \frac{550}{9}$krát. Tím bude činitel B plně vyčerpán. Provedení P_5 $\frac{550}{9}$krát rovněž vyžaduje $\frac{550}{9} . 3{,}2 = \frac{1\,760}{9}$ jednotek z volných zásob činitele C. Přitom podnik zlepší svoje příjmy o Kčs $\frac{500}{9} . 736 = \frac{404\,800}{9}$, tj. na 100 800 Kčs + $\frac{404\,800}{9}$ Kčs = $\frac{1\,312\,000}{9}$ Kčs. Uskuteční-li P_5 v tomto rozsahu, musí ovšem alikvotně snížit úroveň procesu P_2, a to o $\frac{550}{9} . 0{,}4 = \frac{220}{9}$. Celkem tedy ve zlepšeném programu bude proces P_2 uskutečněn $\frac{500}{9}$krát $\left(\text{tj. } 80 — \frac{220}{9}\right)$, proces P_5 $\frac{550}{9}$krát a zbude ještě k dispozici $\frac{580}{9}$ jednotek činitele C $\left(\text{tj. } 260 — \frac{1\,760}{9}\right)$.

Aby mohl určit, zda některý další proces je rentabilní, může se ředitel opět pokusit o vhodné ocenění činitelů. Nyní je v přebytku pouze činitel C; z důvodů již uvedených přisoudí ředitel tomuto činiteli cenu nulovou. Protože uskutečněním procesů P_2 a P_5 zpeněžil podnik činitele A a B, určí jejich cenu tak, aby hodnota činitelů obsažených v P_2 a P_5 se rovnala právě výnosu z těchto procesů. Označíme-li cenu jednotky A symbolem u_1, cenu jednotky B symbolem u_2, pak tyto ceny musí splnit relace

$$10u_1 + 2u_2 = 1\,260$$

$$4u_1 + 8u_2 = 1\,240$$

Řešením soustavy dostane

$$u_1 = \frac{950}{9} \qquad u_2 = \frac{920}{9}$$

Může se skutečně přesvědčit, že kdyby za tyto ceny mohl zpeněžit disponibilní činitele přímo, dostal by opět stejný výnos jako uskutečněním procesů P_2 a P_5 $\left(\text{tj. } \frac{1\,312\,000}{9} \text{ Kčs}\right)$.

Má-li toto nové ocenění, může opět zkoumat, zda při něm není některý další proces rentabilní.

Pro P_1 dostane rentabilitu $1\,250 — 8 . \frac{950}{9} — 5 . \frac{920}{9} — 2 . 0 = — \frac{950}{9}$, tedy P_1 je za daných podmínek nerentabilní.

Proces P_3 má rentabilitu $1\,250 — 10 . \frac{950}{9} — 4 . \frac{920}{9} — 1 . 0 = — \frac{1\,930}{9}$, je P_3 proto rovněž nerentabilní.

Pro P_4 platí $1\,200 — 5 . \frac{950}{9} — 5 . \frac{920}{9} — 6 . 0 = \frac{1\,450}{9}$. Je tedy P_4 stále ještě rentabilní a bude účelné tento proces uskutečnit. K uskutečnění procesu P_4 je třeba kromě částečně volného činitele C také činitelů A a B, vázaných plně procesy P_2 a P_5. Tyto činitele lze získat jen tak, že se upustí alikvotním podílem od uskutečnění procesů P_2 a P_5. Jaké množství těchto procesů odpovídá jednotce P_4, lze určit takto:

Na jednotku P_4 je třeba 5 jednotek A a 5 jednotek B. Upustí-li se od α jednotek P_2 a β jednotek P_5, uvolní se $10\alpha + 4\beta$ jednotek činitele A a $2\alpha + 8\beta$ činitele B. (Čísla 10 a 4 jsou první složky vektorů $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{p}_5$, čísla 2 a 8 jsou složky druhé.) Čísla α a β se pak určí v takové výši, aby se získalo právě to množství činitelů A a B, jehož je třeba na jednotku P_4, tj.

$$\begin{aligned} 10\alpha + 4\beta &= 5 \\ 2\alpha + 8\beta &= 5 \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostane se $\alpha = \frac{5}{18}$, $\beta = \frac{5}{9}$. Vynecháním $\frac{5}{18}$ jednotek procesu P_2 a $\frac{5}{9}$ jednotek procesu P_5 uvolní se také $\frac{5}{18} . 2 + \frac{5}{9} . 4 = \frac{25}{9}$ jednotek činitele C (čísla 2 a 4 jsou třetí složky vektorů $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{p}_5$). K uskutečnění procesu P_4 na jednotkové úrovni bude se tak dále potřebovat jen $6 - \frac{25}{9} = \frac{29}{9}$ volných jednotek činitele C. Stručně — jedna jednotka P_4 je ekvivalentní $\frac{5}{18} P_2 + \frac{5}{9} P_5 + \frac{29}{9} C$.

Je pochopitelné, opět vzhledem k rentabilitě procesu P_4, že je třeba uskutečnit jej v co největším rozsahu. Hranici tvoří v daném případě činitel C. Je ho k dispozici ještě $\frac{580}{9}$ jednotek. P_4 je tedy možno uskutečnit nejvýše 20krát $\left(20 = \frac{580}{9} : \frac{29}{9}\right)$. Tím se výnos podniku zvýší o $\frac{29\,000}{9}$ Kčs $\left(\text{tj. } 20 . \frac{1\,450}{9}\right)$, na 149 000 Kčs. Aby bylo možno uskutečnit 20krát P_4, je nutno upustit od $\frac{50}{9}$ jednotek P_2 $\left(\frac{50}{9} = 20 . \frac{5}{18}\right)$ a od $\frac{100}{9}$ jednotek P_5 $\left(\frac{100}{9} = 20 . \frac{5}{9}\right)$. Jinými slovy — celkem je možno uskutečnit proces P_2 50krát $\left(50 = \frac{500}{9} - \frac{50}{9}\right)$, P_5 rovněž 50krát $\left(50 = \frac{550}{9} - \frac{100}{9}\right)$ a proces P_4 20krát. Zásoby všech tří činitelů budou tím plně vyčerpány.

Aby bylo možno postupovat dále a určit, zda ještě existují rentabilní procesy, je třeba znovu ocenit činitele. Nyní je množství disponibilních činitelů zpeněženo prostřednictvím tří různých procesů. Je nutno tedy ceny činitelů stanovit tak, aby celková hodnota činitelů vstupujících do těchto tří procesů se rovnala výnosu z těchto procesů. Označí-li se dosud neznámé ceny jednotky činitele A, B, resp. C, symboly u_1, u_2 a u_3, vede to k požadavku

$$\begin{aligned} 10u_1 + 2u_2 + 2u_3 &= 1\,260 \\ 5u_1 + 5u_2 + 6u_3 &= 1\,200 \\ 4u_1 + 8u_2 + 4u_3 &= 1\,240 \end{aligned}$$

To je soustava tří rovnic o třech neznámých, u_1, u_2, u_3. Její řešení je $u_1 = 100$, $u_2 = 80$, $u_3 = 50$.

Oceňuje-li takto činitele, může ředitel podniku opět zkoumat, zda neexistuje ještě další proces, který by byl rentabilnější než realizované procesy P_2, P_4, P_5 (nebo aspoň stejně rentabilní). Pro P_1 dostane $1\,250 - 8 . 100 - 5 . 80 - 2 . 50 = -50$, tedy P_1 je nerentabilní. Podobně pro P_3 dostává $1\,250 - 10 . 100 - 4 . 80 - 1 . 50 = -120$; P_3 je rovněž nerentabilní.

Protože žádný další známý proces není už rentabilní, znamená to, že uskutečnění procesů P_2, P_4 a P_5 na úrovni 50, 20 a 50 je nejlepším programem podniku. Současně podnikové vedení stanovilo vhodné ocenění jednotlivých činitelů, 100 Kčs, 80 Kčs, resp. 50 Kčs za jednotku. Toto ocenění může mít význam v první řadě pro vnitřní zúčtování. Podnik může pomocí něho např. snadno hodnotit úsporu některého činitele (materiálu, práce), vhodnost či nevhodnost substituce (náhrady jednoho činitele jiným), vhodnost zavedení nových procesů.

Přesněji — význam těchto cen (nazývají se také **stínovými cenami** nebo **duálními cenami**) tkví v našem případě v tom, že udávají, oč se zvýší (sníží) celkový výnos, zvýší-li se (sníží-li se) disponibilní množství příslušných činitelů o jednotku. Jsou to tedy ceny, za které podnik může ještě příslušné činitele nakupovat, resp. minimální ceny, za které může činitele přímo prodávat, aby to bylo pro podnik výhodné. Z tohoto hlediska je pochopitelné, že činitele, které jsou k dispozici v nadbytečném množství, mají ceny nulové.

Je dále zřejmé již teď, že jde o ocenění relativní (i když objektivně dané): je závislé jednak na cenách, za které podnik prodává výsledky své činnosti (a je vyjádřeno ve stejných jednotkách), jednak závisí na množství disponibilních činitelů. Mění-li se toto množství, mohou se měnit i duální ceny.

Všimněme si znovu postupu (poněkud těžkopádného), jehož jsme použili. Řešili jsme vlastně úlohu:

Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 5) \\ 8x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leqq 800 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leqq 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leqq 420 \end{aligned}$$

nalézt maximum lineární formy

$$z = 1\,250x_1 + 1\,260x_2 + 1\,250x_3 + 1\,200x_4 + 1\,240x_5$$

Současně jsme však řešili i druhou úlohu, našli jsme optimální ocenění činitelů. Tuto úlohu lze formulovat jako úlohu lineárního programování. Podnik může vycházet např. z úvahy, že musí stanovit ceny činitelů pro případ přímého prodeje. Pochopitelně musí ceny určit tak, aby neutržil méně, než když činitele zpeněží prostřednictvím existujících výrobních procesů. To znamená, že označí-li ceny symboly u_1, u_2, u_3, určí je tak, aby byly splněny relace

$$\begin{aligned} 8u_1 + 5u_2 + 2u_3 &\geqq 1\,250 \\ 10u_1 + 2u_2 + 2u_3 &\geqq 1\,260 \\ 10u_1 + 4u_2 + u_3 &\geqq 1\,250 \\ 5u_1 + 5u_2 + 6u_3 &\geqq 1\,200 \\ 4u_1 + 8u_2 + 4u_3 &\geqq 1\,240 \end{aligned}$$

Z povahy věci plyne také $u_i \geqq 0$. Na druhé straně ovšem podnik nemůže požadovat přemrštěné ceny. Chce-li být realistický, určí ceny v rámci uvedených omezení tak, aby úhrnná cena všech disponibilních činitelů byla minimální, aby tedy lineární forma

$$f = 800u_1 + 600u_2 + 420u_3$$

dosáhla minima.

Obě úlohy jsou navzájem velmi úzce spjaty; vyskytují se u nich tytéž konstanty, ovšem v různém uspořádání. Říkáme, že je to dvojice úloh duálně sdružených. Jak jsme viděli v příkladě, řešením jedné úlohy se řeší současně i úloha druhá, přičemž optimální hodnota obou účelových funkcí je stejná:

$$1\,260 \,.\, 50 + 1\,200 \,.\, 20 + 1\,240 \,.\, 50 = 800 \,.\, 100 + 600 \,.\, 80 + \\ + 420 \,.\, 50 = 149\,000$$

V dalších odstavcích zavedeme pojem duality formálně a odvodíme některé základní vlastnosti duálních úloh.

6.2 Formulace duální úlohy

Ke každému problému lineárního programování lze určitým způsobem přiřadit jiný problém lineárního programování, problém duálně sdružený neboli duální, konstruovaný z týchž konstant. Dvojice sdružených problémů úzce spolu souvisí; jejich řešení mají řadu zajímavých společných vlastností, jichž lze využít při řešení různých problémů. Budeme se zabývat nejdříve tzv. **souměrným duálním problémem**.

Vyjděme ze známé formulace úlohy lineárního programování:

Úloha I. *) Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n &\geqq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

nalézt maximum lineární formy

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{6.2}$$

nebo v maticovém tvaru:

určit n-rozměrný sloupcový vektor $\mathbf{x}$, který splňuje nerovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b} \end{aligned} \tag{6.3}$$

a maximalizuje lineární formu

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x},$$

přičemž $\mathbf{A}$ je matice typu $(m \,.\, n)$,

$\mathbf{b}$ – m-rozměrný vektor,

$\mathbf{c}$ – n-rozměrný vektor.

Úloha duální k tomuto problému:

Úloha II. Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m &\geqq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m &\geqq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m &\geqq c_n \\ u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0,\ \ldots,\ u_m &\geqq 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

nalézt minimum lineární formy

$$f = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m, \tag{6.5}$$

nebo stručně:

nalézt m-rozměrný vektor $\mathbf{u}$, který splňuje nerovnosti

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{u}^T\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}^T \qquad (\text{nebo } \mathbf{A}^T\mathbf{u} \geqq \mathbf{c}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

---

*) Pro úlohu I. se používá v souvislosti s duální úlohou označení „primární úloha“.

a minimalizuje lineární formu

$$f = \mathbf{u}^T\mathbf{b}$$

Především je zřejmé, že dualita je vztah vzájemný. Úloha II je podle definice duální k úloze I; platí však také opak, úloha I je duální k úloze II. Úlohu II je totiž možno formálně psát jako úlohu maximalizační ve stejné podobě jako úlohu I. Stačí změnit za tím účelem znaménka všech konstant. Úlohu můžeme pak formulovat takto:

Nalézt m-rozměrný vektor $\mathbf{u}$, který splňuje podmínky

$$\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$$
$$-\mathbf{A}^T\mathbf{u} \leqq -\mathbf{c}$$

a maximalizuje lineární formu

$$-\mathbf{b}^T\mathbf{u}$$

Úloha k tomu duální zní:

Nalézt n-rozměrný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje podmínky

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$
$$-\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq -\mathbf{b}$$

a minimalizuje lineární formu

$$-\mathbf{c}^T\mathbf{x},$$

což po změně znaménka dává původní úlohu.

Dvojice sdružených problémů se vhodně sestavuje v tabulkové formě:

Tabulka 6.1

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	$\dots$	c_n	

Omezení jednoho problému sestavíme tak, že vektor $\mathbf{x}$ uvedený v hlavičce tabulky násobíme skalárně jednotlivými vnitřními řádky a součin položíme menší nebo rovný příslušnému koeficientu b_i. Účelová funkce se pak rovná skalárnímu součinu vektoru $\mathbf{x}$ a poslední řádky tabulky. Podobně konstruujeme ze sloupců tabulky problém duální.

V konstrukci dvojice sdružených problémů vidíme tyto vzájemné vztahy:

Jeden z problémů je maximalizační, druhý minimalizační. Přitom každému vlastnímu omezení jednoho problému odpovídá určitá proměnná (a tedy i podmínka nezápornosti) druhého problému, ale také naopak, každé proměnné (a tedy i podmínce nezápornosti) jednoho problému odpovídá vlastní omezení druhého problému. Řečeno jinak, počítáme-li k omezením též podmínky nezápornosti, je celkový počet omezení v obou problémech stejný, $m + n$, a lze je navzájem po dvojicích přiřadit. Tak např. vlastnímu omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n \leqq b_1$$

prvního problému odpovídá omezení

$$u_1 \geqq 0$$

v druhém problému, omezení

$$x_j \geqq 0$$

prvního problému odpovídá omezení

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m \geqq c_j$$

druhého problému.

Matice koeficientů jednoho problému je transponovanou maticí problému druhého. Směr nerovností v omezeních obou problémů je vzájemně opačný.

Vektor absolutních členů ($\mathbf{b}$) jednoho problému je vektorem „cen" druhého problému, a naopak.

Při formulaci duální úlohy není ovšem nutno vycházet z úlohy I. Formálně lze totiž každou úlohu lineárního programování převést na tvar úlohy I. To však má za následek některé úpravy ve formulaci duální úlohy. Uvádíme dále nejdůležitější z těchto úprav.

1. Především je možné, že v maximalizačním problému jsou některé nerovnosti opačného směru, tj. že tam jsou i nerovnosti tvaru

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i$$

Zde ale stačí změnit znaménka na obou stranách nerovnosti, a tak změnit směr nerovnosti.

Jinými slovy, na formulaci duálního problému se nic nezmění, jedině koeficienty a_{ij} a b_i tam budou se znaménkem záporným.

2. Místo nerovností jsou některá omezení dána ve tvaru rovnic. Předpokládejme např., že i-té omezení je rovnice tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

Tuto rovnici je však možno nahradit dvěma nerovnostmi:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leqq b_i$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leqq -b_i$$

To znamená, že v duální úloze budou místo proměnné u_i dvě proměnné: označme je u_i^+ a u_i^-. Pak j-té duální omezení bude mít tvar

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{ij}(u_i^+ - u_i^-) + \dots + a_{mj}u_m \geqq c_j$$

Protože obě proměnné u_i^+ a u_i^- mají až na znaménko stejné koeficienty, stačí rozdíl těchto dvou proměnných považovat za proměnnou jedinou, tj. psát

$$u_i^+ - u_i^- = u_i$$

Avšak zatímco u_i^+ a u_i^- jsou nezáporné, jejich rozdíl může být i záporný. To znamená, že je-li některé omezení v primární úloze dáno ve formě rovnice, není proměnná u_i, jemu odpovídající v duální úloze, omezena co do znaménka.

3. Může se stát, že v úloze lineárního programování není některá proměnná omezena co do znaménka; pak obrácením postupu z předchozího bodu 2 lze snadno dokázat, že odpovídající duální omezení bude rovnice.

Můžeme tedy obecně dvojici sdružených úloh formulovat takto:

Úloha první	*Úloha druhá*
Maximalizovat	Minimalizovat
$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$	$f = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m$
při podmínkách	při podmínkách
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqq b_1$	$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geqq c_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqq b_2$	$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geqq c_2$
....	....
$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \leqq b_r$	$a_{1s}u_1 + a_{2s}u_2 + \dots + a_{ms}u_m \geqq c_s$
$a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n = b_{r+1}$	$a_{1,s+1}u_1 + a_{2,s+1}u_2 + \dots + a_{m,s+1}u_m = c_{s+1}$
....	....
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$	$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m = c_n$
$x_j \geqq 0\ (j = 1, 2, \dots, s)$	$u_i \geqq 0\ (i = 1, 2, \dots, r)$

Speciálně máme tuto dvojici sdružených problémů:

Minimalizovat	Maximalizovat
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$	$f = \mathbf{u}^T\mathbf{b}$
při podmínkách	při podmínkách
$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{u}^T\mathbf{A} \leqq \mathbf{c}^T$
$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	

Znamená to, že jsou-li v jedné úloze omezení vesměs rovnice, jsou v úloze k ní duální proměnné neomezené co do znaménka. Je to **nesouměrná duální úloha.** S takto formulovanými úlohami se setkáváme při pojednání o dopravním problému.

Dvojice sdružených úloh má řadu důležitých vlastností, zajímavých jak z hlediska výpočetního, tak z hlediska ekonomické interpretace.

6.3 VLASTNOSTI DUÁLNÍCH ÚLOH

Nechť je úloha lineárního programování dána ve tvaru (6.1) a (6.2) a úloha k ní duální ve tvaru (6.4), (6.5).

Předpokládejme, že obě úlohy mají přípustná řešení:

$[x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z^0]$ je přípustné řešení soustavy (6.1),
$[u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0, f^0]$ je přípustné řešení soustavy (6.4).

Dosaďme v soustavě (6.1) $x_j = x_j^0$, násobme postupně tyto nerovnosti veličinami $u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0$, sečtěme a od součtu odečtěme účelovou funkci (6.2). Dostaneme

$$c_1'x_1^0 + c_2'x_2^0 + \dots + c_n'x_n^0 \leqq f^0 - z^0, \tag{6.7}$$

kde jsme pro stručnost zavedli označení

$$a_{1j}u_1^0 + a_{2j}u_2^0 + \dots + a_{mj}u_m^0 - c_j = c_j'$$

a podle (6.5)

$$b_1u_1^0 + b_2u_2^0 + \dots + b_mu_m^0 = f^0$$

Podle (6.4) jsou čísla c'_j zřejmě nezáporná ($\mathbf{u}_0$ je přípustné řešení). Podle (6.7) musí proto platit

$$f^0 - z^0 \geqq 0$$

čili

$$f^0 \geqq z^0 \tag{6.8}$$

To znamená, že

mají-li obě sdružené úlohy přípustná řešení, nemůže být hodnota účelové funkce f (tj. funkce, jejíž minimum hledáme) menší než hodnota účelové funkce z (jejíž maximum hledáme), a naopak libovolná přípustná hodnota z nemůže být větší než libovolná přípustná hodnota f.

Jinými slovy — mají-li obě sdružené úlohy přípustná řešení, je kterákoli hodnota f horní mezí pro účelovou funkci z a libovolná hodnota z je dolní mezí pro f; hodnota účelové funkce z je v tomto případě omezena shora a hodnota účelové funkce f je omezena zdola — obě úlohy mají tedy také optimální řešení. Platí také:

Mají-li obě sdružené úlohy přípustná řešení, mají také optimální řešení.

Podle této věty se někdy snadno pozná, zda úloha má optimální řešení. Např. standardní úloha výrobního programování:
Na množině řešení soustavy nerovností

$$\begin{aligned}
&x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqq b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqq b_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqq b_m
\end{aligned}$$

nalézt maximum lineární formy

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

kde všechny konstanty jsou nezáporné, tj.

$$a_{ij} \geqq 0, \qquad b_i \geqq 0, \qquad c_j \geqq 0$$

má optimální řešení. Úloha má totiž vždy přípustné řešení (např. $x_j = 0$ pro $j = 1, 2, \dots, n$) a úloha k ní duální rovněž.

Úloha:
Na množině řešení soustavy nerovností

$$u_i \geqq 0 \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geqq c_1\\
&a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geqq c_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \geqq c_n
\end{aligned}$$

nalézt minimum $f = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_mu_m$;

má např. řešení $u_1 = M$, $u_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, m$), kde M je dostatečně veliké číslo, takže platí $M \geqq c_j/a_{1j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Podle (6.8) platí zřejmě také pro optimální řešení

$$\min f \geqq \max z \tag{6.9}$$

Platí-li pro dvojici přípustných řešení duálně sdružených úloh, že $z^0 = f^0$, pak jsou to nutně optimální řešení obou úloh. Podle (6.8) musí totiž pro všechna ostatní řešení platit $z \leqq z^0$, tj. $z^0 = \max z$, a $f \geqq f^0$, tj. $f^0 = \min f$.

Má-li soustava (6.1) přípustné řešení, avšak hodnota účelové funkce z není shora omezena (může růst neomezeně), pak, jak plyne ze (6.8), nemůže soustava (6.4) mít vůbec přípustné řešení. Podle (6.8) muselo by totiž pro každé přípustné řešení platit $f \geqq \infty$, což je — stručně řečeno — sporné.

Má-li jedna úloha přípustné řešení, avšak hodnota účelové funkce není shora (zdola) omezena, pak úloha k ní duální nemá přípustné řešení.

Předpokládejme nyní, že úloha (6.1), (6.2) má přípustné řešení; pak je možno (kap. 5) použitím simplexové metody dospět po konečném počtu kroků buď

a) k optimálnímu řešení, nebo

b) k množině řešení, na níž účelová funkce z roste neomezeně.

Vyjdeme-li ze soustavy (6.1), doplněné přídatnými proměnnými a anulovanou účelovou funkcí

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & + x'_1 & & & = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & & + x'_2 & & = b_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & & & + x'_n & = b_m\\
-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n & & & + z & = 0
\end{array} \tag{6.1a}$$

bude mít v případě a) (tj. kdy úloha má optimální řešení) v konečném kroku simplexové metody účelová funkce tvar

$$c'_1x_1 + c'_2x_2 + \dots + c'_nx_n + c'_{n+1}x'_1 + \dots + c'_{n+m}x'_m + z = z^0, \tag{6.10}$$

kde $c'_j \geqq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n + m$) a $z^0 = \max z$.

Formu (6.10) je však možno dostat ze soustavy (6.1a) i přímo tak, že k účelové funkci přičteme lineární kombinaci prvních m rovnic, přičemž vahami jsou vhodně volené multiplikátory $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

To znamená

$$c'_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m - c_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.11}$$

$$c'_{n+k} = u_k \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.12}$$

a

$$z^0 = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m$$

Vztahy (6.11) a (6.12) znamenají, že soustava multiplikátorů $u_1, u_2, \ldots, u_m$ splňuje podmínky (6.4), je tedy přípustným řešením duální úlohy. Přitom hodnota účelové funkce

$$f = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \tag{6.13}$$

se rovná podle (6.13) hodnotě účelové funkce z. Podle (6.8) je to tedy optimální řešení duální úlohy. Proto platí:

Má-li úloha lineárního programování optimální řešení, má i úloha k ní duální optimální řešení a optimální hodnoty obou účelových funkcí jsou stejné.

Protože dualita je vztah vzájemný, platí pochopitelně i opak, tj. má-li duální úloha optimální řešení, má i primární úloha optimální řešení a optimální hodnoty účelových funkcí jsou stejné.

Z uvedeného plyne také, že **nemá-li jedna z obou sdružených úloh přípustné řešení, pak druhá úloha nemá optimální řešení, tj. buď také nemá přípustné řešení, anebo má přípustné řešení, avšak hodnota účelové funkce může růst (klesat) neomezeně.**

Nastává-li případ b), pak po konečném počtu simplexových iterací se soustava (6.1a) transformuje tak, že pro některé j bude $c'_j < 0$ a všechny koeficienty v j-tém sloupci (koeficienty u x_j) budou nekladné. Žádnou další iterací nelze pak dospět k tomu, aby v účelové funkci byly koeficienty vesměs nezáporné. To znamená, že neexistuje soustava multiplikátorů, která by splnila podmínky (6.11) a (6.12). Jinými slovy — duální úloha nemá v tomto případě přípustné řešení. Tím jsme znovu dokázali, že může-li účelová funkce jedné úlohy růst (popř. klesat) neomezeně, nemá duální úloha přípustné řešení.

Shrneme-li věty, které jsme dosud odvodili, vidíme, že mohou u dvojice duálně sdružených úloh nastat tyto případy:

a) obě úlohy mají přípustná řešení, tedy i optimální řešení a přitom optimální hodnoty obou účelových funkcí jsou stejné;

b) maximalizační úloha má přípustné řešení, ale její účelová funkce může růst neomezeně, a druhá úloha pak nemá vůbec přípustné řešení;

c) maximalizační úloha nemá přípustné řešení, avšak úloha k ní duální řešení má; pak hodnota účelové funkce duální úlohy může klesat neomezeně;

d) ani jedna z obou úloh nemá přípustné řešení.

Je třeba ještě dodat, že není nutno obě duálně sdružené úlohy samostatně řešit. Řešíme-li totiž jednu z úloh simplexovou metodou, řešíme tím automaticky i úlohu k ní duální. Obsahují-li koeficienty výchozí úlohy úplnou soustavu jednotkových vektorů [jako v (6.1a)], pak dávají koeficienty účelové funkce v posledním kroku simplexové tabulky (obsahujícím optimální řešení) optimální hodnoty duálních proměnných, a to:

koeficienty přídatných proměnných dávají m optimálních hodnot $u_1, u_2, \ldots, u_m$, jak plyne z (6.12);

koeficienty ostatních n proměnných jsou pak hodnoty přídatných proměnných duální úlohy [toto tvrzení plyne z (6.11)].

Duální omezení lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - u'_1 &= c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - u'_2 &= c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - u'_n &= c_n \end{aligned}$$

kde u'_j jsou přídatné proměnné. Z rovnice (6.11) je zřejmé, že se rovnají právě koeficientům c'_j.

Velmi jednoduše vyplývá výše uvedené z maticového znázornění simplexové tabulky. Je-li $\mathbf{B}$ optimální báze (maximalizační úlohy), pak platí $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0}$ a $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{0}$. To ale znamená, že nezáporný vektor $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$ splňuje podmínky duální úlohy (6.9) a souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ jsou právě přídatnými proměnnými duální úlohy. Dosadíme-li $\mathbf{u}^T = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$, vidíme zároveň, že hodnota účelové funkce duální úlohy $\mathbf{u}^T\mathbf{b} = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, tj. rovná se hodnotě účelové funkce z, což znamená podle (6.8), že $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$ s příslušnými přídatnými proměnnými $\mathbf{c}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T$ je optimálním řešením duální úlohy. Oba vektory najdeme v poslední řádce simplexové tabulky.

Poznámka 1. Podstatné při našich úvahách bylo, že výchozí simplexová tabulka obsahuje úplnou soustavu jednotkových vektorů (jednotkovou matici), jež se transformuje při každém kroku na $\mathbf{B}^{-1}$.

Není vůbec podstatné, zda proměnné odpovídající jednotkovým vektorům jsou přídatné. Důležité je jenom, aby v účelové funkci měly původní koeficienty nulové. Pak v poslední části simplexové tabulky najdeme hodnoty duálních proměnných právě pod $\mathbf{B}^{-1}$.

Poznámka 2. U velmi často se vyskytující úlohy „určit vektor $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, který splňuje podmínky $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$ a minimalizuje lineární formu $\mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$“, máme po zavedení přídatných proměnných zápornou jednotkovou matici, která se transformuje na $-\mathbf{B}^{-1}$. Pod ní pak najdeme vektor $-\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$. Dosadíme-li zde opět $\mathbf{u}^T = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$, zjistíme snadno, že v poslední řádce simplexové tabulky dostaneme záporně vzaté hodnoty duálních proměnných (i přídatných).

Tabulka 6.2

Báze	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x'_1	x'_2	x'_3	
x'_1	8	$\boxed{10}$	10	5	4	1	0	0	800
x'_2	5	2	4	5	8	0	1	0	600
x'_3	2	2	1	6	4	0	0	1	420
z	—1 250	—1 260	—1 250	—1 200	—1 240	0	0	0	0
x_2	0,8	1	1	0,5	0,4	0,1	0	0	80
x'_2	3,4	0	2	4	$\boxed{7{,}2}$	—0,2	1	0	440
x'_3	0,4	0	—1	5	3,2	—0,2	0	1	260
z	—242	0	10	—570	—736	126	0	0	100 800
x_2	11/18	1	8/9	5/18	0	1/9	—1/18	0	500/9
x_5	17/36	0	5/18	5/9	1	—1/36	5/36	0	550/9
x'_3	—10/9	0	—17/9	$\boxed{29/9}$	0	—1/9	—4/9	1	580/9
z	950/9	0	1 930/9	—1 450/9	0	950/9	920/9	0	1 312 000/9
x_2	41/58	1	61/58	0	0	7/58	—1/58	—5/58	50
x_5	77/116	0	35/58	0	1	—1/116	25/116	—5/29	50
x_4	—10/29	0	—17/29	1	0	—1/29	—4/29	9/29	20
z	50	0	120	0	0	100	80	50	149 000

Simplexový algoritmus začíná tedy přípustným řešením primární úlohy, které se postupně zlepšuje. Zároveň však začíná nepřípustným řešením duální úlohy (takovým řešením, kde buď některé proměnné u_i, nebo přídatné proměnné u'_i mají zápornou hodnotu) a každým krokem se snižuje „nepřípustnost" (tj. váha záporných souřadnic řešení v hodnotě účelové funkce).

Mezi řešeními dvojice duálních úloh existuje hlubší vztah. Vezměme za tím účelem nejdříve příklad 6.1. V tab. 6.2 je uvedeno jeho řešení získané pomocí simplexové metody.

V tab. 6.2 máme řešení primární úlohy, které již známe z čl. 6.1:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 20, \quad x_5 = 50, \quad x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$$

a v poslední řádce řešení duální úlohy:

$$u_1 = 100, \quad u_2 = 80, \quad u_3 = 50, \quad u'_1 = 50, \quad u'_2 = 0, \quad u'_3 = 120, \quad u'_4 = u'_5 = 0$$

Bereme-li v úvahu i podmínky nezápornosti, mají obě úlohy po $m + n$ (v našem případě $3 + 5 = 8$ omezení) omezeních, které lze sestavit do dvojic vzájemně si odpovídajících tak, že podmínce nezápornosti jedné úlohy odpovídá vlastní omezení druhé úlohy, a naopak. V našem příkladě 6.1 máme toto přiřazení:

Omezení primární úlohy	Omezení duální úlohy
$x_1 \geqq 0$	$8u_1 + 5u_2 + 2u_3 \geqq 1\,250$
$x_2 \geqq 0$	$10u_1 + 2u_2 + 2u_3 \geqq 1\,260$
$x_3 \geqq 0$	$10u_1 + 4u_2 + u_3 \geqq 1\,250$
$x_4 \geqq 0$	$5u_1 + 5u_2 + 6u_3 \geqq 1\,200$
$x_5 \geqq 0$	$4u_1 + 8u_2 + 4u_3 \geqq 1\,240$
$8x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leqq 800$	$u_1 \geqq 0$
$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leqq 600$	$u_2 \geqq 0$
$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leqq 420$	$u_3 \geqq 0$

Jde tu vlastně o přiřazení proměnných jedné úlohy k vlastním omezením druhé úlohy, a naopak.

Všimněme si, že v optimálním řešení je z každé dvojice odpovídajících si omezení jedno splněno jako rovnice. Tak první, třetí, šesté, sedmé a osmé omezení jsou splněna jako rovnice v primární úloze. Druhé, čtvrté a páté omezení jsou splněna jako rovnice v duální úloze.

Snadno zjistíme, že to platí obecně; seřadíme-li omezení dvou duálně sdružených úloh do dvojic sobě odpovídajících, pak v optimálním řešení může jenom jedno z nich být splněno jako ostrá nerovnost. Jinými slovy, to znamená, že má-li v optimálním řešení některá proměnná hodnotu nenulovou, je duální omezení jí odpovídající splněno jako rovnice a je-li některé omezení splněno v optimálním řešení jako ostrá nerovnost, rovná se duální proměnná jemu odpovídající nule.

Předpokládejme za tím účelem, že obě duálně sdružené úlohy mají přípustná řešení, a tedy podle vět odvozených výše mají také obě úlohy optimální řešení, v nichž se hodnoty obou účelových funkcí rovnají. Předpokládejme dále, že vektory

$$\mathbf{x}_0^T = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_m'^0, z^0],$$
$$\mathbf{u}_0^T = [u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0, u_1'^0, u_2'^0, \ldots, u_n'^0, f^0]$$

jsou přípustnými řešeními primární, popř. duální úlohy (do řešení jsme zahrnuli i hodnoty přídatných proměnných a účelové funkce). Dosaďme do (6.1a) vektory $\mathbf{x}_0^T$ a $\mathbf{u}_0^T$ (dostaneme tím identity) a násobme prvních m rovnic čísly $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$ a přičtěme je k poslední rovnici. Dostaneme

$$\begin{aligned}&(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}u_i^0 - c_1)\,x_1^0 + (\sum_{i=1}^{m} a_{i2}u_i^0 - c_2)\,x_2^0 + \ldots +\\ &+ (\sum_{i=1}^{m} a_{in}u_i^0 - c_n)\,x_n^0 + u_1^0x_1'^0 + u_2^0x_2'^0 + \ldots + u_m^0x_m'^0 + z^0 = \sum_{i=1}^{m} b_iu_i^0 \qquad (6.14)\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^0 - c_j = u_j'^0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_iu_i^0 = f^0,$$

lze rovnici (6.14) psát také ve tvaru

$$\begin{aligned}&u_1'^0x_1^0 + u_2'^0x_2^0 + \ldots + u_n'^0x_n^0 + u_1^0x_1'^0 + u_2^0x_2'^0 + \ldots +\\ &+ u_m^0x_m'^0 + z^0 = f^0 \qquad (6.14a)\end{aligned}$$

Jsou-li $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{u}_0$ optimální řešení příslušných úloh, pak platí $z^0 = \max z$ a $f^0 = \min f$, a tedy $z^0 = f^0$. Protože na levé straně rovnice (6.14), popř. (6.14a) jsou vedle z^0 samé nezáporné členy, je to možné jen tehdy, jestliže každý z těchto členů se rovná nule. Platí ovšem také opak, tj. jsou-li všechny členy na levé straně rovnice (6.14), popř. (6.14a), (kromě z^0) rovny nule, pak $z^0 = f^0$, a tedy podle (6.8) $z^0 = \max z$ a $f^0 = \min f$. Sčítance na levé straně (6.14) a (6.14a) jsou však součiny dvou nezáporných čísel. Rovná-li se takový součin nule a je-li jeden z činitelů různý od nuly, musí se rovnat nule nutně druhý činitel.

Podle výše uvedených úvah můžeme vyslovit tuto větu:

Jsou-li $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{u}_0$ optimálními řešeními dvojice duálně sdružených úloh, pak platí:

a) z $x_j^0 > 0$ plyne
$u_j'^0 = 0 \quad (a_{1j}u_1^0 + a_{2j}u_2^0 + \ldots + a_{mj}u_m^0 = c_j);$
b) z $x_i'^0 > 0 \quad (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 < b_i)$ plyne
$u_i^0 = 0;$
c) z $u_j'^0 > 0 \quad (a_{1j}u_1^0 + a_{2j}u_2^0 + \ldots + a_{mj}u_m^0 > c_j)$ plyne
$x_j = 0;$
d) z $u_i^0 > 0$ plyne
$x_i'^0 = 0 \quad (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i);$

obráceně: **platí-li pro přípustná řešení $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{u}_0$ vztahy a) až d), jsou to optimální řešení dvojice sdružených úloh.**

Tuto větu jsme konečně mohli vyčíst přímo ze simplexové tabulky. Vektory koeficientů u základních proměnných mají vždy v poslední řádce simplexové tabulky souřadnice nulové (a to jsou právě hodnoty proměnných duální úlohy).

Na základě toho můžeme formulovat předchozí větu také tak, že základní řešení dvojice duálně sdružených úloh je optimální tehdy a jen tehdy, jestliže základní proměnné v řešení jedné úlohy odpovídá v úloze k ní duální rovnice a ostré nerovnosti v jedné úloze odpovídá v řešení druhé úlohy nezákladní proměnná.

Navíc, je-li $\mathbf{x}_0$ jediné a přitom nedegenerované optimální řešení (příslušná báze $\mathbf{B}_0$ je jediná optimální báze), pak v poslední řádce simplexové tabulky jsou nuly pouze ve sloupcích patřících do báze a těm odpovídají vesměs proměnné s hodnotou kladnou. V tomto případě je možno vztahy a) až d) také obrátit: Je-li optimální řešení jednoznačné a nedegenerované, pak z dvojice duálních omezení je vždy jedno omezení splněno jako rovnice, druhé jako nerovnost. Například z $x_j^0 = 0$ plyne

$u_j'^0 > 0 \quad$ (tj. $a_{1j}u_1^0 + a_{2j}u_2^0 + \ldots + a_{mj}u_m^0 > c_j$) a
z $x_i'^0 = 0 \quad$ (tj. $a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i$) plyne
$u_i^0 > 0$

Není-li optimální báze jednoznačná, pak

1. buď jsou v poslední řádce simplexové tabulky nuly i v sloupcích nepatřících do báze; optimální řešení primární úlohy není pak jediné a optimální řešení duální úlohy je degenerované,

2. anebo má některá základní proměnná hodnotu nulovou, tj. řešení je degenerované, a příslušná duální úloha má optimální řešení mnohoznačné.

Případ 2. plyne z a) na základě vzájemnosti vztahů duality. Později však uvidíme, že na základě duálně simplexové metody lze 2. případ odvodit přímo.

Není-li optimální báze jednoznačná, pak zřejmě nelze vztahy a) až d) prostě obrátit. Platí ale, že je-li x_j^0 nezákladní proměnnou ve všech optimálních řešeních (j-tý vektor nepatří ani do jedné optimální báze), pak $u_j'^0 > 0$ (tj. $a_{1j}u_1^0 + a_{2j}u_2^0 + \dots + a_{mj}u_m^0 > c_j$).

6.4 EKONOMICKÝ VÝZNAM DUALITY

Na příkladě 6.1 jsme viděli, že duální proměnné dávají ocenění činitelů; pojem duality jsme tam vlastně odvodili právě z potřeby ocenit jednotlivé činitele. To však potřebuje bližší vysvětlení tím spíše, že ne všechny úlohy lineárního programování jsou formulovány stejně jako úloha uvedená.

Zůstaňme nejdříve u úloh typu 6.1, tj. u úloh, při nichž je dáno omezené množství různých výrobních činitelů; je známa struktura procesů a je třeba přitom stanovit program poskytující maximální výnos. V tomto případě, jak jsme viděli, dává duální úloha optimální ocenění výrobních činitelů. Všimněme si některých vlastností tohoto ocenění.

Z tvaru duálních omezení vyplývá především, že duální ceny jsou závislé na tom, jak byly v primární úloze oceněny jednotlivé procesy (tj. v jakých jednotkách a v jaké výši). Předpokládáme-li, že jde o sestavení programu pro relativně uzavřenou jednotku, která disponuje určitým množstvím činitelů a jejíž jediným stykem s vnějším světem je prodej výsledků procesů, pak zároveň při formulaci úlohy mlčky předpokládáme, že ocenění procesů (c_j) je dáno zvenčí (exogenně). A právě na tomto ocenění jsou závislé duální ceny.

Duální úloha dává tedy ocenění činitelů na podkladě předchozího ocenění procesů.

Je tu však i další závislost duálních cen na podmínkách úlohy. Viděli jsme, že vektor duálních proměnných byl dán vzorcem

$$\mathbf{u}^T = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1},$$

kde $\mathbf{B}$ je optimální báze. Mění-li se však množství omezených činitelů, zůstává daná báze optimální jen v určitých mezích, jak ještě uvidíme níže (viz čl. 7.2). Mění-li se množství činitelů přes tyto meze, mění se i optimální báze, a tím pochopitelně i duální ceny. Jsou tedy duální ceny též mírou omezenosti činitelů. To znamená, že duální ceny jsou vlastně ceny marginální. Udávají, jak zvýší další jednotka ten který činitel za daných podmínek (tj. za existence daného množství těchto činitelů) maximální výnos.

Na základě uvedené interpretace duálních proměnných lze dát větám, které jsme o duálních úlohách odvodili, jednoduchý smysl.

Okolnost, že má-li jedna z úloh optimální řešení, má je i druhá, lze interpretovat nyní tak, že optimální program může existovat tehdy a jen tehdy, existuje-li optimální ocenění činitelů.

Dále věta, že z dvojice sdružených omezení pouze jedno může být splněno jako ostrá nerovnost, znamená prakticky

a) že činitele, které jsou v přebytku, mají v optimální soustavě ocenění cenu nulovou (z $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n > b_i$ plyne $u_i = 0$), což je pochopitelné, připomeneme-li si, že jde o marginální ceny;

b) že nerentabilní procesy se v optimálním programu neuskutečňují. Z $a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m > c_j$ plyne totiž $x_j = 0$. Výraz $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i > c_j$ znamená, že úhrnná cena činitelů spotřebovaných na daný proces je větší než výnos příslušného procesu (c_j), což z jiné stránky ukazuje, že jde o proces nerentabilní.

Z uvedeného plyne také, že duální ceny mohou mít význam při analýze takových otázek, jako je rentabilita nových procesů, substituce výrobních činitelů, odstranění úzkých profilů ve výrobních činitelích atd. Mohou mít ovšem význam i při cenové politice (při uvádění do souladu cenových relací surovin, polotovarů a hotových výrobků).

Je-li úloha výrobního programování formulována tak, že je třeba při daných omezených zdrojích splnit určitý program výroby, tj. vyrobit dané množství výrobků a služeb, a to s nejmenším vynaložením práce, pak duální úloha dá ocenění zdrojů i výrobků a služeb v jednotkách práce.

Při interpretaci duální úlohy je třeba si uvědomit, že každá duální proměnná je přiřazena některému omezení primární úlohy. Ne všechna omezení vyjadřují však omezenost některého činitele. Vyjadřujeme pomocí nich rozmanité podmínky, jako např. potřebu určitého množství kalorií v dietě (v nutriční úloze), nutnost udržet předepsanou kvalitu (např. oktanové číslo u pohonných směsí), nutnost vyrábět některé výrobky v předepsaných kvantitativních poměrech atd. Přesněji tedy duální úloha dává ocenění podmínek vyjádřených omezeními.

6.5 INTERPRETACE DUÁLNÍCH ÚLOH

Na příkladě výrobního programování jsme viděli, že duální úloha může mít důležitý význam ekonomický. Může dát závažné informace o úzkých místech nebo přebytečných kapacitách, o vhodnosti či nevhodnosti různých operací atd. Při řešení rozsáhlých úloh v měřítku národohospodářském mohou být stínové ceny též důležitým nástrojem cenové politiky. Je proto třeba věnovat pozornost interpretaci duálních úloh.

V některých případech je interpretace stejně jednoduchá jako v uvedeném příkladě výrobního programování. Tak např. podobnou úvahou jako u výrobního programování dojdeme snadno k tomu, že duální proměnné k nutričnímu problému znamenají ceny čistých živin. Kdybychom mohli kupovat čisté živiny, bude to pro nás výhodné, jen jsou-li jejich tržní ceny takové, že cena kterékoli potraviny není nižší než cena živin v ní obsažených. Přitom v optimálním programu se mohou objevit jen takové potraviny, jejichž cena není vyšší než duální cena živin obsažených v těchto potravinách.

V mnohých případech však, zejména u úloh s různorodými omezeními, je správná interpretace duálních proměnných dosti složitá. V takových případech se osvědčuje rozbor fyzikálního nebo tzv. věcného rozměru veličin v obou úlohách. Vycházíme z toho, že fyzikální (věcný) rozměr na obou stranách rovnice nebo nerovnosti musí být stejný (srovnávat můžeme jen stejnojmenné veličiny). Vezměme tedy duální omezení

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m \geqq c_j$$

Věcný rozměr veličiny c_j a koeficientů a_{ij} můžeme určit z původní úlohy. Protože sčítance na levé straně nerovnosti musí mít týž rozměr jako c_j, platí

$$\begin{aligned} &\dim(a_{1j}) \dim(u_1) = \dim(a_{2j}) \dim(u_2) = \ldots = \\ &= \dim(a_{mj}) \dim(u_m) = \dim(c_j), \end{aligned}$$

kde symbolem $\dim(u_i)$ označujeme věcný rozměr (dimenzi) veličiny u_i. Z toho lze pak snadno určit věcný rozměr duálních proměnných

$$\dim(u_i) = \frac{\dim(c_j)}{\dim(a_{ij})}$$

Pro ilustraci vezměme příklad.

Příklad 6.2. Podnik vyrábí čtyři výrobky, jejich výroba je omezena třemi činiteli. Spotřeba těchto činitelů na jednotku jednotlivých výrobků, jakož i množství činitelů, které jsou k dispozici, a ceny výrobků jsou uvedeny v tab. 6.3:

Tabulka 6.3

Činitele	Výrobky				K dispozici činitelů (tun)
	V_1	V_2	V_3	V_4	
K_1	5	2	3	8	1 140
K_2	4	5	5	2	900
K_3	2	8	4	8	1 200
Ceny výrobku Kčs/jednotku	760	680	780	720	

Výrobky V_1 a V_2 mají shodné použití, podobně výrobky V_3 a V_4; proto plán předpisuje jenom jejich úhrnné množství, a to 100 jednotek V_1 a V_2 dohromady a 100 jednotek V_3 a V_4 dohromady.

Otázkou je, jaký program zaručuje za uvedených podmínek maximální hodnotu produkce?

Matematicky jde o tuto úlohu:

Na množině řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_j &\geqq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leqq 1\,140 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leqq 900 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 &\leqq 1\,200 \\ x_1 + x_2 &\geqq 100 \\ x_3 + x_4 &\geqq 100 \end{aligned}$$

určit maximum lineární formy

$$z = 760x_1 + 680x_2 + 780x_3 + 720x_4$$

Úloha k ní duální zní:

Na množině řešení soustavy

$$\begin{aligned} u_i &\geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \\ 5u_1 + 4u_2 + 2u_3 - u_4 &\geqq 760 \\ 2u_1 + 5u_2 + 8u_3 - u_4 &\geqq 680 \\ 3u_1 + 5u_2 + 4u_3 - u_5 &\geqq 780 \\ 8u_1 + 2u_2 + 8u_3 - u_5 &\geqq 720 \end{aligned}$$

určit minimum lineární formy

$$z = 1\,140u_1 + 900u_2 + 1\,200u_3 - 100u_4 - 100u_5$$

Abychom určili smysl duální úlohy, analyzujme věcný rozměr duálních proměnných. Zde ovšem, jak je zřejmé ze struktury úlohy, význam proměnných u_1, u_2, u_3 je jiný než proměnných u_4, u_5 (stejně jako první tři omezení původní úlohy se liší významem od posledních dvou).

Z prvních tří omezení primární úlohy plyne pro příslušné koeficienty rozměr

$$\underset{i=1,2,3}{\dim}(a_{ij}) = \frac{\text{činitel}}{\text{proces}}$$

(znamenají množství i-tého činitele připadajícího na jednotku j-tého procesu).

Podobně z posledních dvou rovnic plyne rozměr zbývajících koeficientů

$$\dim_{i=4,5}(a_{ij}) = \frac{\text{plánovaná výroba}}{\text{proces}}$$

(znamenají, kolik jednotek výrobku je plánováno na jednotku příslušného procesu).

Z toho však pro duální proměnné vyplývá

$$\dim_{i=1,2,3} \ (u_i) = \dim(c_j) : \dim(a_{ij})$$

$$= \frac{\text{cena}}{\text{proces}} : \frac{\text{činitel}}{\text{proces}} = \frac{\text{cena}}{\text{činitel}}$$

První tři proměnné tedy znamenají opět stínové ceny činitelů.

Pro poslední dvě proměnné pak obdobně vyplývá

$$\dim_{i=4,5} \ (u_i) = \frac{\text{cena}}{\text{plánovaná výroba}}$$

Jinými slovy, poslední dvě proměnné oceňují podmínky vyjádřené plánem. Ze struktury účelové funkce plyne, že vzroste-li plán prvního (resp. druhého) výrobku o jednotku, poklesne maximální produkce právě o u_4 (resp. u_5).

V každém případě tedy duální proměnné oceňují podmínky omezující volbu variant v primární úloze.

6.6 Metoda postupného zpřesňování cen. Duálně simplexová metoda

Při simplexové metodě jsme vycházeli z libovolného přípustného řešení a postupně jsme je zlepšovali; přecházeli jsme postupně na jiná řešení, s větší hodnotou účelové funkce, šlo-li o úlohy maximalizační, resp. s menší hodnotou, šlo-li o úlohy minimalizační. Všimněme si znovu, jak přitom postupovalo řešení duální úlohy.

Představme si pro určitost, že vycházíme z problému maximalizačního a že bází k-tého kroku je $\mathbf{B}_k$. Protože jde o přípustnou bázi, je $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$. V poslední řádce simplexové tabulky máme, jak známo, vektor

$$[\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \mid \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}] \tag{6.15}$$

Je-li vektor (6.15) nezáporný, je, jak již víme, $\mathbf{B}_k$ optimální báze. Vektor $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ je přitom řešením duálního problému*). Je-li vektor (6.15) nezáporný, říkáme stručně, že $\mathbf{B}_k$ je báze duálně přípustná, resp. že je příslušné řešení duálně přípustné. Je zřejmé, že je-li některá báze zároveň primárně i duálně přípustná, je to báze optimální.

Stručně lze tedy říci, že při simplexové metodě vycházíme z báze primárně přípustné a postupně přecházíme na jiné primárně přípustné báze, až dospějeme k bázi, která je zároveň duálně přípustná.

Setkáváme se však často s případy, kdy máme bázi duálně přípustnou, která však není primárně přípustná. V takových případech je výhodnější opačný postup, tj. postupně zlepšovat řešení duální úlohy tak dlouho, až dospějeme k bázi, která je i primárně přístupná.

Prakticky v simplexové tabulce se okolnost, že daná báze je duálně přípustná, projevuje tím, že

a) poslední řádka je nezáporná, jde-li o úlohu maximalizační,
b) poslední řádka je nekladná, jde-li o úlohu minimalizační.

Vyskytují-li se přitom ve vektoru $\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{b}$ (tj. v posledním sloupci) záporné prvky, znamená to, že daná báze je primárně nepřípustná.

Postup je nyní, na rozdíl od simplexové metody, takový, že určíme nejdříve vylučovanou proměnnou, a to tak, že zvolíme jednu z řádek, která obsahuje v posledním sloupci záporné číslo, za klíčový řádek. Základní proměnná v tomto řádku bude vylučovanou proměnnou.

Dále jde o to určit klíčový sloupec, tj. zařazovanou proměnnou tak, aby řešení zůstalo duálně přípustné. K tomu účelu dělíme prvky posledního řádku stejnolehlými prvky klíčového řádku, pokud poslední jsou záporné. Sloupec, ve kterém je uvedený podíl absolutně nejmenší, je klíčovým sloupcem*).

Další postup, tj. přechod na nové duálně přípustné řešení, je úplně stejný jako u simplexové metody. Přitom pokud jde o úlohu maximalizační (minimalizační), hodnota účelové funkce se při přechodu na nové řešení zmenšuje (zvětšuje). Duální úloha je totiž minimalizační (maximalizační). Při tomto postupu se tedy postupně zpřesňuje ocenění činitelů.

Není-li v klíčové řádce ani jeden prvek záporný, znamená to, že duální úloha nemá konečné optimální řešení. Jinými slovy, to znamená, že daná úloha nemá přípustné řešení.

Po konečném počtu kroků dospějeme postupným zlepšením řešení duální úlohy k jednomu z těchto výsledků:

1. Poslední sloupec je nezáporný. Tím jsme dospěli k přípustnému řešení původní úlohy, a tedy k optimálnímu řešení obou úloh.

---

*) Není-li $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}_k^{-1}$ nezáporný, můžeme jej rovněž považovat za řešení duálních omezení; je to ovšem řešení nepřípustné.

*) Tento postup je obdobný jako postup určení klíčové řádky u simplexové metody (str. 124), proto jsme ho uvedli bez důkazu. Doporučujeme čtenáři, aby důkaz provedl sám.

2. Existuje řádka, v níž je poslední prvek záporný, avšak ostatní prvky nezáporné. V tom případě nemá úloha přípustné řešení.

Pro ilustraci uvedeme tyto příklady:

Příklad 6.3. Příklad 5.5 lze po doplnění přídatnými proměnnými a po změně znamének na obou stranách sestavit do simplexové tabulky 6.4a takto:

Tabulka 6.4a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	—2	—4	—5	1	0	0	—5 000
x_2'	—2	—2	0	—4	0	1	0	—6 000
x_3'	$\boxed{-10}$	—5	—4	—10	0	0	1	—18 000
z	—15	—10	—12	—25	0	0	0	0

Tabulka obsahuje základní řešení, které je však primárně nepřípustné, jak je zřejmé podle záporných prvků v posledním sloupci. Zároveň však poslední řádka ukazuje, že řešení je duálně přípustné. Zvolme za klíčovou řádku řádku třetí. Klíčovým sloupcem je pak sloupec první, neboť

$$\frac{15}{10} = \min\left(\frac{15}{10}, \frac{10}{5}, \frac{12}{4}, \frac{25}{10}\right)$$

a klíčovým prvkem je zarámované číslo -10. Přechod k dalšímu kroku je jako u obyčejné simplexové metody (tab. 6.4b).

Další postup je zřejmý z tabulky a nepotřebuje vysvětlení. K výsledku jsme dospěli mnohem rychleji než metodou pomocných proměnných.

Příklad 6.4. Určitý výrobek lze vyrobit třemi různými technologickými postupy, které jsou popsány v tab. 6.5a.

Úkolem je vyrobit nejméně 800 jednotek výrobku při minimálních nákladech.

V matematické formulaci jde o minimalizace lineární formy

$$z = 50x_1 + 45x_2 + 40x_3$$

při podmínkách

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leqq 1\,000 \\ 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 &\leqq 1\,200 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 500 \\ 10x_1 + 10x_2 + 5x_3 &\leqq 1\,500 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geqq 800 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Tabulka 6.4b

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	0	$\boxed{-2}$	—4	—5	1	0	0	—5 000
x_2'	0	—1	0,8	—2	0	1	—0,2	—2 400
x_1	1	0,5	0,4	1	0	0	—0,1	1 800
z	0	—2,5	—6	—10	0	0	—1,5	27 000
x_2	0	1	2	2,5	—0,5	0	0	2 500
x_2'	0	0	2,8	0,5	—0,5	1	—0,2	100
x_1	1	0	—0,6	—0,25	0,25	0	—0,1	550
z	0	0	—1	—3,75	—1,25	0	—1,5	23 250

Tabulka 6.5a

		Technologický postup			K dispozici činitelů
		A	*B*	*C*	
Potřeba činitelů na jednotkové provedení procesů uvedených v hlavičce	1	4	6	2	1 000
	2	5	5	8	1 200
	3	3	2	2	500
	4	10	10	5	1 500
Výnos v jednotkách výrobku		5	4	3	
Náklady na provedení procesu		50	45	40	

Doplníme-li přídatnými proměnnými, můžeme po změně znamének v posledním omezení sestavit tab. 6.5b.

Tabulka 6.5b

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x'_5	
x'_1	4	6	2	1	0	0	0	0	1 000
x'_2	5	5	8	0	1	0	0	0	1 200
x'_3	3	2	2	0	0	1	0	0	500
x'_4	10	10	5	0	0	0	1	0	1 500
x'_5	—5	—4	—3	0	0	0	0	1	—800
z	—50	—45	—40	0	0	0	0	0	

Řešení uvedené v tabulce je zřejmě nepřípustné, je však duálně přípustné (jde o úlohu minimalizační a v poslední řádce není ani jeden koeficient kladný). Jediná nepřípustnost je v páté řádce, volíme tedy tuto řádku za klíčovou. Klíčovým sloupcem je sloupec první

$$\frac{50}{5} = \min\left(\frac{50}{5}, \frac{45}{4}, \frac{40}{3}\right).$$

Tabulka 6.5c

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x'_5	
x'_1	0	2,8	—0,4	1	0	0	0	0,8	360
x'_2	0	1	5	0	1	0	0	1	400
x'_3	0	—0,4	0,2	0	0	1	0	0,6	20
x'_4	0	2	—1	0	0	0	1	2	—100
x_1	1	0,8	0,6	0	0	0	0	—0,2	160
	0	—5	10	0	0	0	0	—10	8 000
x'_1	0	2	0	1	0	0	—0,4	0	400
x'_2	0	11	0	0	1	0	5	11	—100
x'_3	0	0	0	0	0	1	0,2	0,6	0
x_3	0	—2	1	0	0	0	—1	—2	100
x_1	1	2	0	0	0	0	0,6	1	100
	0	—25	0	0	0	0	—10	—20	9 000

Další postup je zřejmý z tab. 6.5c.

Po dvou krocích dospíváme k závěru, že úloha nemá přípustné řešení. V druhé řádce je totiž poslední číslo záporné, avšak všechny ostatní prvky této řádky jsou nezáporné.

6.7 CVIČENÍ

1. Sestavte duální úlohu k úlohám

a)

$$\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1\,295\\
3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 1\,305\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1\,105\\
x_j &\geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 5)\\
z = 25x_1 + 20x_2 + 22x_3 + 23x_4 + 24x_5 &\ldots \max.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 &\leqq 1\,980\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leqq 1\,895\\
x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 1\,950\\
x_4 + x_5 + x_6 &\geqq 2\,195\\
x_j &\geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6)\\
z = 30(x_1 + x_3 + x_5) + 35(x_2 + x_4 + x_6) &\ldots \max.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geqq 165\\
3x_1 + \quad + x_3 + x_4 &= 125\\
x_1 + x_2 + x_5 &\leqq 185\\
x_j &\geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 5)\\
z = 15x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 15x_4 + 20x_5 &\ldots \min.
\end{aligned}$$

2. Řešte duální úlohu k úloze:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 &\leqq 420\\
2x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 5x_5 &\leqq 560\\
-x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_5 &\leqq 670\\
x_j &\geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 5)\\
z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 13(x_4 + x_5) &\ldots \max.
\end{aligned}$$

Vysvětlete výsledek.

3. Určete ekonomický význam duálních proměnných z úlohy 1, 8, z článku 5.12.

4. Řešte duálně simplexovou metodou příklady na minimalizaci z článku 5.12. Porovnejte efektivnost výpočtů s pomocí pomocných proměnných.

KAPITOLA 7 ÚVAHY POSTOPTIMALIZAČNÍ. DEKOMPOZICE

7.1 ZKOUMÁNÍ ZMĚN V PODMÍNKÁCH ÚLOHY

Dosud jsme při formulaci různých úloh předpokládali, že všechny parametry (strukturní koeficienty, omezující koeficienty i ceny) jsou známé konstanty a že výčet možných procesů i počet omezení je stálý. Ve skutečnosti musíme však v mnoha případech brát v úvahu, že podmínky úlohy se mohou tak či onak měnit. Vyvstává pak otázka, jak se změní optimální řešení úlohy při podobných změnách, jak dalece je řešení citlivé na tyto změny. Hlavně pak je důležité zkoumat, zda je nutné při té či oné změně podmínek přepočítat znovu celou úlohu nebo zda je možno zkorigovat již vypočtené optimální řešení.

Tak např. často se táž úloha periodicky opakuje (např. úloha přidělení práce jednotlivým strojům se řeší v každém plánovacím období); přitom některé parametry, resp. podmínky se mohou měnit (mění se kapacity, přísun surovin, ceny atd.).

Nemusí však vždy jít o skutečné změny. Často jsou parametry úlohy dány nepřesně, přibližně. Pak je třeba zkoumat, zda řešení zůstane stabilní v určitých mezích.

Konečně často se úloha pro usnadnění výpočtu zjednodušuje tak, že se některé podmínky, o nichž se domníváme, že nemohou ovlivnit výsledek, zpočátku vynechají. Dodatečně pak chceme zkoumat, zda vynechané podmínky skutečně nemají vliv na řešení.

7.2 ZKOUMÁNÍ ZMĚN V OMEZENÍCH

Předpokládejme pro určitost, že máme opět úlohu maximalizovat

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

při podmínkách

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

a že máme už optimální bázi $\mathbf{B}$, tj. že platí $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$. Přitom vektor $\bar{\mathbf{c}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ je maximální hodnota účelové funkce. Předpokládejme nyní, že se dodatečně mění vektor absolutních členů v $\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$,

$$\text{kde } \Delta\mathbf{b}^T = [\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_m]$$

a zkoumejme, zda po této změně báze $\mathbf{B}$ zůstane optimální bází. Je zřejmé, že změna vektoru $\mathbf{b}$ nemění vektor

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \quad \text{ani} \quad \text{vektor} \quad \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}$$

(tj. řešení duálního problému), které dávají kritérium optimality. Pokud tedy báze $\mathbf{B}$ zůstane přípustná, zůstane i optimální. Musíme tedy jedině zkoumat, zda některá souřadnice vektoru

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}\text{*)} \qquad (7.1)$$

není záporná.

Je-li vektor (7.1) nezáporný, pak zřejmě zůstává matice $\mathbf{B}$ optimální bází a vektor (7.1) udává právě nové hodnoty základních proměnných. Optimální hodnota účelové funkce bude

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b},$$

tj. vzroste o $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \mathbf{u}^T\Delta\mathbf{b}$, kde $\mathbf{u}^T$ je vektor řešení duální úlohy.

Je-li některá ze souřadnic vektoru (7.1) záporná, pak matice $\mathbf{B}$ už není pro změněnou úlohu primárně přípustnou bází, zůstává však duálně přípustnou. $\mathbf{B}$ v tomto případě není už ovšem optimální bází. Ani v tomto případě není však účelné řešit celou úlohu znovu od začátku. Můžeme vycházet ze základního řešení daného bází $\mathbf{B}$ (teď už nepřípustného) a pokračovat v řešení, v daném případě nejlépe metodou duálně simplexovou.

Postup ilustrujeme na příkladech:

1. Předpokládejme nejprve u úlohy 5.3 (str. 125), že v dalším období se podmínky změnily, a to tak, že podnik má k dispozici o 500 jednotek více suroviny první ($\Delta b_1 = 500$) a o 500 jednotek více suroviny třetí ($\Delta b_3 = 500$). Zásoba druhé suroviny je stejná jako v předchozím období. Je tedy

$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Z poslední části simplexové tabulky máme (str. 128)

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,175 & -0,1 \\ -0,07 & 0,025 & 0,1 \\ 0,26 & -0,45 & 0,2 \end{bmatrix},$$

---

*) $\bar{\mathbf{x}}$ znamená vektor základních proměnných optimálního řešení.

tedy

$$\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -45 \\ 15 \\ 230 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 135 - \ 45 \\ 105 + \ 15 \\ 110 + 230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 120 \\ 340 \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Zůstane tedy v tomto případě $\mathbf{B}$ optimální bází. Mění se jenom hodnoty základních proměnných, a to na

$$x_1 = 90, \qquad x_3 = 340, \qquad x_4 = 120$$

Nová optimální hodnota účelové funkce bude

$$z = 500 \,.\, 90 + 200 \,.\, 340 + 280 \,.\, 120 = 146\,600,$$

což je o 27 700 větší než u původní úlohy. Tento přírůstek odpovídá právě součinu

$$\mathbf{u}^T\Delta\mathbf{b} = [37{,}4;\, 4{,}5\ ;18] \,.\, \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

2. Předpokládejme nyní u téže úlohy

$$\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,500 \end{bmatrix},$$

tj. že vzrostla pouze zásoba třetí suroviny, a to o 1 500 jednotek. Potom

$$\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -150 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} -15 \\ 255 \\ 410 \end{bmatrix}$$

a

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = 145 \,.\, 900$$

Báze $\mathbf{B}$ se stala primárně nepřípustnou, a tedy není nadále optimální. Abychom dostali nové optimální řešení, stačí pokračovat od poslední části simplexové tabulky s pozměněnými hodnotami v posledním sloupci, a to nejlépe duálně simplexovou metodou (tab. 7.1a).

Tabulka 7.1a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1	1	0,125	0	0	0,01	0,175	$\boxed{-0{,}1}$	—15
x_4	0	0,575	0	1	—0,07	0,025	0,1	255
x_3	0	0,65	1	0	0,26	—0,45	0,2	410
z	0	53,5	0	0	37,4	4,5	18	145 900

Protože v posledním sloupci je jediný záporný prvek, a to v první řádce, volíme první řádku za klíčovou. Zároveň vidíme, že jediný záporný koeficient v první řádce je u x_3'. Je tedy sedmý sloupec klíčovým sloupcem. V dalším kroku dostáváme nové optimální řešení (v tab. 7.1b).

Tabulka 7.1b

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_3'	—10	—1,25	0	0	—0,1	—1,75	1	150
x_4	1	0,700	0	1	—0,06	0,2	0	240
x_3	2	0,900	1	0	0,28	—0,1	0	380
z	180	76	0	0	39,2	36	0	143 200

Poznámka 1: Je zajímavé si povšimnout, jak dalece optimální program závisí na omezení. V novém optimálním programu se vyrábějí pouze třetí a čtvrtý výrobek, což se zdá být paradoxní, neboť to jsou výrobky právě s nejnižšími cenami a nám jde o maximalizaci hodnoty produkce. Vysvětlení je v tom, že první dva výrobky (s podstatně vyššími cenami) kladou poměrně vyšší nároky na první dvě suroviny; podstatně zvýšené zásoby třetí suroviny by pro jejich výrobu neznamenaly žádný přínos a nemohlo by jich být dostatečně využito (není jich stejně plně využito).

Poznámka 2: Z příkladu je rovněž zřejmá závislost stínových cen na omezeních. Při původních omezeních činily duální ceny jednotlivých surovin 37,4; 4,5 a 18 Kčs.
Při nových omezení činí 39,2; 36 a 0 Kčs.
Stínové ceny prvních dvou surovin stouply, neboť se tyto suroviny staly relativně vzácnějšími (v porovnání s třetí). Např. získáním každé další jednotky druhé suroviny stoupne nyní hodnota produkce o 36 Kčs (proti 4,5 při předchozích omezeních). Zároveň cena třetí suroviny klesla na na nulu. Podnik ji totiž má v přebytku a získání další jednotky této suroviny nemůže tedy ovlivnit hodnotu produkce.

Dosud jsme zkoumali, jaký vliv má určitá (jednorázová) změna vektoru **b** na optimální řešení. Můžeme si však klást obecnější otázku, jak se bude chovat optimální řešení v případě, že vektor **b** závisí na proměnlivém parametru (resp. na několika parametrech). Dostáváme se tak k jedné z otázek **parametrického programování.**

Nejjednodušší případ parametrického programování dostaneme, je-li vektor **b** lineární funkcí jednoho proměnného parametru, tj.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t,$$

kde t může nabývat jakékoli hodnoty v určitém uzavřeném intervalu

$$\langle t_0, t^0 \rangle,$$

tj.

$$t_0 \leqq t \leqq t^0$$

Prakticky může jít například o případ, kdy některá (nebo všechna) omezení se mění rovnoměrně s časem. (Např. disponibilní zásoby některých surovin mohou růst nebo klesat rovnoměrně od období k období.)

Úkolem parametrického programování je v tomto případě určit, jak se mění optimální báze se změnou parametru t. Ukazuje se, že interval $\langle t_0, t^0 \rangle$ lze rozdělit na dílčí intervaly tak, že pro každý z nich má úloha buď jedinou optimální bázi, anebo nemá konečné optimální řešení:

Začněme s hodnotou $t = t_0$. Mohou zde nastat tři případy

a) úloha má pro $t = t_0$ optimální řešení,

b) úloha nemá pro $t = t_0$ vůbec přípustné řešení,

c) úloha má sice pro $t = t_0$ přípustné řešení, avšak účelová funkce může růst neomezeně.

Zabývejme se nejdříve případem a), který má prakticky jedině význam. Dejme tomu, že $\mathbf{B}_0$ je optimální báze pro $t = t_0$, tj.

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t_0) \geqq \mathbf{0} \tag{7.2}$$

a

$$\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0}^T \qquad \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{B}_0^{-1} \geqq \mathbf{0}^T \tag{7.3}$$

Nerovnosti (7.3) neobsahují t, zůstávají tedy v platnosti při jakémkoli t. Vektor

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t)$$

je pro $t = t_0$ nezáporný. Protože jeho souřadnice jsou lineární funkce t, mění se s rostoucím t spojitě. Nechť jsou souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{x}}$ dány výrazy

$$\beta_{01} + \beta_{11} t, \qquad \beta_{02} + \beta_{12} t, \qquad \ldots, \qquad \beta_{0m} + \beta_{1m} t$$

Jsou-li zde $\beta_{1i} \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, pak s rostoucím t hodnota těchto souřadnic poroste, tj. $\bar{\mathbf{x}}$ zůstane nezáporným. Jinými slovy $\mathbf{B}_0$ zůstane optimální bází pro jakékoli $t \geqq t_0$. Je-li β_{1i} záporná, pak i-tá souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{x}}$ se při $t = \dfrac{\beta_{0i}}{-\beta_{1i}}$ anuluje a při $t > \dfrac{\beta_{0i}}{-\beta_{1i}}$ se stane zápornou.

Utvořme zlomky $\dfrac{\beta_{0i}}{-\beta_{1i}}$ pro všechna i, pro něž $\beta_{1i} < 0$; nechť je $t_1 = \dfrac{\beta_{0k}}{-\beta_{1k}}$, nejmenší z těchto zlomků, tj.

$$t_1 = \frac{\beta_{0k}}{-\beta_{1k}} = \min_i \frac{\beta_{0i}}{-\beta_{1i}}$$

Pak pro $t > t_1$ se báze $\mathbf{B}_0$ stane nepřípustnou (k-tá souřadnice $\bar{\mathbf{x}}$ se stane zápornou), a tím též přestane být optimální bází.

Mohou zde nastat dva případy, a to:

α) v k-té řádce (tj. v řádce, v níž zlomek nabyl minima) existují záporné koeficienty; pak je možno pomocí duálně simplexové metody určit novou optimální bázi $\mathbf{B}_1$ pro $t > t_1$;

β) v k-té řádce nejsou záporné koeficienty, a znamená to, že pro $t > t_1$ nemá úloha přípustné řešení.

V případě α) je možno pokračovat v postupu a určit meze, ve kterých $\mathbf{B}_1$ zůstává optimální bází. V případě β) nemá úloha zřejmě při žádném $t > t_1$ přípustné řešení.

Tímto postupem se po konečném počtu kroků interval

$$\langle t_0, t^0 \rangle$$

rozdělí na několik dílčích intervalů, v nichž buď určíme vždy jedinou optimální bázi, anebo zjistíme, že v některém intervalu nemá úloha přípustné řešení. Na hranicích dílčích intervalů jsou dvě optimální báze.

Prakticky je možno všechny potřebné výpočty provést v simplexové tabulce, k níž připojujeme další sloupec pro vektor $\mathbf{b}_1$. Vysvětlíme postup na příkladě.

Příklad 7.1. Předpokládejme, že v podniku se vyrábějí tři různé výrobky. Podnik má omezení ve dvou činitelích, jejichž zásoby i spotřeba na jednotku jednotlivých výrobků jsou dány v tab. 7.2a, kde je rovněž uvedena velkoobchodní cena jednotlivých výrobků.

Dále, na výrobu jednotky výrobku B se spotřebuje 3,2 jednotek výrobku A a na výrobu jednotky C se spotřebuje jedna jednotka výrobku A. Na počátku období má podnik zásobu 200 jednotek výrobku A. Otázka je, jaký výrobní program zaručuje podniku maximální hodnotu odbytu, dále jak se změní optimální program, jestliže zásoby prvního činitele vzrostou v každém období o 100 jednotek, zásoby druhého činitele o 230 jednotek a zásoby výrobku A (podnik může výrobek A získat třeba i nákupem) o 180 jednotek.

Tabulka 7.2a

Činitel	Spotřeba činitelů na jednotku výrobku			Disponibilní množství činitelů
	A	B	C	
1 2	5 1	4 5	2 8	2 000 1 800
Velkoobchodní cena	85	400	139	

Pro období t budou mít první dvě omezení tvar:

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqq 2\,000 + 100\,t$$
$$x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leqq 1\,800 + 230\,t$$

Další omezení vyplývá z toho, že výrobek A se spotřebuje při výrobě ostatních dvou výrobků. Musí tedy výroba výrobku A spolu s počáteční zásobou krýt při nejmenším výrobní spotřebu, tj.

$$x_1 + 200 + 180\,t \geqq 3{,}2x_2 + x_3$$

nebo po úpravě

$$-x_1 + 3{,}2x_2 + x_3 \leqq 200 + 180\,t$$

To jsou vedle podmínek nezápornosti všechna omezení úlohy. Předpokládejme přitom, že t může nabýt jakýchkoli nezáporných hodnot, tj. $t \geqq 0$.

Při konstrukci účelové funkce musíme opět pamatovat, že část produkce A jde na vnitropodnikovou spotřebu a pouze zbytek může jít na odbyt. Tedy

$$z = 85(x_1 - 3{,}2x_2 - x_3) + 400x_2 + 139x_3 = 85x_1 + 128x_2 + $$
$$+ 54x_3$$

Sestavme údaje do simplexové tabulky 7.2b a řešme zatím úlohu pro $t = 0$. Po dvou krocích jsme dostali optimální řešení pro $t = 0$. V posledním sloupci vidíme, že jediný koeficient β_{11} je záporný. Při $t = \frac{280}{20} = 14$ se proměnná x_1 stává nulou, a pro $t > 14$ se stává zápornou. Matice $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2]$ je tedy optimální bází úlohy pro $0 \leqq t \leqq 14$.

Tabulka 7.2b

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	
x'_1 x'_2 x'_3	5 1 —1	4 5 $\boxed{3{,}2}$	2 8 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	2 000 + 100 t 1 800 + 230 t 200 + 180 t
z	—85	—128	—54	0	0	0	0
x'_1 x'_2 x_2	$\boxed{100/16}$ 41/16 —5/16	0 0 1	12/16 103/16 5/16	1 0 0	0 1 0	—20/16 —25/16 5/16	1 750 — 125 t $1\,487{,}5 - \frac{820}{16}\,t$ $62{,}5 + \frac{900}{16}\,t$
z	—125	0	—14	0	0	40	8 000 + 720 t
x_1 x'_2 x_2	1 0 0	0 0 1	0,12 6,13 0,35	0,16 —0,41 0,05	0 1 0	$\boxed{-0{,}2}$ —1,05 0,25	280 — 20 t 770 150 + 50 t
z	0	0	16	20	0	15	43 000 + 4 700 t

Pro $t > 14$ najdeme optimální řešení, pokračujeme-li od poslední tabulky duálně simplexovou metodou. Vylučujeme proměnnou x_1 (vektor $\mathbf{a}_1$) a zařazujeme proměnnou x'_3 (vektor $\mathbf{e}_3$). Dostaneme (tab. 7.2c):

Tabulka 7.2c

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	x'_3	
x'_3 x'_2 x_2	—5 —5,25 1,25	0 0 1	—0,6 5,5 0,5	—0,8 —1,25 0,25	0 1 0	1 0 0	—1 400 + 100 t —700 + 105 t 500 + 25 t
z	75	0	25	32	0	0	54 000 + 3 200 t

Novou optimální bází je $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2]$. Protože všechna β_{1i} jsou nezáporná, znamená to, že $\mathbf{B}_1$ je optimální bází pro všechna $t \geqq 14$.

Dostaneme tedy celkem dva dílčí intervaly: pro $0 \leqq t \leqq 14$ je optimální bází $\mathbf{B}_0$ a pro $t \geqq 14$ je optimální bází $\mathbf{B}_1$, tedy pro $t = 14$ existují dvě optimální báze.

Zabývali jsme se dosud jenom případem a), kdy úloha má pro $t = t_0$ optimální řešení.

V případě b), kdy úloha nemá pro $t = t_0$ přípustné řešení, jsou dvě možnosti:

b1) Ani duální problém nemá přípustné řešení a pak podle vět o dualitě nemůže úloha mít optimální řešení pro žádné t.

b2) Duální úloha má přípustné řešení. Předpokládejme, že $\mathbf{B}$ je duálně přípustná báze, avšak primárně nepřípustná. To znamená

$$\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0}^T \qquad \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{0}^T,$$

ale vektor $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t_0)$ není nezáporný.
Stane-li se pro některé $t \geqq t_0$ vektor

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t)$$

nezáporným, pak $\mathbf{B}$ bude při této hodnotě t optimální bází a dále pak postupujeme jako v případě a). Obsahuje-li $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t)$ záporné souřadnice při všech $t_0 \leqq t \leqq t^0$, pak nemá úloha přípustné řešení v celém intervalu.

V případě c) může účelová funkce při $t = t_0$ růst neomezeně. To znamená, že duální úloha nemá přípustné řešení. Nepřípustnost duální úlohy však nezávisí na t, to znamená, že zůstává nepřípustnou při jakékoli hodnotě t. Jinými slovy to znamená, že úloha nemůže mít v tomto případě konečné optimum pro žádnou hodnotu t.

7.3 ROZBOR ZMĚN V CENÁCH

Předpokládejme opět, že máme již optimální řešení s optimální bází $\mathbf{B}$, tj.

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}^T \\ &\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{0}^T, \qquad \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^T \geqq \mathbf{0}^T \end{aligned} \tag{7.4}$$

Mění-li se dodatečně vektor $\mathbf{c}$, zůstává $\mathbf{B}$ zřejmě i nadále přípustnou bází ($\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}^T$), může ovšem přestat být optimální bází, stane-li se některá souřadnice vektorů (7.4) zápornou. V tomto případě volíme jeden ze sloupců, kde $c_j' - c_j$ je záporné, za klíčový sloupec a pokračujeme normálně simplexovou metodou v hledání optimálního řešení. Zvláště jednoduchý je případ, kdy se mění jenom ceny nezákladních procesů. V tom případě stačí podle (7.4) přírůstek cen odečíst v poslední řádce poslední části simplexové tabulky, abychom zjistili, zda řešení zůstává optimální.

Vezměme pro ilustraci opět příklad 5.3. V optimálním řešení jsou tam procesy první, třetí a čtvrtý. Předpokládejme nejdříve, že se mění jenom cena druhého procesu (nezákladního). Jak je zřejmé z poslední řádky tabulky (str. 128), bude mít na optimální řešení vliv pouze přírůstek této ceny, a to přírůstek větší než 53,5 Kčs.

Předpokládejme nyní, že vzroste cena čtvrtého (základního) procesu z 200 na 220. V tomto případě je nutno poslední řádku tabulky přepočítat. Provádí se to prostě tak, že jednotlivé sloupce tabulky se násobí novým vektorem $\bar{\mathbf{c}}^T$ (uvedeno v tabulce vpravo) a odečtou se od výsledku ceny příslušných procesů (tab. 7.3):

Tabulka 7.3

500	1	0,125	0	0	0,01	$\boxed{0,175}$	—0,1	135
250	0	0,575	0	1	—0,07	0,025	0,1	105
220	0	0,65	1	0	0,26	—0,45	0,2	110
	0	66,5	0	0	426	—4,5	22	121 100

Vidíme, že báze $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3]$ přestala být optimální. Stačí však zařadit x_2' do řešení, abychom dostali nové optimum.

Uvažujeme opět případ, kdy vektor $\mathbf{c}$ je lineárně závislý na parametru t, který se může měnit v nějakém intervalu

$$\langle t_0, t^0 \rangle,$$

tj. $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t$. Stejně jako v případě, kdy vektor $\mathbf{b}$ byl závislý na proměnlivém parametru, lze i zde dokázat, že interval

$$\langle t_0, t^0 \rangle$$

je možno rozdělit na dílčí intervaly tak, že pro každý dílčí interval existuje jediná optimální báze, popřípadě dokázat, že v daném dílčím intervalu účelová funkce může růst neomezeně.

Příslušné výpočty se mohou opět provést normálně simplexovou metodou tak, že koeficienty účelové funkce se rozepíší do dvou řádků pro $\mathbf{c}_0$ a $\mathbf{c}_1$.

7.4 JINÉ ZMĚNY V PODMÍNKÁCH ÚLOHY

Změny požadavkového vektoru a vektoru cen, o nichž jsme uvažovali v předchozích článcích, se v praxi vyskytují nejčastěji. Je však důležité brát v úvahu i jiné možné změny v podmínkách úlohy, jako změny v počtu proměnných (procesů) a v počtu omezení. Zkoumat vliv těchto změn na řešení je důležité i z početně technických důvodů. Je-li totiž úloha velká rozsahem, je účelné zpočátku vynechat některá omezení, resp. některé proměnné, o nichž předpokládáme, že nebudou mít vliv na řešení. Po výpočtu optimálního řešení je pak možno dodatečně zkoumat, zda vynechaná omezení nebo vynechané proměnné nemají skutečně vliv na řešení.

Dejme tomu, že v úloze o n proměnných a m omezeních připojíme až po výpočtu optimálního řešení nové $(m + 1)$-ní omezení. Je-li nové omezení dáno ve formě nerovnosti, zavedeme další přídatnou proměnnou. Stačí potom v této rovnici eliminovat základní proměnné optimálního řešení a připojit ji k poslední části simplexové tabulky jako další řádku. Je-li v nové řádce poslední prvek nezáporný, pak se optimální řešení v podstatě nemění. Přibude v něm jedině další nezáporná souřadnice (nová přídatná proměnná).

Je-li poslední prvek v nové řádce záporný, není původní optimální řešení již přípustné. Nové optimální řešení najdeme nejvhodněji pomocí duálně simplexové metody.

Je-li nové omezení dáno ve formě rovnice, je postup podobný, s tím rozdílem, že zavedeme v nové rovnici nejdříve jednu pomocnou proměnnou.

Jako příklad vezměme opět úlohu 5.3 a předpokládejme, že je dána další podmínka, že totiž výrobku V_3 musí být nejméně dvakrát tolik, co výrobku V_1, tj. musí platit

$$x_3 \geqq 2x_1 ,$$

nebo po úpravě a po doplnění přídatnou proměnnou

$$2x_1 - x_3 + x_4' = 0$$

Připojme koeficienty této rovnice jako další řádku k poslední části simplexové tabulky a dostaneme v tab. 7.4a:

Tabulka 7.4a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	
x_1	1	0,125	0	0	0,01	0,175	—0,1	0	135
x_4	0	0,575	0	1	—0,07	0,025	0,1	0	105
x_3	0	0,65	1	0	0,26	—0,45	0,2	0	110
x_4'	2	0	—1	0	0	0	0	1	0
z	0	53,5	0	0	37,4	4,5	18	0	118 900

Abychom zde dostali čtyři jednotkové vektory, stačí odečíst dvojnásobek první řádky od řádky čtvrté a přičíst k ní řádku třetí. Protože tím dostaneme na pravé straně čtvrtého řádku záporné číslo (—160), není takto získané základní řešení přípustné. Pokračujeme-li dále pomocí duálně simplexové metody, dostaneme v jediném dalším kroku nové optimální řešení, jak je zřejmé z tab. 7.4b.

Tabulka 7.4b

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	
x_1	1	0,125	0	0	0,01	0,175	—0,1	0	135
x_4	0	0,575	0	1	—0,07	0,025	0,1	0	105
x_3	0	0,65	1	0	0,26	—0,45	0,2	0	110
x_4'	0	0,40	0	0	0,24	$\boxed{-0{,}80}$	0,4	1	—160
z	0	53,5	0	0	37,4	4,5	18	0	118 900
x_1	1	0,212 5	0	0	0,062 5	0	—0,012 5	0,218 75	100
x_4	0	0,587 5	0	1	—0,062 5	0	0,112 5	0,031 25	100
x_3	0	0,425	1	0	0,125	0	—0,025	—0,056 25	200
x_2'	0	—0,5	0	0	—0,3	1	—0,5	—1,25	200
z	0	55,7	0	0	38,75	0	20,25	5,625	118 000

Výsledek ukazuje, že splněním nové podmínky se výsledek zhoršuje (což se dalo logicky očekávat). Přitom v optimálním případě zůstane 200 jednotek druhé suroviny nevyužito.

Stejně jednoduše jako připojení nových podmínek se řeší případy, kdy se dodatečně připojují nové proměnné (nové procesy). Je-li $\mathbf{a}_{n+1}$ vektor nově zaváděného procesu, c_{n+1} jeho cena a $\mathbf{B}$ optimální báze původní úlohy, pak je třeba především určit rozdíl mezi cenou ekvivalentní kombinace a cenou daného procesu, tj. $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1} - c_{n+1}$.

Podle znaménka tohoto rozdílu určíme, zda $\mathbf{B}$ zůstává optimální bází, či zda je nutno nový vektor $\mathbf{a}_{n+1}$ zařadit do báze.

Uvedený rozdíl určíme snadno, uvědomíme-li si, že $\bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{u}^T$ je vektor řešení duální úlohy. Je třeba tedy ze skalárního součinu tohoto vektoru a vektoru nového procesu odečíst c_{n+1}. Ukáže-li se, že nový proces je třeba zařadit do řešení, je pochopitelně třeba vektor $\mathbf{a}_{n+1}$ nejdříve transformovat, tj. určit $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1}$, a pak teprve připsat jako další sloupec do simplexové tabulky.

Jako příklad předpokládejme opět, že v úloze 5.3 se dodatečně zjistila možnost vyrábět ještě další výrobek V_5 o ceně $c_5 = 400$. Na výrobu jednotky V_5 se spotřebuje 8 jednotek první suroviny, 12,4 jednotek druhé a 5,625 jednotek třetí suroviny; tj. vektor nového procesu

$$\mathbf{a}_{n+1}^T = [8;\ 12{,}4;\ 5{,}625];$$

protože

$$\mathbf{u}^T = [37{,}4;\ 4{,}5;\ 18],$$

snadno spočteme, že

$$c'_{n+1} - c_{n+1} = \mathbf{u}^T\mathbf{a}_{n+1} - c_{n+1} = 56{,}25,$$

což je kladné číslo. To znamená, že optimální řešení zůstává nezměněné, nový proces nemá na řešení vliv.

Kdyby cena jednotky nového výrobku V_5 činila např. 480 Kčs, pak

$$c'_{n+1} - c_{n+1} = -23{,}75$$

To znamená, že báze $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3]$ by přestala být optimální. Abychom určili nové optimální řešení, transformujeme nejdříve vektor $\mathbf{a}_{n+1}$:

$$\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}175 & -0{,}1 \\ -0{,}07 & 0{,}025 & 0{,}1 \\ 0{,}26 & -0{,}45 & 0{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 12{,}4 \\ 5{,}625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}687\,5 \\ 0{,}312\,5 \\ -2{,}375 \end{bmatrix}$$

Takto transformovaný vektor připojíme jako další sloupec k poslední části simplexové tabulky a zařadíme nový vektor do báze, jak je zřejmé z tab. 7.4c.

Tabulka 7.4c

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x'_1	x'_2	x'_3	
x_1	1	0,125	0	0	$\boxed{1{,}687\,5}$	0,01	0,175	—0,1	135
x_4	0	0,575	0	1	0,312 5	—0,07	0,025	0,1	105
x_3	0	0,65	1	0	—2,375	0,26	—0,45	0,2	110
z	0	53,5	0	0	—23,75	37,4	4,5	18	119 800

7.5 ŘEŠENÍ ROZSÁHLÝCH ÚLOH POMOCÍ ROZKLADU (DEKOMPOZICE)

V praxi, zejména při optimalizaci na úrovni národohospodářské, se vyskytují úlohy takového rozsahu (stovky nebo tisíce omezení), že jejich řešení pomocí simplexové metody se stává technickým problémem i při použití samočinných počítačů. Je

proto pochopitelná snaha nalézt takové metody, které by dovolily zredukovat řešení rozsáhlých úloh na řešení řady úloh menších (stručně tomuto postupu říkáme dekompozice). První ucelený dekompoziční algoritmus navrhli Dantzig a Wolfe; na jejich práci navazují více či méně jiné dekompoziční metody.*)

Níže podáme stručný výklad dekompoziční metody Dantziga – Wolfa.

Předpokládejme, že úloha je dána ve standardním tvaru: určit n-rozměrný vektor $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, který splňuje podmínku

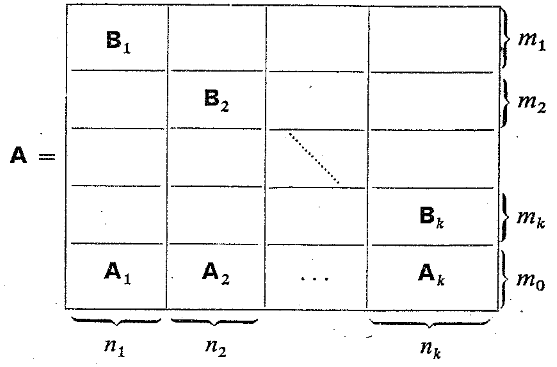
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

a maximalizuje lineární formu

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $(m\,.\,n)$,
$\mathbf{b}$ — m-rozměrný vektor,
$\mathbf{c}$ — n-rozměrný vektor.

Předpokládejme dále, že matici $\mathbf{A}$ lze (event. po přeřazení řádků a sloupců) rozdělit na bloky (submatice) tímto způsobem:



při čemž $\mathbf{B}_j$ je nenulová matice typu $(m_j\,.\,n_j)$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$; $\mathbf{A}_i$ je matice typu $(i = 1, 2, \ldots, k)$; $(m_0\,.\,n_i)$ $(m_0 + m_1 + \ldots + m_k = m;\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, ostatní prvky matice $\mathbf{A}$, tj. prvky v neoznačených políčkách, jsou nulové.

Poznámka: V každém případě lze matici koeficientů $\mathbf{A}$ rozdělit uvedeným způsobem na dva bloky

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}.$$

---

*) Dantzig, G. B., Wolfe, P.: Decomposition Principle for Linear Programs, Operations Research. January 1960.

Kornai, J., Lipták, T.: Kétszintü tervezés. Práce matematického ústavu Maďarské akademie věd, VII. ročník, série B, sv. 4, 1962.

Výše znázorněný rozklad na bloky je celkem přirozený, rozpadá-li se studovaný systém na podsystémy. Tak např. u sdružení podniků se část omezení týká jen individuálního podniku; jsou to např. omezení kapacitní, omezení v místních surovinách apod. (příslušné koeficienty pak tvoří blok $\mathbf{B}_j$). Část omezení je společná všem podnikům sdružení; jsou to např. omezení vyplývající ze vzájemných dodávek mezi podniky sdružení (příslušné koeficienty tvoří matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$).

Rozdělíme-li též vektor $\mathbf{x}$ na bloky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ o rozměru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, podobně vektor $\mathbf{c}$ na bloky $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ opět o rozměru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, a vektor $\mathbf{b}$ na bloky $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_0$ o rozměru $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_0$, můžeme úlohu přepsat takto:

Určit nezáporné vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ tak, aby byla splněna omezení

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{B}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \tag{7.5}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_0 \tag{7.6}$$

a aby lineární forma

$$z = \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{c}_k^T\mathbf{x}_k \tag{7.7}$$

nabyla maxima.

Omezení pod (7.5) lze považovat za samostatná omezení dílčích úloh spojených navzájem omezeními (7.6).

Za účelem zjednodušení dalšího výkladu a symboliky omezíme se na $k = 2$ (výsledky platí ovšem obecně, jak bude zřejmé z dalšího výkladu), tj. omezíme se na úlohu:

Určit nezáporné vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, které splňují omezení

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \tag{7.5a}$$

a

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_0 \tag{7.6a}$$

a maximalizují lineární formu

$$z = \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2 \tag{7.7a}$$

$\mathbf{B}_1$ je jako výše matice typu $(m_1 \,.\, n_1)$, $\mathbf{B}_2$ matice typu $(m_2 \,.\, n_2)$, $\mathbf{A}_1$ je matice typu $(m_0 \,.\, n_1)$, $\mathbf{A}_2$ matice typu $(m_0 \,.\, n_2)$.

Každé přípustné řešení úlohy musí pochopitelně splnit jak omezení (7.5a), tak i omezení (7.6a). Předpokládejme zatím, že množiny přípustných řešení soustav rovnic (7.5a) jsou omezené. Pak ale lze každé přípustné řešení těchto soustav vyjádřit jako konvexní kombinaci jejich základních přípustných řešení.

Dejme tomu, že první soustava rovnic (7.5a) má celkem r základních přípustných řešení

$$\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(r)}$$

a druhá má s základních přípustných řešení

$$\mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_2^{(s)};$$

pak lze vyjádřit libovolné řešení
soustavy $\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ ve formě

$$\mathbf{x}_1 = y_{11}\mathbf{x}_1^{(1)} + y_{12}\mathbf{x}_1^{(2)} + \ldots + y_{1r}\mathbf{x}_1^{(r)},$$

kde

$$\begin{aligned} &y_{1h} \geqq 0 \quad (\mathrm{h} = 1, 2, \ldots, r), \\ &y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{1r} = 1, \end{aligned} \tag{7.8}$$

soustavy $\mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ ve formě

$$\mathbf{x}_2 = y_{21}\mathbf{x}_2^{(1)} + y_{22}\mathbf{x}_2^{(2)} + \ldots + y_{2s}\mathbf{x}_2^{(s)},$$

kde

$$\begin{aligned} &y_{2k} \geqq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, s), \\ &y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{2s} = 1 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Aby vektor $\left[\dfrac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_2}\right]$ byl řešením celé úlohy, musí ovšem splňovat i soustavu rovnic (7.6a), tj. koeficienty y_{pq} musíme volit tak, aby platilo

$$\mathbf{A}_1(y_{11}\mathbf{x}_1^{(1)} + y_{12}\mathbf{x}_1^{(2)} + \ldots + y_{1r}\mathbf{x}_1^{(r)}) + \mathbf{A}_2(y_{21}\mathbf{x}_2^{(1)} + y_{22}\mathbf{x}_2^{(2)} + \ldots + y_{2s}\mathbf{x}_2^{(s)}) = \mathbf{b}_0,$$

anebo jinak psáno

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(1)})\, y_{11} + (\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(2)})\, y_{12} + \ldots + (\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(r)})\, y_{1r} + (\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(1)})\, y_{21} + (\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(2)})\, y_{22} + \\ &+ \ldots + (\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(s)})\, y_{2s} = \mathbf{b}_0 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Předpokládejme nyní, že známe všechna přípustná základní řešení soustav rovnic (7.5a), tedy že $\mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_1^{(r)}, \mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_2^{(s)}$ jsou známé vektory. Pak jsou také výrazy v závorkách v (7.9), tj. $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(1)}$ atd. rovněž známé vektory, a to rozměru m_0. Soustava (7.9) je tedy soustavou m_0 rovnic o $r + s$ neznámých y_{1h}, y_{2k}. Máme-li řešení této soustavy, dostaneme podle (7.8) snadno přípustné řešení úlohy (7.5) až (7.7), ovšem za předpokladu, že y_{1h}, y_{2k} splňují i další podmínky (7.8), tj. podmínky nezápornosti a podmínky $\sum_h y_{1h} = 1, \sum_k y_{2k} = 1$.

Dosadíme-li výrazy (7.8) též do účelové funkce (7.7a), dostaneme

$$\begin{aligned} z = {} &\mathbf{c}_1^T(y_{11}\mathbf{x}_1^{(1)} + y_{12}\mathbf{x}_1^{(2)} + \ldots + y_{1r}\mathbf{x}_1^{(r)}) + \mathbf{c}_2^T(y_{21}\mathbf{x}_2^{(1)} + \\ &+ y_{22}\mathbf{x}_2^{(2)} + \ldots + y_{2s}\mathbf{x}_2^{(s)}) \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} z = {} &y_{11}(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(1)}) + y_{12}(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(2)}) + \ldots + y_{1r}(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(r)}) + \\ &+ y_{21}(\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(1)}) + y_{22}(\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(2)}) + \ldots + y_{2s}(\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(s)}), \end{aligned}$$

kde výrazy v závorkách jsou známé skaláry (opět za předpokladu, že všechna základní přípustná řešení soustav (7.5a) jsou známa).

Označme pro stručnost

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(h)} = \mathbf{a}_{1h} \ (h = 1, 2, \ldots, r); \quad \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(k)} = \mathbf{a}_{2k} \ (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{7.10}$$

dále

$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(h)} = d_{1h} \ (h = 1, 2, \ldots, r) \text{ a } \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(k)} = d_{2k} \ (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{7.11}$$

Pak naše úloha je ekvivalentní této úloze:

Určit $r + s$ nezáporných čísel y_{1h}, y_{2k}, která splňují podmínky

$$y_{11}\mathbf{a}_{11} + y_{12}\mathbf{a}_{12} + \ldots + y_{1r}\mathbf{a}_{1r} + y_{21}\mathbf{a}_{21} + y_{22}\mathbf{a}_{22} + \ldots + y_{2s}\mathbf{a}_{2s} = \mathbf{b}_0 \tag{7.12}$$

$$y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{1r} = 1 \tag{7.13}$$

$$y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{2s} = 1 \tag{7.14}$$

a maximalizují lineární formu

$$z = d_{11}y_{11} + d_{12}y_{12} + \ldots + d_{1r}y_{1r} + d_{21}y_{21} + d_{22}y_{22} + \ldots + d_{2s}y_{2s} \tag{7.15}$$

Je totiž zřejmé, že najdeme-li optimální řešení úlohy (7.12) až (7.15), dostaneme dosazením do (7.8) optimální řešení úlohy (7.5a) až (7.7a).

Původní úloha (7.5a) až (7.7a) měla $m_1 + m_2 + m_0$ omezení. Úloha (7.12) až (7.15) má pouze $m_0 + 2$ omezení (obecně ovšem větší počet neznámých než původní úloha). Obecně je možno tímto způsobem zredukovat řešení úlohy (7.5) až (7.7) o $m_1 + \ldots + m_k + m_0$ omezeních na řešení úlohy o $m_0 + k$ omezeních.

Pro stručnost nazveme úlohu (7.12) až (7.15) **úplnou hlavní úlohou.** Mohli jsme ji sestavit za předpokladu, že známe všechna přípustná základní řešení soustav rovnic (7.5a). To je však u poněkud větších úloh naprosto nereálný předpoklad. Naštěstí jejich znalost není při řešení metodou dekompozice ani nutná. Princip dekompoziční metody záleží v tom, že stačí znát některá základní řešení soustav (7.5a). Z nich je možno sestavit **dílčí hlavní úlohu,** tj. úlohu obdobnou (7.12) až (7.15), v níž však bude jenom část neznámých y_{1h}, y_{2k}. Je však otázka, zda optimální řešení dílčí hlavní úlohy je zároveň optimálním řešením úplné hlavní úlohy (a tím tedy po příslušných přepočtech i původní úlohy), nebo zda se dá řešení rozšířením dílčí úlohy zlepšit. Zjistí se to řešením **vedlejších úloh,** jejichž omezeními jsou soustavy rovnic (7.5a) a jejichž účelové funkce získáme úpravou původních cenových koeficientů pomocí duálních proměnných dílčí hlavní úlohy, jak bude odvozeno níže. Řešením těchto vedlejších úloh buď zjistíme, že optimální řešení dílčí hlavní úlohy je současně optimálním řešením úplné hlavní úlohy, anebo dostaneme taková nová základní řešení (7.5a), pomocí nichž lze dílčí hlavní úlohu rozšířit a získat zlepšené řešení. Po konečném počtu takových kroků dostaneme optimální řešení.

Abychom dekompoziční metodu zkonkretizovali, předpokládejme, že známe aspoň tolik přípustných základních řešení soustav (7.5a), a tedy i vektorů $\mathbf{a}_{1h}$, $\mathbf{a}_{2k}$, kolik má úplná hlavní úloha omezení, tedy v našem případě aspoň $m_0 + 2$. Sestavme z těchto údajů dílčí hlavní úlohu a řešme ji. Je pak otázka, zda optimální řešení této dílčí úlohy je zároveň optimálním řešením úplné hlavní úlohy. K zodpovězení této otázky použijeme vět o dualitě.

Označme proměnné duální úlohy symboly $u_1, u_2, \ldots, u_{m_0}, v, w$. Označíme-li prvních m_0 proměnných (tj. duálních proměnných přiřazených prvním m_0 omezením dílčí hlavní úlohy) stručně ve tvaru vektorovém $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \ldots, u_{m_0}]$, můžeme duální úlohu k dílčí hlavní úloze formulovat takto — viz (7.12) až (7.14):

Na množině řešení soustavy nerovností

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a}_{1h} + v \geqq d_{1h} \quad (h = 1, 2, \ldots, r) \tag{7.16}$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a}_{2k} + w \geqq d_{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{7.17}$$

nalézt minimum lineární formy

$$\mathbf{u}^T\mathbf{b}_0 + v + w$$

Máme-li optimální řešení dílčí hlavní úlohy, a tedy i úlohy k ní duální, jsou nerovnosti (7.16) a (7.17) splněny všemi vektory $\mathbf{a}_{1h}$, $\mathbf{a}_{2k}$ zastoupenými v dílčí hlavní úloze (vektory, které jsou v optimální bázi, splňují je jako rovnice). Splňují-li též všechny ostatní vektory koeficientů úplné hlavní úlohy (tj. i ty vektory, které v dané dílčí úloze nejsou zastoupeny) nerovnosti (7.16) a (7.17), pak je dané řešení optimálním řešením úplné hlavní úlohy.

Najdou-li se však v úplné hlavní úloze vektory, které nesplňují uvedené nerovnosti, tj. existují-li v úplné hlavní úloze vektory $\mathbf{a}_{1f}$, resp. $\mathbf{a}_{2g}$, pro které platí

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a}_{1f} + v < d_{1f},$$

resp. (7.18)

$$\mathbf{u}^T\mathbf{a}_{2g} + w < d_{2g},$$

pak je možno zařazením příslušných vektorů (resp. odpovídajících jim proměnných y_{1f}, y_{2g}) dílčí hlavní úlohu rozšířit a pak popř. řešení zlepšit. Jak však zjistit, zda takové vektory existují?

Abychom tuto otázku zodpověděli, upravíme nerovnosti (7.18) tak, že dosadíme za $\mathbf{a}_{1f}$, $\mathbf{a}_{2g}$, d_{1f}, d_{2g} podle (7.10) a (7.11); dostaneme

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(f)}) + v < \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(f)},$$

resp.

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(g)}) + w < \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(g)},$$

anebo po úpravě

$$(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1^{(f)} > v \quad \text{a} \quad (\mathbf{c}_2^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2^{(g)} > w \tag{7.19}$$

Připomeňme si, že $\mathbf{x}_1^{(f)}$ a $\mathbf{x}_2^{(g)}$ jsou nějaká základní řešení soustav (7.5a), tj. soustav rovnic

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

Jde nám nyní o to zjistit, zda existují taková řešení těchto soustav, která splňují (7.19). Za tím účelem řešíme tyto **vedlejší úlohy** (podprogramy):

a) určit vektor

$$\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0},$$

který splňuje podmínku

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$$

a maximalizuje lineární formu

$$(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1$$

b) určit vektor

$$\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0},$$

který splňuje podmínku

$$\mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

a maximalizuje lineární formu

$$(\mathbf{c}_2^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2$$

Jestliže optimální řešení vedlejších úloh a) a b) splňuje podmínky (7.19), rozšíříme dílčí hlavní úlohu o další sloupec (nebo sloupce) s koeficienty $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1$, resp. $\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2$ (kde $\mathbf{x}_1$, resp. $\mathbf{x}_2$ jsou příslušná optimální řešení vedlejších úloh). Nalezneme optimální řešení takto rozšířené úlohy a u nového řešení celý postup opakujeme.

Jestliže pro optimální řešení vedlejších úloh neplatí (7.19), tj. jestliže platí

$$\max\,(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1 = v \quad \text{a} \quad \max\,(\mathbf{c}_2^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2 = w,$$

pak dané řešení dílčí hlavní úlohy je zároveň optimálním řešením úplné hlavní úlohy, a tedy také původní nerozložené úlohy. Řešení hlavní úlohy totiž udává, jak je třeba kombinovat známá základní řešení soustav omezení (7.5a), abychom dostali optimální řešení původní (nerozložené) úlohy.

Všimněme si ještě účelové funkce vedlejších úloh. Vezměme konkrétně účelovou funkci první vedlejší úlohy $(\mathbf{c}_1^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1$. Platí-li

$$\mathbf{c}_1^T = [c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n_1}]$$
$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \ldots, u_{m_0}]$$
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_01} & a_{m_02} & \ldots & a_{m_0n_1} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}_1^T = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}],$$

pak koeficient v účelové funkci u x_{1j} (tj. cena j-tého procesu vedlejší úlohy) se rovná

$$c_{1j}^* = c_{1j} - (u_1a_{1j} + u_2a_{2j} + \ldots + u_{m_0}a_{m_0j}) \qquad (7.20)$$

Uvědomíme-li si, že u_k je duální cena k-tého společného činitele a a_{kj} je množství k-tého společného činitele, potřebné na j-tý proces, pak je zřejmé, že výraz v závorkách je cena společných činitelů vložených do jednotky procesu, vyjádřená v duálních cenách určených podle dílčí hlavní úlohy. Cena j-tého procesu ve vedlejší úloze se tedy rovná původní ceně tohoto procesu v nerozložené úloze (c_{1j}), zmenšené o cenu společných činitelů vložených do tohoto procesu. To ovšem platí, vyjadřují-li společná omezení vesměs okolnost, že máme omezená množství činitelů.

Jsou-li některá omezení jiné povahy, je nutno výše uvedené vztahy příslušně změnit. Tak např. vyjadřuje-li i-té společné omezení okolnost, že určitého výrobku je třeba vyrobit minimálně v předepsaném množství $b_i > 0$, pak duální cena u_i se vztahuje k omezení

$$-a_{i1}x_{11} - a_{i2}x_{12} - \ldots - \leqq -b_i$$

To znamená, že v (7.20) bude mít i-tý člen v závorce znaménko minus ($-u_ia_{ij}$). Protože před závorkou je rovněž znaménko minus, jde v daném případě nikoli o odčítání ceny činitele, ale o přičtení ceny společného výrobku (o dobropis). Cena procesu ve vedlejší úloze se tedy rovná původní ceně procesu, zmenšené o cenu společných činitelů vložených do procesu a zvětšené o cenu společných výrobků vyrobených v daném procesu (vše počítáno v duálních cenách).

Tím je už dána metoda řešení rozsáhlých úloh lineárního programování pomocí dekompozice. Její podstata tkví, jak plyne z předchozího výkladu, v tom, že se daná úloha rozloží na hlavní úlohu a vedlejší úlohy s podstatně menším počtem omezení. Postupuje se tak, že se ze základních řešení vedlejších úloh konstruuje řešení dílčí hlavní úlohy. Jím jsou korigovány cenové koeficienty vedlejších úloh, které se řeší znovu. To umožňuje rozšířit dílčí hlavní úlohu. Řešení této úlohy vede opět k úpravě cen vedlejších úloh atd. Tento proces se opakuje tak dlouho, pokud se nedosáhne optimálního řešení, což se pozná tak, že řešení vedlejších úloh již nevede k rozšíření dílčí hlavní úlohy, tj. nesplňuje nerovnosti (7.19).

Poznámka 1: Dekompoziční metodu jsme vyložili na maximalizační úloze. Je pochopitelné, že jde-li o úlohu minimalizační, je třeba postup patřičně upravit, zejména je třeba změnit smysl nerovností (7.19).

Poznámka 2: Jsou-li omezení dána ve formě nerovností, nic se pochopitelně na postupu nemění. Zavedením přídatných proměnných lze jak hlavní úloha, tak i vedlejší úlohy změnit na rovnice.

Poznámka 3: Při uvedeném postupu není třeba vždy znovu řešit hlavní úlohu a úlohy vedlejší. Při řešení vedlejší úlohy je možno navazovat na optimální řešení předchozí vedlejší úlohy a měnit tam pouze ceny. Podobně při řešení rozšířené dílčí hlavní úlohy je možno navazovat na předchozí optimální řešení přidáním nových sloupců do simplexové tabulky.

Pro ilustraci uvedeme velmi jednoduchý příklad (který by ovšem bylo jednodušší řešit bez dekompozice):

Příklad 7.2. Podnik disponuje čtyřmi činiteli v omezeném množství. Může pomocí nich vyrábět pět výrobků. Základní údaje příkladu jsou uvedeny v tab. 7.5.

Tabulka 7.5

Činitele	Spotřeba činitelů na jednotku výrobku					Disponibilní množství činitelů
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
A	5	1	2	0	0	70
B	2	4	2	0	0	40
C	0	0	0	1	5	25
D	1	2	2	2	3	70
Zisk z jednotky výrobku	90	80	80	40	50	

Podniku jde o maximalizaci zisku.

V matematické formulaci jde tedy o nalezení maxima lineární formy

$$z = 90x_1 + 80x_2 + 80x_3 + 40x_4 + 50x_5$$

za podmínek

$$\begin{aligned} &x_j \geqq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 5) \\ &5x_1 + x_2 + 2x_3 \leqq 70 \\ &2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqq 40 \\ &x_4 + 5x_5 \leqq 25 \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqq 70 \end{aligned}$$

Doplníme-li nerovnosti na rovnice, pak je možno matici koeficientů **A** rozdělit na submatice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix},$$

přičemž

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = [1, 5, 1]$$

$$\mathbf{A}_1 = [1, 2, 2, 0, 0] \qquad \mathbf{A}_2 = [2, 3, 0]$$

Zde je velmi jednoduché nalézt všechna přípustná základní řešení soustav

$$\mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$$

Vynecháme-li přídatné proměnné, jsou to:

$$\mathbf{x}_1^{(1)T} = [0, 0, 0],\ \mathbf{x}_1^{(2)T} = [14, 0, 0],\ \mathbf{x}_1^{(3)T} = [0, 10, 0],\ \mathbf{x}_1^{(4)T} = [0, 0, 20],$$

$$\mathbf{x}_1^{(5)T} = \left[\frac{40}{3}, \frac{10}{3}, 0\right],\ \mathbf{x}_1^{(6)T} = [10, 0, 10],$$

$$\mathbf{x}_2^{(1)T} = [0, 0],\ \mathbf{x}_2^{(2)T} = [25, 0],\ \mathbf{x}_2^{(3)T} = [0, 5]$$

Z nich lze určit

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(1)} = 0,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(2)} = 14,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(3)} = 20,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(4)} = 40,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(5)} = 20,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(6)} = 30,$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(1)} = 0,\ \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(2)} = 50,\ \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(3)} = 15$$

Podobně

$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(1)} = 0,\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(2)} = 1\,260,\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(3)} = 800,\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(4)} = 1\,600,\ \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(5)} = \frac{4\,400}{3},$$
$$\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(6)} = 1\,700$$

$$\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(1)} = 0,\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(2)} = 1\,000,\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(3)} = 250,$$

kde

$$\mathbf{c}_1^T = [90, 80, 80],\ \mathbf{c}_2^T = [40, 50]$$

Z těchto údajů je pak možno sestavit tuto úplnou hlavní úlohu:

Na množině řešení soustavy

$$y_{1h} \geqq 0,\ y_{2k} \geqq 0 \ (h = 1, 2, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} 0y_{11} + 14y_{12} + 20y_{13} + 40y_{14} + 20y_{15} + 30y_{16} + 0y_{21} + 50y_{22} + 15y_{23} + y' &= 70 \\ y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} &= 1 \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} &= 1 \end{aligned}$$

určit maximum lineární formy

$$0y_{11} + 1\,260y_{12} + 800y_{13} + 1\,600y_{14} + \frac{4\,400}{3}y_{15} + 1\,700y_{16} + 0y_{21} + 1\,000y_{22} + {}$$
$$+ 250y_{23}$$

(y' je přídatná proměnná).

Řešení této úplné hlavní úlohy dává zároveň řešení původní úlohy.

Jak jsme ovšem uvedli, obecně je neúnosné určit všechna základní řešení soustav $\mathbf{B}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$. K nalezení výchozího řešení hlavní úlohy stačí v našem případě mít tři sloupce matice koeficientů (tolik je v úplné hlavní úloze omezení), tj. stačí znát tři různá základní řešení.

Předpokládejme, že známe jenom řešení $\mathbf{x}_1^{(1)}$, $\mathbf{x}_1^{(2)}$ a $\mathbf{x}_2^{(1)}$; z nich sestavíme dílčí hlavní úlohu, a to přímo do simplexové tab. 7.6a.

Tabulka 7.6a

	y_{11}	y_{12}	y_{21}	y'	
y'	0	14	0	1	70
y_{11}	1	1	0	0	1
y_{21}	0	0	1	0	1
	0	—1 260	0	0	0

K řešení dílčí hlavní úlohy se nejlépe hodí revidovaná simplexová metoda, protože dává zároveň i potřebné duální proměnné a obsahuje jen ty sloupce, které v dalším výpočtu budeme potřebovat. Řešení je zřejmé z další tab. 7.6b.

Tím jsme našli optimální řešení dílčí úlohy. Hodnoty duálních proměnných jsou $u = 0$, $v = 1\,260$, $w = 0$. Protože $u = 0$, zůstávají cenové koeficienty vedlejších úloh stejné jako v původní úloze. Máme tedy řešit tyto vedlejší úlohy:

Tabulka 7.6b

	y'	y_{11}	y_{21}		
y'	1	0	0	70	14
y_{11}	0	1	0	1	$\boxed{1}$
y_{24}	0	0	1	1	0
	0	0	0	0	—1 260
y'	1	—14	0	56	
y_{12}	0	1	0	1	
y_{21}	0	0	1	1	
	0	1 260	0	1 260	

A. Na množině řešení soustavy

$$x_j \geqq 0 \; (j = 1, 2, 3)$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1' = 70$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_2' = 40$$

určit maximum lineární formy

$$90x_1 + 80x_2 + 80x_3$$

B. Na množině řešení soustavy

$$x_j \geqq 0 \; (j = 4,5)$$
$$x_4 + 5x_5 + x_3' = 25$$

určit maximum lineární formy

$$40x_4 + 50x_5$$

Řešení úlohy A je uvedeno v tab. 7.7a.

Tabulka 7.7a

	x_1	x_2	x_3	x_1'	x_2'	
x_1'	$\boxed{5}$	1	2	1	0	70
x_2'	2	4	2	0	1	40
z	—90	—80	—80	0	0	0
x_1	1	1/5	2/5	1/5	0	14
x_2'	0	18/5	$\boxed{6/5}$	—2/5	1	12
z	0	—62	—44	18	0	1 260
x_1	1	—1	0	1	—1/3	10
x_3	0	3	1	—1/3	5/6	10
z	0	70	0	10/3	110/3	1 700

Dostali jsme řešení [10, 0, 10], tj. řešení označené výše $\mathbf{x}_1^{(6)}$.

Řešení úlohy B je triviální, totiž [25, 0]; je to řešení označené výše $\mathbf{x}_2^{(2)}$.

Jak se snadno přesvědčíme, řešení $\mathbf{x}_1^{(6)}$ splňuje podmínku (7.19). Platí totiž

$$(\mathbf{c}_1^T — \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1^{(6)} = \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(6)} — \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(6)} = (1\,700 — 0) > 1\,260$$

Podobně ovšem i řešení $\mathbf{x}_2^{(2)}$ splňuje podmínku (7.19).

Zařadíme v dílčí hlavní úloze jako další proměnnou y_{16} odpovídající řešení $\mathbf{x}_1^{(6)}$. Vektor koeficientů této proměnné jsme již spočítali výše (při sestavování úplné hlavní úlohy). Je to $\mathbf{a}_{16}$; v hlavní úloze mu s ohledem na další dvě omezení odpovídá $\mathbf{a}_{16}^T = [30, 1, 0]$. Cenovým koeficientem je 1 700. Násobíme-li $\mathbf{a}_{16}$ inverzní bází, dostaneme [16, 1, 0] a transformovaný cenový koeficient bude 1 260 — 1 700 = —440. Řešení rozšířené dílčí hlavní úlohy je uvedeno v tab. 7.8a.

Platí zde opět $u = 0$, to znamená, že vedlejší úlohy není třeba znovu řešit. Řešení $\mathbf{x}_2^{(2)}$ splňuje stále podmínku (7.19):

$$(\mathbf{c}_2^T — \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2^{(2)} = (1\,000 — 0) > 0$$

Tabulka 7.8a

	y'	y_{11}	y_{21}		y_{16}
y'	1	—14	0	56	16
y_{12}	0	1	0	1	$\boxed{1}$
y_{21}	0	0	1	1	0
	0	1 260	0	1 260	—440
y'	1	—30	0	40	
y_{16}	0	1	0	1	
y_{21}	0	0	1	1	
	0	1 700	0	1 700	

Rozšíříme tedy hlavní úlohu zařazením proměnné y_{22}. Vektor jejích koeficientů $\mathbf{a}_{22}^T = [50, 0, 1]$ zůstává po transformaci nezměněn, stejně jako příslušný cenový koeficient (1 000). Pokračujeme tedy v řešení dílčí hlavní úlohy takto:

Tabulka 7.8b

	y'	y_{11}	y_{21}		y_{22}
y'	1	—30	0	40	$\boxed{50}$
y_{16}	0	1	0	1	0
y_{21}	0	0	1	1	1
	0	1 700	0	1 700	—1 000
y_{22}	1/50	—3/5	0	4/5	
y_{16}	0	1	0	1	
y_{21}	—1/50	3/5	1	1/5	
	20	1 100	0	2 500	

Nové řešení dává $u = 20$, $v = 1\,100$, $w = 0$.
Ve vedlejších úlohách je tedy nutno změnit cenové koeficienty, a to na

$$\mathbf{c}_1^{*T} = \mathbf{c}_1^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1 = [70, 40, 40]$$

a

$$\mathbf{c}_2^{*T} = \mathbf{c}_2^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2 = [0, -10]$$

Přepočteme-li poslední část simplexové tab. 7.7a úlohy A, dostaneme

Tabulka 7.7b

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	
x_1	1	—1	0	1	—1/3	10
x_3	0	3	1	—1/3	5/6	10
z	0	10	0	170/3	10	1 100

To znamená, že báze zůstala optimální; vedlejší úloha A nemůže přispět k zlepšení řešení dílčí hlavní úlohy.

Řešení úlohy B je opět triviální, a to mnohoznačné. Optimálními základními řešeními jsou

$$\mathbf{x}_2^{(1)T} = [0, 0] \quad \text{a} \quad \mathbf{x}_2^{(2)T} = [25, 0]$$

Ani jedno z těchto řešení však nesplňuje podmínku (7.19). Je to zřejmé již z toho, že obě řešení jsou zahrnuta do posledního optimálního řešení dílčí hlavní úlohy.
Lze se přesvědčit i přímo, že pro obě uvedená řešení platí:

$$(\mathbf{c}_2^T - \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2 = 0 = w$$

Máme tedy optimální řešení dílčí hlavní úlohy $y_{16} = 1$, $y_{21} = 1/5$, $y_{22} = 4/5$ s hodnotou účelové funkce 2 500. Sestavíme optimální řešení původní nerozložené úlohy

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{x}_1^{(6)T} + \frac{1}{5}\,\mathbf{x}_2^{(1)T} + \frac{4}{5}\,\mathbf{x}_2^{(2)T} = [10, 0, 10, 20, 0]$$

Hodnota účelové funkce je i zde 2 500 (= 10 . 90 + 10 . 80 + 20 . 40).
Abychom dokázali obecně, že dekompoziční algoritmus vede k cíli, je třeba
a) dokázat konečnost postupu,
b) zkoumat, zda dekompoziční algoritmus funguje i v případě, že opustíme předpoklad o omezenosti množin řešení soustav (7.5);

c) určit způsob nalezení výchozího řešení. Poslední je důležité proto, že obecně se mohou vyskytnout potíže s nalezením $m_0 + k$ základních řešení soustav (7.5).

Ad a) Pokud jde o konečnost postupu, lze ji odůvodnit stejně jako u simplexové metody; pomíjíme zde proto podrobný důkaz. Není-li úloha degenerovaná, zlepšuje se řešení dílčí hlavní úlohy každým krokem o konečnou hodnotu. Tím je zaručeno, že postup nemůže vést k opakování některé báze. Protože úloha má konečný počet bází, musíme zřejmě po konečném počtu kroků dospět buď k optimálnímu řešení, nebo k zjištění, že účelová funkce může růst neomezeně (předpokládáme, že hlavní úloha má přípustné řešení, což se projeví hned při hledání výchozího řešení).

Ad b) Dosud jsme předpokládali, že množiny řešení soustav (7.5a) jsou omezené. Ve skutečnosti se může stát, že některá ze soustav (7.5a) má množinu řešení neomezenou, i když úloha jako celek má množinu řešení omezenou (tj. má konečné optimální řešení). Předpokládejme, že soustava

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \tag{7.21}$$

má množinu přípustných řešení neomezenou. Uvažujme zároveň homogenní soustavu

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \tag{7.22}$$

Jestliže $\mathbf{x}_1^{(0)}$ je řešením nehomogenní soustavy (7.21) a $\mathbf{x}_1^{(0)}$ řešením homogenní soustavy (7.22), pak (jak se lze snadno přesvědčit dosazováním) je řešením nehomogenní soustavy též vektor $\mathbf{x}_1^{(0)} + k\mathbf{x}_1^{(0)}$, kde k je libovolné reálné číslo. Lze snadno odvodit, že soustava (7.21) má množinu přípustných řešení neomezenou tehdy a jen tehdy, jestliže homogenní soustava (7.22) má netriviální (nenulové) řešení. Potom však je možno každé přípustné řešení soustavy (7.21) vyjádřit jako konvexní kombinaci základních přípustných řešení soustavy (7.21), zvětšenou o nezápornou kombinaci různých nezáporných řešení homogenní soustavy (7.22).*)

To ale znamená, že se mění výrazy (7.8) jen potud, že mezi sčítanci na pravé straně budou kromě přípustných základních řešení soustav (7.5a) též násobky přípustných řešení příslušných homogenních soustav. Přitom koeficienty posledních jsou nezáporná čísla nepodléhající dalším omezením. Jinými slovy, v rovnici

$$y_{11} + y_{12} + \ldots + y_{1r} = 1$$

(a v podobných dalších rovnicích) jsou zastoupeny pouze ty proměnné y_{1h}, které se vztahují k základním řešením nehomogenní soustavy. To platí pochopitelně i pro omezení (7.13) a (7.14) úplné hlavní úlohy.

Ad c) Pokud jde o výchozí řešení dílčí hlavní úlohy, lze vždy výpočtem získat tolik základních řešení vedlejších úloh, kolik má úplná hlavní úloha omezení, a tak

---

*) Řešení homogenní soustavy nepovažujeme za různá, liší-li se jenom multiplikativní konstantou tj. $\mathbf{x}_1^{(0)}$ a $k\mathbf{x}_1^{(0)}$ nejsou různá řešení.

sestavit dílčí hlavní úlohu. Není to však nutné. K určení výchozího řešení hlavní úlohy lze použít i metody pomocných proměnných, tj. řešit úlohu ve dvou fázích. Tato metoda však vyžaduje určité úpravy.

Předpokládejme, že máme po ruce jenom po jednom řešení soustav (7.5a), a to řešení $\mathbf{x}_1^{(0)}$ a $\mathbf{x}_2^{(0)}$. Dílčí hlavní úloha z nich konstruovaná by zněla:

Určit nezáporná čísla y_{10}, y_{20}, která splňují omezení

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{10} y_{10} + \mathbf{a}_{20} y_{20} &= \mathbf{b}_0 \\ y_{10} \qquad\qquad &= 1 \\ y_{20} &= 1 \end{aligned}$$

a maximalizují

$$z = d_{10} y_{10} + d_{20} y_{20}$$

Vzhledem k počtu omezení $m_0 + 2$ v úplné hlavní úloze je nutno v dílčí hlavní úloze počet proměnných doplnit na toto číslo. V první fázi doplňujeme dílčí hlavní úlohu m_0 pomocnými proměnnými, které přidáme v prvních m_0 omezeních. Protože číselná hodnota proměnných y_{10}, y_{20} je posledními dvěma omezeními pevně určena, musíme u pomocných proměnných použít podle potřeby koeficientů +1 nebo —1, tak aby byla zachována nezápornost a aby všechna omezení byla splněna.

Pomocná úloha bude tedy znít:

Určit nezáporná čísla $y_{10}, y_{20}, y'_1, y'_2, \ldots, y'_{m_0}$,
která splňují omezení

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{10} y_{10} + \mathbf{a}_{20} y_{20} \pm \mathbf{e}_1 y'_1 \pm \mathbf{e}_2 y'_2 \pm \ldots \pm \mathbf{e}_{m_0} y'_{m_0} &= \mathbf{b}_0 \\ y_{10} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ y_{20} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \end{aligned} \tag{7.23}$$

a minimalizují

$$z' = y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_{m_0}. \tag{7.24}$$

Zde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{m_0}$ jsou jednotkové vektory rozměru m_0 a y'_i jsou pomocné proměnné.

Znaménko u pomocných proměnných není obtížné volit. V každé z m_0 prvních rovnic je totiž jediná pomocná proměnná. Znaménko volíme prostě tak, aby rovnice byla splněna při nezáporné hodnotě pomocné proměnné.

Protože nyní máme přesně tolik rovnic, kolik proměnných, je pouze jedno základní řešení a hodnoty duálních proměnných jsou dány relacemi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{a}_{10} + v &= 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{a}_{20} + w &= 0 \\ \pm \mathbf{u}^T \mathbf{e}_1 \quad &= 1 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \pm \mathbf{u}^T \mathbf{e}_{m_0} \quad &= 1 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že jde o úlohu minimalizační, můžeme řešení dílčí hlavní úlohy zlepšit tím, že rozšiřujeme dílčí hlavní úlohu o vektory $\mathbf{a}_{1f}$, $\mathbf{a}_{2g}$, pro něž platí

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T\mathbf{a}_{1f} + v &> 0 \\ \mathbf{u}^T\mathbf{a}_{2g} + w &> 0\text{*)} \end{aligned}$$

Za tím účelem hledáme maximum lineárních forem

$$(\mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1 \qquad\qquad (\mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2$$

na množině řešení soustav

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0} & \qquad\qquad & \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 & & \mathbf{B}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \end{array}$$

Pokud $\max(\mathbf{u}^T\mathbf{A}_1)\,\mathbf{x}_1 > -v$, popř. $\max(\mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\,\mathbf{x}_2 > -w$, zařadíme příslušný vektor do řešení.

Další postup je obdobný jako byl výše. Má-li úloha řešení, pak zřejmě minimum pomocné účelové funkce se musí rovnat nule. Tím se i všechny pomocné proměnné anulují, čímž získáme výchozí řešení dílčí hlavní úlohy.

Pro ilustraci uvedeme příklad.

Příklad 7.3. Na množině řešení soustavy

$$\begin{array}{l} x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6) \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \phantom{{}+ 2x_4 + x_5 + 4x_6} \leqq 120 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \phantom{{}+ 2x_4 + x_5 + 4x_6} \leqq 250 \\ \phantom{2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + {}} 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leqq 150 \\ \phantom{2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + {}} 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leqq 300 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \leqq 340 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \geqq 430 \end{array}$$

nalézt maximum lineární formy

$$z = 20x_1 + 80x_2 + 40x_3 + 70x_4 + 230x_5 + 480x_6$$

Rozdělení matice koeficientů na bloky je zde zřejmé. Jednak zde jsou omezení vedlejších úloh

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq 120 & \text{a} & 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leqq 150 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqq 250 & & 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leqq 300, \end{array}$$

jednak společná omezení

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 4x_6 \leqq 340 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \geqq 430 \end{array}$$

Dejme tomu, že známe jenom triviální řešení obou vedlejších úloh, tj.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad \text{a} \qquad x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

Jim odpovídají tyto vektory úplné hlavní úlohy:

$$\mathbf{a}_{10}^T = [0, 0] \qquad \text{a} \qquad \mathbf{a}_{20}^T = [0, 0]$$

Můžeme z nich sestavit tuto dílčí hlavní úlohu:

Nalézt nezáporná čísla y_{10}, y_{20}, která splňují omezení

$$\begin{array}{lcl} 0y_{10} + 0y_{20} & \leqq & 340 \\ 0y_{10} + 0y_{20} & \geqq & 430 \\ y_{10} & = & 1 \\ \phantom{0y_{10} + 0}y_{20} & = & 1 \end{array}$$

a maximalizují

$$z = 0y_{10} + 0y_{20}$$

Po doplnění přídatnými proměnnými budou mít omezení tvar

$$\begin{array}{lllcl} 0y_{10} + 0y_{20} & + y_1' & & = & 340 \\ 0y_{10} + 0y_{20} & & -y_2' & = & 430 \\ y_{10} & & & = & 1 \\ \phantom{0y_{10} + 0}y_{20} & & & = & 1 \end{array}$$

Abychom dostali výchozí řešení, přidáme ještě v druhém omezení pomocnou proměnnou y'' a budeme v první fázi minimalizovat $z'' = y''$. Máme tedy v první fázi tuto pomocnou úlohu:

Určit nezáporná čísla y_{10}, y_{20}, y_1', y_2', y'', která splňují omezení

$$\begin{array}{llllcl} 0y_{10} + 0y_{20} & + y_1' & & & = & 340 \\ 0y_{10} + 0y_{20} & & -y_2' & + y'' & = & 430 \\ y_{10} & & & & = & 1 \\ \phantom{0y_{10} + 0}y_{20} & & & & = & 1 \\ z - 0y_{10} - 0y_{20} & & & & = & 0 \\ z'' & & & -y'' & = & 0 \end{array}$$

a minimalizují z''.

---

*) Srovnej (7.18), kde vzhledem k tomu, že jde o minimalizaci, měníme směr nerovnosti a dosadíme za d_{1f} a d_{2g} nuly.

Po úpravě můžeme z uvedených údajů sestavit simplexovou tab. 7.9a.

Tabulka 7.9a

	y_{10}	y_{20}	y'_1	y'_2	y''	
y'_1	0	0	1	0	0	340
y''	0	0	0	—1	1	430
y_{10}	1	0	0	0	0	1
y_{20}	0	1	0	0	0	1
z	0	0	0	0	0	0
z''	0	0	0	—1	0	430

Budeme dále postupovat revidovanou simplexovou metodou. Výchozí báze dílčí úlohy v tab. 7.9b (pro vhodnost dalšího postupu přeřazujeme sloupce) je optimální.

Tabulka 7.9b

	y'_1	y''	y_{10}	y_{20}	
y'_1	1	0	0	0	340
y''	0	1	0	0	430
y_{10}	0	0	1	0	1
y_{20}	0	0	0	1	1
z'	0	0	0	0	0
z''	0	0	0	0	430

V úloze je jediná pomocná proměnná y'', která měla v pomocné účelové funkci koeficient 1; ostatní proměnné v pomocné účelové funkci nefigurují, tj. mají tam koeficienty nulové. Duální proměnné budeme tedy v první fázi počítat podle vzorců

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T\mathbf{a}_{10} + v &= 0 \\ \mathbf{u}^T\mathbf{a}_{20} + w &= 0 \\ \mathbf{u}^T\mathbf{e}_1 &= 0 \\ \mathbf{u}^T\mathbf{e}_2 &= 1, \end{aligned}$$

což dává v daném případě

$$u_1 = 0,\; u_2 = 1,\; v = 0,\; w = 0.$$

Pomocí nich najdeme vektor cen vedlejších úloh

$$\mathbf{d}_1^T = \mathbf{u}^T\mathbf{A}_1 = [0, 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} = [5, 4, 2]$$

a

$$\mathbf{d}_2^T = \mathbf{u}^T\mathbf{A}_2 = [0, 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [2, 2, 2]$$

Řešení obou vedlejších úloh při těchto cenách jsou uvedena v tab. 7.10a a 7.11a.

Tabulka 7.10a

	x_1	x_2	x_3	x'_1	x'_2	
x'_1	$\boxed{2}$	4	1	1	0	120
x'_2	2	1	4	0	1	250
z_1	—5	—4	—2	0	0	0
x_1	1	2	1/2	1/2	0	60
x'_2	0	—3	3	—1	1	130
z_1	0	6	1/2	5/2	0	300

Tabulka 7.11a

	x_4	x_5	x_6	x'_3	x'_4	
x'_3	4	2	$\boxed{2}$	1	0	150
x'_4	2	5	4	0	1	300
z_2	—2	—2	—2	0	0	0
x_6	2	1	1	1/2	0	75
x'_4	—6	1	0	—2	1	0
z_2	2	0	0	1	0	150

Jsou to

$$\mathbf{x}_1^{(1)T} = [60, 0, 0] \qquad \mathbf{x}_2^{(1)T} = [0, 0, 75]$$

Vypočteme dále

$$\mathbf{a}_{11} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 120 \\ 300 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}_1^{(1)} = 1\,200 \qquad d_{21} = \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_2^{(1)} = 36\,000$$

Zařadíme nejdříve do řešení $\mathbf{x}_1^{(1)}$, resp. odpovídající proměnnou y_{11}. Vektor koeficientů této proměnné je [120, 300, 1, 0]. Protože optimální bází je zatím jednotková matice, transformací se tento vektor nemění.

Další krok je uveden v tab. 7.9c.

Tabulka 7.9c

	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}		y_{11}
y_1'	1	0	0	0	340	120
y''	0	1	0	0	430	300
y_{10}	0	0	1	0	1	$\boxed{1}$
y_{20}	0	0	0	1	1	0
z	0	0	0	0	0	—1 200
z''	0	0	0	0	430	300
y_1'	1	0	—120	0	220	
y''	0	1	—300	0	130	
y_{11}	0	0	1	0	1	
y_{20}	0	0	0	1	1	
z	0	0	1 200	0	1 200	
z''	0	0	—300	0	130	

Hodnoty duálních proměnných jsou nyní $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $v = -300$, $w = 0$.

Protože hodnoty u_1 a u_2 zůstaly nezměněny, nemění se ani řešení vedlejších úloh. Řešení $\mathbf{x}_2^{(1)}$ splňuje i nadále podmínku $(\mathbf{u}^T\mathbf{A}_2)\mathbf{x}_2^{(1)} + w = 150 > 0$. Zařadíme tedy v dalším kroku do řešení $\mathbf{x}_2^{(1)}$, resp. odpovídající proměnnou y_{21}. Vektorem koeficientů je [300, 150, 0, 1] a transformací se opět nemění. Postup je zřejmý z tab. 7.9d.

Hodnoty duálních proměnných jsou nyní

$$u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = 1,\ v = -240,\ w = 0$$

Z nich odvodíme nové vektory cen pro vedlejší úlohy

$$\mathbf{d}_1^T = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 2\end{bmatrix} = \left[4, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\mathbf{d}_2^T = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix} = \left[1, \frac{3}{2}, 0\right]$$

Tabulka 7.9d

	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}		y_{21}
y_1'	1	0	—120	0	220	$\boxed{300}$
y''	0	1	—300	0	130	150
y_{11}	0	0	1	0	1	0
y_{20}	0	0	0	1	1	1
z	0	0	1 200	0	1 200	—36 000
z''	0	0	—300	0	130	150
y_{21}	1/300	0	—2/5	0	11/15	
y''	—1/2	1	—240	0	20	
y_{11}	0	0	1	0	1	
y_{20}	—1/300	0	2/5	1	4/15	
z	120	0	—13 200	0	27 600	
z''	—1/2	0	—240	0	20	

Tabulka 7.10b

	x_1	x_2	x_3	x_1'	x_2'	
x_1	1	2	1/2	1/2	0	60
x_2'	0	—3	3	—1	1	130
z_1	0	11/2	1/2	2	0	240

Najdeme nové řešení vedlejších úloh tak, že přepočteme cenové koeficienty v tab. 7.10a a 7.11a, jak je uvedeno v tab. 7.10b a 7.11b.

Řešení první vedlejší úlohy zůstane nezměněné. V druhé úloze máme řešení $\mathbf{x}_2^{(2)T} = \left[\frac{75}{8}, \frac{450}{8}, 0\right]$.

Tabulka 7.11b

	x_4	x_5	x_6	x_3'	x_4'	
x_6	2	1	1	1/2	0	75
x_4'	—6	$\boxed{1}$	0	—2	1	0
z_2	—1	—3/2	0	0	0	0
x_6	$\boxed{8}$	0	1	5/2	—1	75
x_5	—6	1	0	—2	1	0
z_2	—10	0	0	—3	3/2	0
x_4	1	0	1/8	5/16	—1/8	75/8
x_5	0	1	3/4	—4/8	1/4	450/8
z_2	0	0	5/4	1/8	1/4	357/4

Jemu odpovídá vektor $\mathbf{a}_{22} = \begin{bmatrix} 75 \\ 525/4 \end{bmatrix}$, který splňuje podmínku $\mathbf{u}^T\mathbf{a}_{22} + w > 0$. Zařadíme tedy do dílčí hlavní úlohy y_{22}. Příslušný vektor koeficientů je [75, 525/4, 0, 1], cenový koeficient $\frac{54\,375}{4}$ a koeficient v pomocné účelové funkci $\frac{525}{4}$. Po transformaci dávají sloupec uvedený vpravo v tab. 7.9e.

Tabulka 7.9e

	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}		y_{22}
y_{21}	1/300	0	—2/5	0	11/15	1/4
y''	—1/2	1	—240	0	20	$\boxed{375/4}$
y_{11}	0	0	1	0	1	0
y_{20}	—1/300	0	2/5	1	4/15	3/4
z	120	0	—13 200	0	27 600	$-\frac{18\,375}{4}$
z''	—1/2	0	—240	0	20	$\frac{375}{4}$
y_{21}	7/150 0	—1/375	6/25	0	51/75	
y_{22}	—2/375	4/375	—64/25	0	16/75	
y_{11}	0	0	1	0	1	
y_{20}	1/150 0	—1/125	$\boxed{58/25}$	1	8/75	
z	95,5	49	—24 960	0	28 580	
z''	0	—1	0	0	0	
y_{21}	2/435	—4/217 5	0	—6/58	97/145	
y_{22}	—2/435	4/217 5	0	64/58	48/145	
y_{11}	—1/348 0	1/290	0	—25/58	83/87	
y_{10}	1/348 0	—1/290	1	25/58	4/87	
z	$\frac{5\,955}{58}$	$-\frac{1\,075}{29}$	0	$\frac{312\,000}{29}$	$\frac{862\,100}{29}$	

Pomocná účelová funkce z'' se v druhém kroku anulovala, proto ji dále neuvádíme. Řešení, které jsme dostali, je už přípustným řešením dílčí hlavní úlohy. Přecházíme nyní do druhé fáze, tj. při sestavení vedlejších úloh a rozšířené dílčí hlavní úlohy budeme již postupovat podle vzorců (7.18) a (7.19).

Záporný koeficient v řádku z ve druhém sloupci tab. 7.9e nás nesmí mýlit. Jde o sloupec pomocné proměnné, kde ve vynechané řádce z'' (tj. v pomocné účelové funkci) je ještě koeficient —1. Proměnná y'' nepřichází tedy v úvahu pro zařazení. Hodnota duálních proměnných je nyní

$$u_1 = \frac{5\,955}{58} \qquad u_2 = -\frac{1\,075}{29} \qquad v = 0, \qquad w = \frac{312\,000}{29}$$

Z nich vypočteme nové cenové koeficienty vedlejších úloh

$$\mathbf{c}_1^{*T} = [20, 80, 40] - \left[\frac{5\,955}{58}, -\frac{1\,075}{29}\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[0, \frac{7\,285}{58}, \frac{665}{58}\right]$$

$$\mathbf{c}_2^{*T} = [70, 230, 480] - \left[\frac{5\,955}{58}, -\frac{1\,075}{29}\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{1\,775}{29}, \frac{11\,685}{58}, \frac{4\,160}{29}\right]$$

To dává u vedlejších úloh řešení

$$\mathbf{x}_1^{(2)T} = [0, 30, 0] \quad \mathbf{x}_2^{(3)T} = [0, 60, 0]$$

Řešení $\mathbf{x}_1^{(2)}$ odpovídá v hlavní úloze proměnná y_{12} s vektorem koeficientů [30, 120, 1, 0] a s cenovým koeficientem 2 400. Podobně proměnná y_{23} odpovídající řešení $\mathbf{x}_2^{(3)}$ má v úplné hlavní úloze koeficienty [60, 120, 0, 1], resp. 13 800. Zařadíme postupně obě tyto proměnné do řešení, ovšem po příslušné transformaci koeficientů. Dostaneme (tab. 7.9f).

V novém řešení máme

$$u_1 = \frac{896}{9}, \; u_2 = -\frac{508}{9}, \; v = \frac{18\,560}{3}, \; w = 14\,600$$

Z nich lze vypočíst opět vektory cen pro vedlejší úlohy.
Po dvou dalších krocích dostaneme řešení v tab. 7.9g.

Tabulka 7.9f

	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}		y_{12}
y_{21}	2/435	—4/217 5	0	—6/58	97/145	—12/145
y_{22}	—2/435	4/217 5	0	64/58	48/145	12/145
y_{11}	—1/348 0	1/290	0	—25/58	83/87	47/116
y_{10}	1/348 0	—1/290	1	25/58	4/87	$\boxed{69/116}$
z	$\frac{5\,955}{58}$	$-\frac{1\,075}{29}$	0	$\frac{312\,000}{29}$	$\frac{862\,100}{29}$	$-\frac{109\,275}{29}$
	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}		y_{23}
y_{21}	8/172 5	—4/172 5	16/115	—1/23	233/345	—1/23
y_{22}	—8/172 5	4/172 5	—16/115	24/23	112/345	$\boxed{24/23}$
y_{11}	—1/207 0	2/345	—47/69	—50/69	191/207	—4/69
y_{12}	1/207 0	—2/345	116/69	50/69	16/207	4/69
z	$\frac{7\,210}{69}$	$-\frac{1\,355}{23}$	$\frac{145\,700}{23}$	$\frac{310\,250}{23}$	$\frac{2\,071\,300}{69}$	$-\frac{25\,550}{23}$
y_{21}	1/225	—1/450	2/15	0	31/45	
y_{23}	—1/225	1/450	—2/15	1	14/45	
y_{11}	—1/135 0	4/675	—31/45	—2/3	127/135	
y_{12}	1/135 0	—4/675	76/45	2/3	8/135	
z	$\frac{896}{9}$	$-\frac{508}{9}$	$\frac{18\,560}{3}$	14 600	$\frac{273\,280}{9}$	

Zde proměnná y_{13} odpovídá tomuto řešení první vedlejší úlohy:

$$\mathbf{x}_1^{(3)T} = \left[\frac{115}{3}, 0, \frac{130}{3}\right]$$

Toto řešení je již optimální, jak se lze přesvědčit, řešíme-li znovu vedlejší úlohy s nově upravenými cenovými koeficienty.

Tabulka 7.9g

	y_1'	y''	y_{10}	y_{20}	
y_{21}	1/240	0	—1/2	—1/4	2/3
y_{23}	—1/240	0	1/2	5/4	1/3
y_{11}	—3/520	3/65	—158/13	—135/26	7/13
y_{13}	3/520	—3/65	171/13	135/26	6/13
z	100	—60	7 200	15 000	30 400

Je nutno ovšem výsledek přepočíst s ohledem na původní úlohu. Řešením původní úlohy je vektor $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^T = \frac{7}{13}\,\mathbf{x}_1^{(1)T} + \frac{6}{13}\,\mathbf{x}_1^{(3)T} + \frac{2}{3}\,\mathbf{x}_2^{(1)T} + \frac{1}{3}\,\mathbf{x}_2^{(3)T} =$$

$$= \left[\frac{7}{13}\,.\,60 + \frac{6}{13}\,.\,\frac{115}{3}, 0, \frac{6}{13}\,.\,\frac{130}{3}, 0, \frac{1}{3}\,.\,60, \frac{2}{3}\,.\,75\right]$$

$$= [50, 0, 20, 0, 20, 50]$$

Řešení rozsáhlých úloh metodou dekompozice lze dát zajímavou **ekonomickou interpretaci,** jakožto zvláštní metodě decentralizovaného plánování, jehož základní rysy vysvětlíme níže.

Předpokládejme, že plánovací ústředí (např. oborové ředitelství) má několik podřízených útvarů (podniků). Ústředí plánuje výrobu, obstarává odbyt i zásobování některých důležitých surovin. Ostatní suroviny, resp. jiné činitele si obstarávají podniky samy. Ústředí však nemá úplnou informaci o možnostech jednotlivých podniků (popř. nemá ani nařizovací pravomoc ve věci výroby) a podobně podniky nemají úplnou informaci o odbytu a zásobování ústředně obhospodařovanými surovinami. Ústředí může tedy volit tento postup, odpovídající metodě dekompozice:

Vyzve podniky, aby oznámily své výrobní plány (popř. i několik alternativních plánů). Podniky optimalizují výrobu na základě známých cen (a tedy i zisků) a posílají své plány (popř. v několika variantách) do ústředí. Na jejich podkladě ústředí sestavuje dílčí hlavní úlohu a optimalizuje ji. Duální proměnné $u_1, u_2, \ldots, u_{m_0}$, které tak získá, znamenají ocenění společných surovin, resp. jiných činitelů i výrobků, jejichž odbyt obstarává ústředí. Kladné u znamená, že ústředí musí, chce-li dostat ekonomickým nátlakem (tj. bez přímého nařizování) optimální plán, zatížit podniky za použití každé jednotky společné suroviny obnosem u. Podobně záporné u znamená, že ústředí může stimulovat zlepšení plánu prémií u na každou jednotku výrobku, jejichž odbyt obstarává. Tyto skutečnosti ústředí sděluje podnikům a žádá, aby na jejich podkladě přepočetly své plány. Těmito „pokutami" a „prémiemi" se totiž mění zisky u jednotlivých procesů a podniky vypočtou nové optimum a zašlou do ústředí. V ústředí se pak řeší rozšířená dílčí hlavní úloha a dostanou se nová ocenění společných činitelů. Ta se sdělí opět podnikům, které vypočtou nové optimum, atd. Tato vzájemná výměna informací trvá tak dlouho, až se získá optimální plán.

Poznámka: Předpokládejme, že v příkladu (7.3) jde o ústředí s dvěma podřízenými podniky. Oba podniky mohou uskutečňovat po třech procesech. Zpracovávají po dvou místních surovinách (první čtyři omezení) a jednu ústředně obhospodařovanou surovinu (páté omezení); na jednom z jejich výrobků ústředí zvlášť záleží (např. z důvodů exportu) a potřebuje nejméně 430 jednotek (šesté omezení). V účelové funkci je vyjádřen celkový zisk. Interpretujte celý postup, jehož jsme použili, jako decentralizované plánování.

7.6 CVIČENÍ

1. V příkladě 1 z čl. 5.12 proveďte rozbor důsledků změn v omezeních:

a) b_1 se sníží na 400, b_2 se sníží na 20 a b_3 se zvýší na 720;

b) b_1 se zvýši o 1 000, b_2 se zvýší o 180, b_3 se sníži o 270.

2. V příkladě 1 z čl. 5.12 lze vyjádřit ceny ve formě lineární funkce dvou složek ($\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t$), a to

$$\mathbf{c}_0^T = [74, 74, 74, 74, 74] \qquad \mathbf{c}_1^T = [1; 0,2; 2; 2,4; 2,2]$$

Při $t = —10$ je řešení shodné s řešením příkladu 5.1.

a) Vypočtěte, pro která t zůstává báze $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ optimální.

b) Určete bázi při $t = 72$.

3. Podnik vyrábí výrobky A, B, C, D. Spotřeba surovin (S) v kg na 1 výrobek a elektrické energie v Wh je udána v tabulce:

Tabulka 7.12

	A	B	C	D
S_1	2	4	0	2
S_2	0	4	6	4
E	4	2	6	0

K dispozici je 1 400 kg první suroviny, 2 800 kg druhé suroviny a 3,1 kWh elektrické energie.

Ceny výrobků činí: A 100 Kčs/kus B 150 Kčs/kus
C 90 Kčs/kus D 70 Kčs/kus

a) Navrhněte výrobní program tak, aby cena odbytu byla maximální.

b) Jak se změní program, přibude-li 100 kg druhé suroviny a sníží-li se současně množství elektrické energie na 2,95 kWh?

c) Jak se změní výrobní program, dojde-li
1. k zvýšení ceny výrobku D o 2 Kčs,
2. sníží-li se cena výrobku A o 20 Kčs?

d) Jak se změní program, nebudeme-li uvažovat o výrobě výrobku D?

e) Při kontrole plnění vypočteného čtvrtletního programu z bodu a) bylo zjištěno, že je nutno přihlédnout ještě k omezení v pracovní době výrobní linky, která činí 1 900 hodin za čtvrtletí; přitom na výrobu kteréhokoli výrobku je třeba 2 hodin práce této linky. Jak se změní výrobní program?

KAPITOLA 8 DISTRIBUČNÍ ÚLOHY

8.1 DOPRAVNÍ ÚLOHA

Simplexová metoda, podobně jako ostatní univerzální metody lineárního programování, má sice tu výhodu, že ji lze použít k řešení jakékoli úlohy lineárního programování, je však v mnoha případech příliš pracná. Pracnost řešení je u rozsáhlých úloh problémem i při použití výkonných počítačů. Je proto oprávněna otázka, zda není účelné a možné zkonstruovat pro zvláštní typy úloh speciální algoritmy, které by byly jednodušší.

Řešení soustavy lineárních rovnic závisí, jak jsme již uvedli, jen na koeficientech. Zvláštní typ úlohy po formální stránce se projevuje tedy zvláštní strukturou matice koeficientů **A**. Zvlášť jednoduchá je matice koeficientů u dopravní úlohy; každý sloupec této matice obsahuje dvě jednotky a zbývající prvky jsou nuly.

Nechť je dáno m výchozích stanic (podle okolností to budou sklady, výrobní podniky aj., stručně je nazveme dodavateli), označených $V_1, V_2, \ldots, V_m$, u nichž je deponován určitý druh zboží v množstvích $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jednotek (podle okolností to budou disponibilní množství, kapacity apod.). Z těchto stanic se má dopravit zboží do n konečných stanic (do spotřebitelských středisek, jež stručně nazveme spotřebiteli), označených $S_1, S_2, \ldots, S_n$, jejichž požadavky činí $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jednotek. Dále jsou známy dopravní sazby (tj. náklady za přepravu jednotky) od kteréhokoli dodavatele ke kterémukoli spotřebiteli. Předpokládáme, že sazby jsou konstantní, nezávislé na přepraveném množství, tj. jinými slovy předpokládáme, že celkové přepravné po určité trati je přímo úměrné přepravenému množství. V praxi tento předpoklad nemusí být vždy splněn (viz kap. 12).

Úkolem je sestavit nejracionálnější dopravní plán, tj. určit množství, která se mají dopravit od jednotlivých dodavatelů k jednotlivým spotřebitelům tak,

a) aby požadavky těchto spotřebitelů byly splněny a

b) aby celkové dopravní náklady byly ze všech možných nákladů nejmenší.

Místo dopravních sazeb může být dána kilometrová vzdálenost mezi stanicemi. V tom případě místo celkových dopravních nákladů budeme minimalizovat celkový objem přepravy vyjádřený v tunokilometrech.

Označme obecně danou sazbu za přepravu jednotky od dodavatele V_i ke spotřebiteli S_j symbolem c_{ij}. Pak všechny výchozí údaje dopravního problému můžeme sestavit do přehledné tabulky 8.1 (viz příklad 2.6).

Tabulka 8.1

Dodavatelé	Spotřebitelé				Kapacity dodavatelů
	S_1	S_2	...	S_n	
V_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
V_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
.	...	...	...	...	.
V_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Požadavky spotřebitelů	b_1	b_2	...	b_n	

Vnitřní řádky a sloupce tabulky tvoří matici typu (m . n), což je tzv. matice sazeb; označíme ji stručně $\mathbf{C} = [c_{ij}]$.

Označíme-li neznámé množství, které se má dopravit z V_i do S_j, symbolem x_{ij}, můžeme každé řešení úlohy sestavit do obdobné tab. 8.2.

Tabulka 8.2

Dodavatelé	Spotřebitelé				Kapacity dodavatelů
	S_1	S_2	...	S_n	
V_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
V_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
.	...	...	...	...	.
V_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
Požadavky spotřebitelů	b_1	b_2	...	b_n	

Vnitřní část tabulky tvoří opět matici typu ($m \,.\, n$), tzv. matici řešení $\mathbf{X} = [x_{ij}]$. Každé vnitřní políčko takové tabulky odpovídá jedné dopravní cestě. Tak např. políčko $\overline{V_2S_1}$ znamená cestu z V_2 do S_1. Do tohoto políčka vpisujeme buď sazbu z V_2 do S_1 (tj. c_{21}), nebo množství (x_{21}) přepravované z V_2 do S_1. Pro stručnost budeme místo dopravní cesty mluvit prostě o políčku tabulky. V krajním pravém sloupci tabulky jsou uvedeny kapacity (a_i) a ve spodní řádce požadavky (b_j). Nazveme je v dalším výkladu stručně okrajovými hodnotami.

Počet neznámých u dopravního problému je zřejmě mn.

Předpokládejme dále, že souhrnná kapacita všech dodavatelů se rovná součtu požadavků všech spotřebitelů, tj. že platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Jinými slovy, předpokládejme, že nejsou ani přebytečné kapacity, ani neuspokojené poptávky. Tento předpoklad je na první pohled omezující, avšak později (v čl. 8.8) ukážeme, že velmi jednoduchým postupem je vždy možno tento předpoklad formálně splnit.

Za tohoto předpokladu je zřejmé:

a) Souhrn všech dodávek od kteréhokoli dodavatele se rovná kapacitě tohoto dodavatele a souhrn dodávek ke kterémukoli spotřebiteli se rovná požadavku tohoto spotřebitele. Jinými slovy, znamená to, že neznámé veličiny x_{ij} musí vyhovovat soustavě $m + n$ rovnic (omezení):

$$\begin{array}{lllr} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & & = a_1 \\ & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\ & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m \end{array} \qquad (8.1)$$

$$\begin{array}{lllr} x_{11} & + x_{21} + \dots\dots\dots & + x_{m1} & = b_1 \\ \quad x_{12} & + x_{22} + \dots\dots\dots & + x_{m2} & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\ \qquad x_{1n} & + x_{2n} + \dots\dots\dots & + x_{mn} & = b_n \end{array} \qquad (8.2)$$

Poznámka: Je zřejmé, že rovnice (8.1) odpovídají jednotlivým řádkám tab. 8.2 a rovnice (8.2) jejím sloupcům. Dosadíme-li totiž do tab. 8.2 za x_{ij} hodnoty z libovolného řešení soustavy rovnic (8.1) a (8.2), bude se součet jednotlivých řádků i jednotlivých sloupců rovnat příslušným okrajovým hodnotám.

b) Úhrnné náklady na přepravu (účelová funkce), které se mají minimalizovat, budou činit

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (8.3)$$

c) Veličiny x_{ij} nemohou být záporné (to plyne z povahy věci, protože nelze dopravovat záporné množství), tj.

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \qquad (8.4)$$

Odmyslíme-li si konkrétní náplň uvedeného problému, je možno abstraktně formulovat matematický model dopravní úlohy takto:

Je dáno:

a) m kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_m$ (kapacity)

a

n kladných čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$ (požadavky)

tak, že platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,; \qquad (8.5)$$

b) $m \,.\, n$ čísel c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$) (sazby).

Úkolem je najít na množině řešení soustavy rovnic a nerovností

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad (8.1a)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (8.2a)$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \qquad (8.4)$$

minimum lineární formy

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (8.3)$$

Je to zřejmě úloha lineárního programování o $m \,.\, n$ proměnných a $m + n$ omezeních.

Omezení (8.1) a (8.2) nejsou navzájem nezávislá, jedno z nich vyplývá z ostatních $m + n - 1$, ovšem za předpokladu, že platí (8.5). Tak např. sečteme-li rovnice (8.1) a odečteme-li od nich součet $n - 1$ prvních rovnic (8.2), dostaneme poslední rovnici (8.2). To znamená, že dopravní problém tak, jak byl formulován výše, tj. za předpokladu, že požadavky se rovnají kapacitám (8.5), má $m + n - 1$ nezávislých omezení, a tedy základní řešení dopravního problému má nejvýše $m + n - 1$ kladných prvků.

8.2 VLASTNOSTI ZÁKLADNÍHO ŘEŠENÍ

Matice koeficientů dopravního problému má, jak je zřejmé z (8.1) a (8.2), tvar

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&1&&&&&&&& \\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\
&&&&&&&&&&&&1&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1 \\
1&&&&&&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&&&&&&& \\
&1&&&&&&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&&&&&& \\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \\
&&&&&&1&&&&&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1
\end{array}\right]$$

Vektor koeficientů proměnné x_{ij} má na i-tém a $(m + j)$-tém místě jednotku, kdežto ostatních $m + n - 2$ souřadnic má nulových, tedy

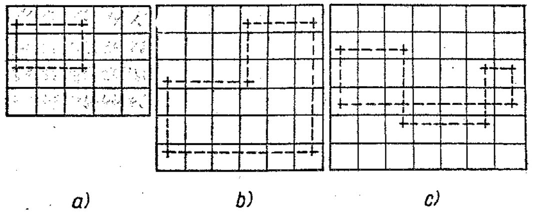
$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{1. pořadí} \\ \text{2. pořadí} \\ \vdots \\ i\text{-té pořadí} \\ \\ \vdots \\ (m + j)\text{-té pořadí} \\ \vdots \\ (m + n)\text{-té pořadí} \end{array}$$

Takových vektorů je celkem $m \cdot n$ a můžeme je přiřadit jednotlivým políčkům matice řešení (tab. 8.2) tak, že přiřazujeme políčku v i-tém řádku a j-tém sloupci (tj. políčku obsahujícímu x_{ij}) vektor $\mathbf{a}_{ij}$. Jak vyplývá z předchozího odstavce, má tato soustava vektorů hodnost $m + n - 1$. Zkoumejme nyní, jak budou v tab. 8.2 rozloženy vektory nějaké báze.

Všimněme si nejdříve soustavy vektorů

$$\mathbf{a}_{ij},\ \mathbf{a}_{ik},\ \mathbf{a}_{ek},\ \mathbf{a}_{em},\ \dots,\ \mathbf{a}_{rs},\ \mathbf{a}_{rj}, \qquad (8.6)$$

v níž se všechny první indexy (řádkové indexy) a všechny druhé indexy (sloupcové indexy) vyskytují právě dvakrát. Přiřadíme-li tyto vektory příslušným políčkám tabulky 8.2, pak je zřejmé, že v určité řádce budou buď dva z těchto vektorů, nebo žádný. Totéž platí o sloupcích. Spojíme-li tedy políčka, jimž jsou přiřazeny vektory této soustavy, vodorovnými a svislými čárami, dostaneme nutně aspoň jeden uzavřený okruh (cyklus). Příklady takových uzavřených okruhů jsou uvedeny na obr. 8.1. Pro stručnost budeme samu soustavu vektorů, v níž se všechny řádkové a všechny sloupcové indexy vyskytují po dvou, nazývat uzavřeným okruhem nebo cyklem.



Obr. 8.1

Je snadné nahlédnout, že soustava vektorů tvořících uzavřený okruh je lineárně závislá. Stačí např. v soustavě (8.6) postupně násobit jednotlivé vektory koeficienty $+1$ a -1 a sečíst, abychom dostali nulový vektor.

Platí také ale opak; jestliže je soustava vektorů $\mathbf{a}_{ij}$ lineárně závislá, obsahuje nutně uzavřený okruh. Lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_{ij}$ s nenulovými koeficienty se nemůže totiž anulovat, nevyskytují-li se u dvou vektorů nenulové souřadnice na témž místě.

Z uvedeného výkladu plyne, že

a) bázi vektorů $\mathbf{a}_{ij}$ tvoří kterákoli soustava $m + n - 1$ vektorů, která neobsahuje uzavřený okruh;

b) protože soustava $m + n$ vektorů $\mathbf{a}_{ij}$ je lineárně závislá, obsahuje nutně uzavřený okruh.

Tyto poučky nám budou užitečné při řešení dopravního problému.

8.3 VÝCHOZÍ ŘEŠENÍ DOPRAVNÍHO PROBLÉMU

Dopravní problém má vždy řešení. Dokážeme to konstruktivně tím, že uvedeme způsob, jak řešení nalézt. Použijeme k tomu tabulky tvaru 8.2 a začneme obsazováním políček. Pro určitost začneme u levého horního políčka (u cesty z V_1 do S_1, u tzv. severozápadního rohu).

Dosadíme-li tam maximální možnou hodnotu, tj. menší z čísel a_1, b_1 (zřejmě nelze po cestě $\overline{V_1S_1}$ dopravit více, než je ve V_1 k dispozici nebo než je požadavek spotřebitele S_1). Předpokládáme, že platí $a_1 < b_1$, pak dosadíme $x_{11} = a_1$. Tím je kapacita V_1 vyčerpána a do ostatních políček první řádky musíme již dosadit nuly.*)

K uspokojení požadavku S_1 je třeba do této stanice dodat ještě množství $b_1 - a_1$. Je-li $b_1 - a_1 < a_2$, dodáme celé toto množství z V_2, tj. dosadíme do druhého políčka prvního sloupce $x_{21} = b_1 - a_1$. Tím splníme požadavky spotřebitele S_1; to znamená, že do prvního sloupce přijdou už jen nuly. Pokračujeme v obsazování druhé řádky.

---

*) Tyto nuly, až na případ degenerace, do výpočetních tabulek zpravidla nepíšeme.

Je-li naopak $b_1 - a_1 > a_2$, dosadíme $x_{21} = a_2$; tím je vyčerpána kapacita stanice V_2, tj. celá druhá řádka; pokračujeme dále v obsazování třetího políčka prvního sloupce.

Pokračujeme-li naznačeným postupem, vidíme, že každým krokem obsadíme jednu řadu (řádek nebo sloupec), výjimečně dvě řady (jestliže např. $a_1 = b_1$, pak dosadíme-li $x_{11} = a_1$, obsadíme tím současně první řádku i první sloupec). Posledním krokem pak zřejmě obsadíme obě zbývající řady současně. To znamená, že řešení, které tímto postupem dostaneme, bude mít nejvýše $m + n - 1$ kladných prvků (tj. právě tolik, kolik je nezávislých omezení). Jinými slovy, při tomto řešení bude využito nejvýše $m + n - 1$ dopravních cest.

Protože uvedeným postupem obsazujeme při každém kroku hned celou řadu (sloupec nebo řádku), nemohou obsazená políčka tvořit uzavřený okruh. Je tedy řešení takto získané, podle vývodů předchozího článku, řešením základním.

Příklad 8.1. Ze čtyř mlýnů, které skladují 200, 320, 380, resp. 500 tun mouky, je třeba dodat do šesti velkopekáren 162, 175, 220, 264, 312 a 267 tun. Podle pravidla severozápadního rohu dostaneme v tomto případě výchozí řešení, jak je uvedeno v tab. 8.3.

Tabulka 8.3

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity
V_1	$x_{11} = 162$	$x_{12} = 38$	$x_{13} = 0$	$x_{14} = 0$	$x_{15} = 0$	$x_{16} = 0$	200
V_2	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 137$	$x_{23} = 183$	$x_{24} = 0$	$x_{25} = 0$	$x_{26} = 0$	320
V_3	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 37$	$x_{34} = 264$	$x_{35} = 79$	$x_{36} = 0$	380
V_4	$x_{41} = 0$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$	$x_{45} = 233$	$x_{46} = 267$	500
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400

Protože 162 < 200, dosadili jsme $x_{11} = 162$; tím je potřeba první pekárny kryta, tj. celý první sloupec (dosadíme $x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$). V prvním mlýně zbývá ještě 38 (= 200 − 162) tun. Protože 38 < 175, dosadíme $x_{12} = 38$. Tím je kapacita prvního mlýna (tedy první řádka) rovněž vyčerpána. V druhé pekárně (v druhém sloupci) je třeba krýt potřebu 137 (= 175 − 38) tun. Protože 137 < 320, dosadíme $x_{22} = 137$. Tím je druhý sloupec obsazen a pokračujeme v obsazování druhé řádky atd.

Jak je vidět z tabulky, obsahuje řešení získané podle pravidla severozápadního rohu přesně devět kladných prvků (4 + 6 − 1), zbývající jsou nuly.

Že údaje vepsané do tabulky tvoří skutečně řešení problému, zkontrolujeme snadno z toho, že součet jednotlivých řádků, resp. sloupců, dává příslušné okrajové hodnoty.

Příklad 8.2. V předchozím příkladě provedeme malou změnu v požadavcích jednotlivých pekáren. Nechť tyto požadavky činí 160, 170, 190, 300, 320 a 260 tun a hledejme opět řešení podle pravidla severozápadního rohu (tab. 8.4).

Tabulka 8.4

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity
V_1	$x_{11} = 160$	$x_{12} = 40$	$x_{13} = 0$	$x_{14} = 0$	$x_{15} = 0$	$x_{16} = 0$	200
V_2	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 130$	$x_{23} = 190$	$x_{24} = 0$	$x_{25} = 0$	$x_{26} = 0$	320
V_3	$x_{31} = 0$	$x_{32} = 0$	$x_{33} = 0$	$x_{34} = 300$	$x_{35} = 80$	$x_{36} = 0$	380
V_4	$x_{41} = 0$	$x_{42} = 0$	$x_{43} = 0$	$x_{44} = 0$	$x_{45} = 240$	$x_{46} = 260$	500
Požadavky	160	170	190	300	320	260	1 400

Postup byl zde stejný jako v předchozím příkladě, avšak po čtvrtém kroku, tj. dosazením $x_{23} = 190$, jsme současně vyčerpali druhý řádek i třetí sloupec a v dalším kroku ($x_{34} = 300$) začneme s obsazováním nového řádku i nového sloupce. Řešení má pak jen 8 kladných prvků, tedy o jeden méně, než činí počet nezávislých omezení. Jde zřejmě o úlohu degenerovanou.*)

V obou případech jsme postupovali tzv. metodou severozápadního rohu, tj. začali jsme levým horním políčkem a postupně jsme na to navazovali obsazováním dalších políček. To pochopitelně není jediný možný způsob získání základního řešení. Je

---

*) Je dobré si všimnout, že u dopravní úlohy může degenerace vzniknout jedině tehdy, jestliže součet kapacit nějaké podmnožiny dodavatelů se rovná součtu požadavků podmnožiny spotřebitelů v příkladě 8.2 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$.

zásadně možno začít obsazováním kteréhokoli políčka a pokračovat do značné míry libovolně. Je jenom nutno dodržovat pravidlo, abychom do každého políčka dosazovali maximálně možnou hodnotu, tj. aby při každém dosazování byla obsazena celá řada.

Všimněme si ještě jedné jednoduché vlastnosti základního řešení dopravního problému. Každá řada (tj. každý řádek a každý sloupec) matice řešení musí pochopitelně obsahovat aspoň jedno obsazené políčko. Protože počet všech obsazených políček při základním řešení nepřesahuje $m + n - 1$, musí aspoň jedna řada obsahovat pouze jediné obsazené políčko. Kdyby totiž každá řada obsahovala nejméně dvě obsazená políčka, nemohl by počet obsazených políček být menší než větší z čísel $2m$ a $2n$, tj. nemohl by být menší než $m + n$.

Z druhé strany, jde-li o úlohu nedegenerovanou, tj. je-li v základním řešení přesně $m + n - 1$ obsazených políček, nemůže být žádné z těchto políček samo jak ve svém řádku, tak i ve svém sloupci. Kdyby totiž některá z obsazených políček byla sama jak v řádku, tak i ve sloupci, pak po vyškrtnutí obou uvedených řad (tj. řádku a sloupce, v nichž toto obsazené políčko je) bychom dostali matici o $m - 1$ řádkách a $n - 1$ sloupcích s $m + n - 2$ obsazenými políčky. Podle vývodů předchozího článku by tato obsazená políčka musela tvořit aspoň jeden uzavřený okruh [obsazených políček je více než $(m - 1) + (n - 1) - 1$]. Vektory jim přiřazené by tedy nebyly lineárně nezávislé v rozporu s tvrzením, že jde o řešení základní.

8.4 ZLEPŠENÍ ŘEŠENÍ

Postup při zlepšování řešení je u dopravní úlohy v zásadě stejný jako u simplexové metody. Najde se nejdříve proměnná zařazovaná podle obdobného kritéria jako u simplexové metody, tj. podle znaménka rozdílu $c'_{ij} - c_{ij}$ (rozdílu mezi cenou ekvivalentní kombinace základních procesů a cenou daného procesu), k ní se určí vylučovaná proměnná a přechází se na nové řešení. Praktické provedení je zde ovšem podstatně jednodušší.

K výpočtu použijeme tabulek stejných jako v čl. 8.2. Každá řádka i každý sloupec této tabulky nahrazuje vlastně jednu řádku simplexové tabulky. Každé políčko tabulky obsahuje jednu proměnnou a nahrazuje vlastně sloupec simplexové tabulky. Pro větší přehlednost budeme do jednotlivých políček dosazovat jak hodnoty proměnných, pokud jsou nenulové (obsazená políčka) – nulové hodnoty prostě vynecháme, tak i tarify c_{ij} (tj. ceny procesů), a to v pravém horním rohu jednotlivých políček. Později dosadíme v levém dolním rohu jednotlivých políček veličiny c'_{ij} (ceny ekvivalentních kombinací), ovšem jen ve volných políčkách. V obsazených políčkách, tedy u základních proměnných, $c'_{ij} = c_{ij}$. Protože jde o minimalizaci, bude možno za zařazovanou proměnnou volit kteroukoli proměnnou, u níž $c'_{ij} - c_{ij} > 0$, tj. $c_{ij} > c'_{ij}$.

Ceny ekvivalentní kombinace lze vypočíst jednoduchým způsobem, jak ukážeme na příkladě 8.1, který doplníme sazbami (tab. 8.5).

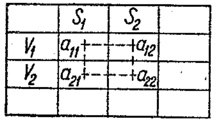
Tabulka 8.5

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity
V_1	12 162	15 38	14	20	16	13	200
V_2	11	10 137	14 183	15	20	18	320
V_3	15	12	19 37	15 264	13 79	19	380
V_4	18	16	17	14	16 233	12 267	500
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400

Podle uvedených sazeb činí celkové náklady při tomto řešení:

$$z_0 = 162 \,.\, 12 + 38 \,.\, 15 + 137 \,.\, 10 + 183 \,.\, 14 + 37 \,.\, 19 + $$
$$+ 264 \,.\, 15 + 79 \,.\, 13 + 233 \,.\, 16 + 267 \,.\, 12 = 19\,068$$

Devět vektorů $(m + n - 1)$ přiřazených obsazeným políčkům tvoří bázi. Připojením každého dalšího vektoru vzniká podle čl. 8.2 uzavřený okruh, a to, jak se dá dokázat, okruh jednoznačně určený. Každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů tohoto okruhu. Tak např. vektor $\mathbf{a}_{21}$ přiřazený volnému políčku $\overline{V_2S_1}$ tvoří s vektory báze $\mathbf{a}_{11}$, $\mathbf{a}_{12}$, $\mathbf{a}_{22}$ jednoduchý uzavřený okruh znázorněný na obr. 8.2.



Obr. 8.2

Platí zřejmě

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{22},$$

a tedy

$$c'_{21} = c_{11} - c_{12} + c_{22} = 12 - 15 + 10 = 7$$

Tento výpočet lze odůvodnit též zcela elementární úvahou:

Chceme-li dosadit $x_{21} = 1$, musíme současně ubrat jednotku z x_{11} (aby zůstal zachován součet prvního sloupce) a z x_{22} (aby zůstal zachován součet druhé řádky). Tím však zmenšujeme součet první řádky a druhého sloupce. Abychom tento úbytek vyrovnali, musíme přidat jednotku k x_{12}.

Doprava jednotky z V_2 do S_1 má tedy týž konečný efekt jako doprava jednotky z V_2 do S_2, pak zpět z S_2 do V_1 a konečně z V_1 do S_1, tj. jako ekvivalentní kombinace přeprav z V_2 do S_2, dále z S_2 do V_1 (tj. záporná přeprava neboli ušetření přepravy z V_1 do S_2) a z V_1 do S_1. Náklady na tuto ekvivalentní kombinaci přeprav činí

$$c'_{21} = c_{11} - c_{12} + c_{22}$$

Takovým způsobem je možno určit c'_{ij} u všech volných políček. Tento způsob je však pracný a zdlouhavý. Je při něm nutno určit uzavřený okruh příslušný ke každému volnému políčku. Tyto okruhy bývají však u větších úloh značně komplikované. Odvodíme proto v dalším odstavci jednodušší metodu, tzv. metodu řádkových a sloupcových čísel (též modi-metoda nebo metoda potenciálů).

8.5 ŘÁDKOVÁ A SLOUPCOVÁ ČÍSLA

Nejjednodušeji odvodíme metodu řádkových a sloupcových čísel pomocí vět o dualitě.

Označme duální proměnné přiřazené řádkovým omezením dopravního problému (8.1), tzv. řádková čísla, $u_1, u_2, \ldots, u_m$, a proměnné přiřazené sloupcovým omezením (8.2), tzv. sloupcová čísla, $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Pak duální úloha k dopravnímu problému bude znít:

Nalézt maximum lineární formy

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$$

při podmínkách

$$\begin{aligned} &u_1 + v_1 \leqq c_{11} \\ &u_1 + v_2 \leqq c_{12} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &u_i + v_j \leqq c_{ij} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &u_m + v_n \leqq c_{mn} \end{aligned} \tag{8.7}$$

Protože omezení dopravního problému jsou rovnice, mohou duální proměnné u_i, v_j nabývat nezáporných i záporných hodnot (str. 170).

Podle vět o dualitě (str. 179) musí být z dvojice duálních omezení v optimálním řešení jedno splněno jako rovnice, tj. jestliže $x_{ij} > 0$, pak

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{8.8}$$

Protože v nedegenerované dopravní úloze má základní řešení přesně $m + n - 1$ kladných prvků, dostaneme soustavu $m + n - 1$ rovnic typu (8.7). Tato soustava

rovnic obsahuje všech $m + n$ neznámých u_i a v_j, což plyne z toho, že v každé řadě je aspoň jedna základní proměnná. Matice koeficientů této soustavy má hodnost $m + n - 1$ (tj. tolik, kolik obsahuje rovnic). Plyne to z toho, že její řádky jsou vlastně vektory koeficientů základních proměnných x_{ij}, a jsou tedy lineárně nezávislé. Je tedy touto soustavou $m + n$ neznámých u_i, v_j určeno až na aditivní konstantu, to znamená, že za jednu z neznámých lze dosadit libovolné číslo, ostatní neznámé se pak snadno vypočtou postupným dosazováním do rovnic (8.8). (Plyne to z vlastnosti základního řešení nedegenerované úlohy, že žádná základní proměnná není sama současně v řádce i ve sloupci, avšak aspoň jedna je sama v řádce nebo sloupci.) V našem případě je to těchto devět rovnic:

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 12 \\ u_1 + v_2 &= 15 \\ u_2 + v_2 &= 10 \\ u_2 + v_3 &= 14 \\ u_3 + v_3 &= 19 \\ u_3 + v_4 &= 15 \\ u_3 + v_5 &= 13 \\ u_4 + v_5 &= 16 \\ u_4 + v_6 &= 12 \end{aligned}$$

Dosadíme-li zde např. $u_3 = 0$, dostaneme bezprostředně

$$\begin{aligned} &v_3 = 19, \quad v_4 = 15, \quad v_5 = 13, \text{ dále} \\ &u_2 = -5, \quad v_2 = 15, \\ &u_1 = 0, \quad v_1 = 12, \\ &u_4 = 3, \quad v_6 = 9. \end{aligned}$$

Splňuje-li takto vypočtená soustava řádkových a sloupcových čísel všechny omezení (8.7), pak je řešení optimální (báze je primárně i duálně přípustná). Nesplňují-li všechna omezení (8.7), tj. platí-li pro některá c_{ij}, že $u_i + v_j > c_{ij}$, řešení optimální není. Řešení je pak možno zlepšit zařazením proměnné x_{ij} do řešení.

Není obtížné dokázat, že součet řádkového a sloupcového čísla se rovná právě nákladům na ekvivalentní kombinaci přeprav, tj.

$$u_i + v_j = c'_{ij}$$

Dosadíme-li např. na str. 239

$$\begin{aligned} c_{11} &= u_1 + v_1, \\ c_{12} &= u_1 + v_2, \\ c_{22} &= u_2 + v_2, \end{aligned}$$

dostaneme po krácení

$$c'_{21} = u_2 + v_1$$

Stačí tedy v každém volném políčku srovnávat tento součet s příslušnou sazbou. Je-li součet řádkového a sloupcového čísla větší než příslušná sazba, pak obsazením tohoto políčka hodnota účelové funkce poklesne.

Výpočtem sloupcových a řádkových čísel tedy snadno zhodnotíme všechna volná políčka. Výpočet řádkových a sloupcových čísel je přitom jednoduchý. Prakticky je vypočteme přímo na okraji tab. 8.6, aniž bychom vypisovali rovnice (8.8). Připojíme k tabulce další sloupec pro řádková čísla a řádku pro sloupcová čísla. Dosadíme za jedno z těchto čísel (nejlépe za číslo přiřazené řadě s největším počtem obsazených míst) libovolnou hodnotu (nejlépe nulu). Ostatní místa v nově připojeném sloupci a řádku pak obsadíme tak, aby součet řádkového a sloupcového čísla se rovnal sazbě obsazeného políčka, jehož řádku a sloupci jsou tato čísla přiřazena.

Provedeme pro ilustraci výpočet v našem příkladě (tab. 8.6).

Tabulka 8.6

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	12 162	15 38	14 19	20 15	16 13	13 9	200	0
V_2	11 7	10 137	14 183	15 10	20 8	18 4	320	—5
V_3	15 12	12 15	19 37	15 264	13 79	19 9	380	0
V_4	18 15	16 18	17 22	14 18	16 233	12 267	500	3
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400	
v_j	12	15	19	15	13	9		

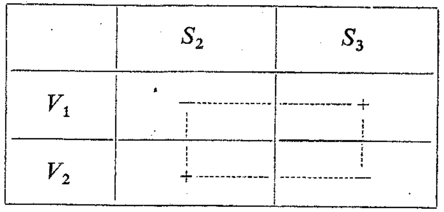
Ve sloupci u_i jsme dosadili v třetí řádce nulu. Protože v této řádce jsou tři obsazená políčka, můžeme pod nimi hned napsat sloupcová čísla 19, 15 a 13 (aby jejich součet s nulou dal příslušnou sazbu). Dále, máme-li pod pátým sloupcem 13, musíme čtvrté řádce přiřadit trojku (13 + 3 = 16, tj. sazbě v obsazeném políčku $\overline{V_4S_5}$) atd.

V tabulce jsme do volných políček vlevo dole vepsali součty $u_i + v_j$.

Srovnáním těchto čísel s příslušnými sazbami zjišťujeme, že řešení ještě není optimální. Jako zařazovaná proměnná přicházejí v úvahu x_{13}, x_{32}, x_{42}, x_{43} nebo x_{44}, u nichž jsou sazby nižší než příslušná c'_{ij}.

Vezměme políčko $\overline{V_1S_3}$: každá jednotka, kterou sem přesuneme, dává 5 Kčs úspor, a je tedy účelné přesunout sem maximálně možné množství. Kolik sem můžeme maximálně přesunout? Zjistíme to velmi jednoduše pomocí uzavřeného okruhu, který přísluší políčku $\overline{V_1S_3}$ (obr. 8.3). Vidíme totiž, že stejné množství, jaké přesuneme na políčko $\overline{V_1S_3}$, ubude v políčku $\overline{V_1S_2}$ a $\overline{V_2S_3}$.

Protože v žádném políčku nesmí vzniknout po úpravě záporné číslo, můžeme do $\overline{V_1S_3}$ přesunout nejvýše menší z čísel obsažených v políčkách $\overline{V_1S_2}$ a $\overline{V_2S_3}$, tedy v daném případě 38 jednotek. Řešení, které po tomto přesunu dostaneme, se liší od původního u čtyř proměnných (jak vyplývá ze schématu na obr. 8.3), a to:



Obr. 8.3

$$x_{12} = 0(38); \quad x_{13} = 38(0); \quad x_{22} = 175(137); \quad x_{23} = 145(183)$$

Čísla v závorkách jsou hodnoty proměnných v původním řešení.

Hodnota účelové funkce (celkové přepravní náklady) se proti předchozímu řešení sníží o 38 . 5 = 190 Kčs. Vskutku, vypočteme-li celkové přepravní náklady přímo, dostaneme:

$$z_1 = 162 \,.\, 12 + 38 \,.\, 14 + 175 \,.\, 10 + 145 \,.\, 14 + 37 \,.\, 19 +$$
$$+ 264 \,.\, 15 + 79 \,.\, 13 + 233 \,.\, 16 + 267 \,.\, 12 = 18\,878,$$

což je o 190 méně než z_0.

Vcelku tedy můžeme dát toto pravidlo pro zlepšení řešení dopravního problému:

a) určit podle návodu tohoto článku řádková a sloupcová čísla u_i a v_j,

b) vepsat do volných políček příslušné součty sloupcových a řádkových čísel $u_i + v_j$,

c) určit, zda v některých políčkách platí $u_i + v_j > c_{ij}$,

d) v dalším kroku jedno z těchto políček obsadit, a to nejlépe políčko, kde rozdíl $u_i + v_j - c_{ij}$ je největší, tímto způsobem:

d 1. sestavit uzavřený okruh příslušný tomuto políčku a opatřit políčka okruhu, počínaje dosud volným políčkem, střídavě znaménky + a —, d 2. zjistit nejmenší hodnotu proměnné v políčkách se znaménkem –, toto číslo odečíst ve všech políčkách se znaménkem – a přičíst ve všech políčkách se znaménkem +,

d 3. všechna ostatní políčka nechat beze změny.

Tímto postupem se políčko se znaménkem – a s nejmenší hodnotou proměnné stane volným. Nové řešení bude tedy mít opět $m + n - 1$ obsazených políček a bude řešením základním.

Pro náš příklad dostaneme zlepšené řešení v tab. 8.7.

PRVNÍ ZLEPŠENÉ ŘEŠENÍ *Tabulka 8.7*

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	12 162	15 10	14 38	20 10	16 8	13 4	200	—5
V_2	11 12	10 175	14 145	15 10	20 8	18 4	320	—5
V_3	15 17	12 15	19 37	15 264 –	13 79 +	19 9	380	0
V_4	18 20	16 18	17 22	14 18 +	16 233 –	12 267	500	3
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400	
v_j	17	15	19	15	13	9		

V postupu je možno nyní pokračovat a je zřejmé, že po konečném počtu kroků musíme jím dospět k optimálnímu řešení. Dopravní problém má vždy konečné optimální řešení, jak je zřejmé z toho, že má přípustné řešení a úloha k němu duální má rovněž přípustné řešení (např. řešení $u_i = 0$, $v_j = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$.

Dořešíme uvedeným postupem náš příklad. Výpočet je zřejmý z tabulek 8.8 až 8.10, v nichž stejně jako v tab. 8.7 je zakreslen okruh přiřazený zařazované proměnné.

Že řešení je již optimální, vyplývá ze zhodnocení volných políček v tab. 8.10. Skutečně sazby ve všech volných políčkách jsou nyní větší než příslušné ceny ekvivalentních kombinací přeprav; hodnotu účelové funkce nelze tedy už snížit žádným přesunem nákladů na dosud nevyužívané cesty.

DRUHÉ ZLEPŠENÉ ŘEŠENÍ *Tabulka 8.8*

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	12 162	15 10	14 38	20 10	16 8	13 8	200	—5
V_2	11 12	10 175 –	14 145 +	15 10	20 8	18 8	320	—5
V_3	15 17	12 15 +	19 37 –	15 31	13 312	19 13	380	0
V_4	18 16	16 14	17 18	14 233	16 12	12 267	500	—1
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400	
v_j	17	15	19	15	13	13		

TŘETÍ ZLEPŠENÉ ŘEŠENÍ *Tabulka 8.9*

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	12 162 –	15 10	14 38 +	20 13	16 11	13 11	200	—2
V_2	11 12 +	10 138	14 182 –	15 13	20 11	18 11	320	—2
V_3	15 14	12 37	19 16	15 31	13 312	19 13	380	0
V_4	18 13	16 11	17 15	14 233	16 12	12 267	500	—1
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400	
v_j	14	12	16	15	13	13		

OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ

Tabulka 8.10

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	12 11	15 10	14 200	20 13	16 11	13 11	200	—2
V_2	11 162	10 138	14 20	15 13	20 11	18 11	320	—2
V_3	15 13	12 37	19 16	15 31	13 312	19 13	380	0
V_4	18 12	16 11	17 15	14 233	16 12	12 267	500	—1
Požadavky	162	175	220	264	312	267	1 400	
v_j	13	12	16	15	13	13		

Hodnota účelové funkce při optimálním řešení, tj. nejnižší dosažitelné dopravní náklady, v našem případě činí

$$z_{\text{opt.}} = 200 \,.\, 14 + 162 \,.\, 11 + 138 \,.\, 10 + 20 \,.\, 14 + 37 \,.\, 12 + \\ + 31 \,.\, 15 + 312 \,.\, 13 + 233 \,.\, 14 + 267 \,.\, 12 = 17\,673$$

I u dopravního problému může pochopitelně existovat více optimálních řešení. Projevuje se to tím, že v tabulce optimálního řešení platí aspoň v jednom volném políčku $u_i + v_j = c_{ij}$.

Přesuneme-li na takové políčko část nákladů, hodnota účelové funkce se tím nezmění. Příklad tohoto druhu je uveden v tab. 8.11.

V tabulce je hned vepsáno řešení. Ze zhodnocení volných políček, což je v tabulce rovněž provedeno, zjistíme, že je to řešení optimální. Optimální hodnota účelové funkce přitom činí:

$$z = 100 \,.\, 10 + 20 \,.\, 13 + 65 \,.\, 12 + 110 \,.\, 9 + 85 \,.\, 10 + 70 \,.\, 9 + 50 \,.\, 10 + 95 \,.\, 12 + \\ + 105 \,.\, 12 = 7\,410$$

Z tabulky zároveň vidíme, že v políčkách $\overline{V_1S_2}$ a $\overline{V_4S_1}$ se sazby přesně rovnají vypočteným cenám ekvivalentních kombinací přeprav. To znamená, že přesunem dopravy na tyto cesty se celkové dopravní náklady vůbec nezmění.

Příklad 8.3

Tabulka 8.11

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	Kapacity	u_i
V_1	10 100	16 16	15 12	13 20	13 12	14 13	120	3
V_2	9 6	12 65	10 8	11 9	10 8	9 110	175	—1
V_3	9 7	15 13	11 9	10 85	9 70	10 50	205	0
V_4	10 10	17 16	12 95	15 13	12 105	14 13	200	3
Požadavky	100	65	95	105	175	160	700	
v_j	7	13	9	10	9	10		

Můžeme tedy dostat další základní optimální řešení např. tak, že přesuneme na políčko $\overline{V_1S_2}$ 20 jednotek z políčka $\overline{V_1S_4}$ (ovšem s příslušnými změnami na jiných obsazených políčkách).

V daném případě je možno takto určit celkem šest základních optimálních řešení (určete je!). Optimálním řešením je ovšem také každá jejich konvexní kombinace.

Metoda řešení dopravního problému, kterou jsme uvedli, je velmi jednoduchá a vyžaduje jen elementární početní úkony. Ovšem u rozsáhlých úloh, jaké bývají v praxi, je stále dosti pracná. Pracné bývá u velkých tabulek nalezení složitých okruhů k zařazované proměnné. Dále je pochopitelně pracnost tím větší, čím více iterací vyžaduje řešení dané úlohy.

K nalezení uzavřených okruhů k jednotlivým volným políčkám existují mechanické pomůcky. Počet iterací potřebných k vyřešení problému závisí do značné míry na vhodnosti výchozího řešení. Nalezením vhodného výchozího řešení se budeme zabývat v čl. 8.10.

Pojednávali jsme dosud výhradně o dopravním problému. Matematický model tohoto problému, nazývaný též jednostupňový dopravní model, má však význam obecnější. Existuje řada jiných praktických úloh, řešitelných pomocí tohoto modelu. Jde-li přitom o úlohu maximalizační, nemění se tím v podstatě nic na postupu řešení. Jedině v kritériu optimality se změní smysl nerovností, tj. řešení bude optimální, jestliže

$$u_i + v_j \geqq c_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

8.6 ŘEŠENÍ DEGENEROVANÝCH ÚLOH

Je-li dopravní problém degenerovaný, je v některých základních řešeních méně než $m + n - 1$ obsazených políček. U takových řešení nelze uvedeným způsobem zhodnotit všechna volná políčka; některá volná políčka totiž netvoří s obsazenými políčky uzavřený okruh. Tuto potíž lze však snadno překonat tak, že doplníme obsazená políčka do plného počtu $m + n - 1$ volnými políčky, vhodně volenými tak, aby nevznikl uzavřený okruh (pro rozlišení je vhodné do těchto políček vepsat nuly).

Vezměme jednoduchý příklad. V tab. 8.12 je uveden příklad 8.4 se čtyřmi dodavatelskými a čtyřmi spotřebitelskými stanicemi a je tam hned vepsáno výchozí řešení získané podle pravidla severozápadního rohu. Řešení má jenom pět obsazených políček místo sedmi (4 + 4 − 1).

Příklad 8.4

Tabulka 8.12

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
V_1	38 200	20	22	18	200
V_2	15	26 300	20	24	300
V_3	18	19	25 220	25	220
V_4	25	24	32 40	32 240	280
Požadavky	200	300	260	240	1 000

Obsazená políčka je možno různě doplnit dvěma volnými políčky. V tab. 8.13 jsme přibrali políčka $\overline{V_2S_1}$ a $\overline{V_3S_2}$.

Po této jednoduché úpravě je možno vypočíst normálně sloupcová a řádková čísla a z nich hodnoty c'_{ij}, jak je vyznačeno v tab. 8.13. Největší úsporu na jednotku zde dává políčko $\overline{S_4V_1}$. Převedeme-li do tohoto políčka 200 jednotek, dostaneme řešení s plným počtem obsazených políček (tab. 8.14).

Tabulka 8.13

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity	u_i
V_1	38 200 −	20 49	22 55	18 55 +	200	55
V_2	15 0 +	26 300 −	20 32	24 32	300	32
V_3	18 8	19 0 +	25 220 −	25 25	220	25
V_4	25 15	24 26	32 40 +	32 240 −	280	32
Požadavky	200	300	260	240	1 000	
v_j	−17	−6	0	0		

Tabulka 8.14

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity	u_i
V_1	38 1	20 12	22 18	18 200	200	18
V_2	15 200	26 100	20 32	24 32	300	32
V_3	18 8	19 200	25 20	25 25	220	25
V_4	25 15	24 26	32 240	32 40	280	32
Požadavky	200	300	260	240	1 000	
v_j	−17	−6	0	0		

Jak je zřejmé z výpočtu čísel u, v a c', není toto řešení ještě optimální a je možno normálně pokračovat se zlepšováním.

V daném případě jsme získali řešení s plným počtem obsazených políček. Nemusí tak být vždycky, v každém případě je však možno uvedeným způsobem, tj. doplněním obsazených políček potřebným počtem vhodně volených volných políček, v hledání optimálního řešení pokračovat.

Abychom popsanou metodu řešení degenerovaných příkladů zdůvodnili, všimněme si, že degenerace u dopravního problému vzniká tím, že součet kapacit dílčího souboru dodavatelů se rovná součtu požadavků dílčího souboru spotřebitelů. Tak v našem případě se kapacita prvního dodavatele rovná požadavku prvního spotřebitele, kapacita druhého dodavatele se rovná požadavku druhého spotřebitele atd. Abychom degeneraci odstranili, pozměníme nepatrně příklad tak, že zvýšíme kapacity prvního a druhého dodavatele o velmi malé číslo ε a snížíme kapacitu třetího dodavatele o 2ε. Pozměněný příklad už není degenerovaný a můžeme jej vyřešit normálním způsobem. Přechodem na $\lim \varepsilon = 0$ dostaneme z optimálního řešení pozměněného příkladu optimální řešení původního degenerovaného příkladu. Snadno se přesvědčíme, že výsledek je stejný jako při metodě dříve popsané.

Při řešení degenerovaných příkladů se může stát, že se v několika krocích hodnota účelové funkce nemění, neboť se přesouvají jenom nuly. Rychlost, s jakou dospějeme k optimálnímu řešení, závisí do značné míry na tom, která políčka přibíráme k doplnění obsazených políček (viz přiřazovací problém čl. 8.7).

8.7 PŘIŘAZOVACÍ PROBLÉM

Typickým příkladem degenerovaných úloh je tzv. přiřazovací problém. Je to vlastně nejjednodušší distribuční problém **o stejném počtu řádků a sloupců** ($m = n$), u něhož se všechna okrajová čísla rovnají jednotce ($a_i = 1$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $b_j = 1$; $j = 1, 2, \ldots, m$). Takový problém je nutně degenerovaný.

Každé základní řešení má přesně m obsazených políček místo potřebných $2m - 1$.

Příklad 8.5: Vezměme tento jednoduchý příklad. Předpokládejme, že stavební podnik má na pěti stavbách po jedné míchačce betonu stejného typu a chce přesunout tyto míchačky na pět nových staveništ. Jsou známy kilometrové vzdálenosti mezi jednotlivými staveništi a je otázka, jak přesunout míchačky, tj. z které stavby na kterou je dopravit, aby celková vzdálenost (a tím celkové náklady přesunu) byla minimální. Uspořádáme-li vzdálenost mezi výchozími staveništi (označení V_i) a novými staveništi (S_j) do čtvercové tabulky 8.15, dostaneme:

Tabulka 8.15

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i
V_1	50	35	36	44	40	1
V_2	46	48	40	42	28	1
V_3	40	32	36	34	38	1
V_4	38	29	30	32	32	1
V_5	42	36	32	34	30	1
b_j	1	1	1	1	1	

V daném případě má problém deset omezení typu

$$x_{ij} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

a

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} = 1 \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5),$$

z nichž devět je nezávislých (tj. základní řešení má nejvýše devět kladných prvků). Přitom symbol x_{ij} znamená počet míchaček, které se mají přesunout z i-té výchozí stavby na j-tou stavbu novou. Z povahy příkladu plyne, že x_{ij} se může rovnat buď jedné, nebo nule, přičemž v každé řádce a v každém sloupci bude jedna jednotka a čtyři nuly. Celkem bude tedy v řešení pět kladných prvků (jednotky) a zbytek nuly.

V zásadě je možno tyto problémy řešit metodou výše uvedenou. Pro silnou degenerovanost se může stát, že řešení bude spojeno s mnoha zbytečnými kroky, spjatými pouze s přesunováním nul mezi volnými políčky. K řešení takových problém se proto hodí lépe jiná metoda, tzv. maďarská metoda (viz čl. 8.11) a jí podobná metoda průtoková (čl. 10.9), které jsou k degeneraci úplně lhostejné.

8.8 ŘEŠENÍ DOPRAVNÍHO PROBLÉMU, NEROVNÁ-LI SE SOUČET KAPACIT SOUČTU POŽADAVKŮ

Dosud jsme předpokládali, že se součet kapacit dodavatelských stanic přesně rovná součtu požadavků spotřebitelů. Ve skutečnosti se s takovými případy setkáme málokdy a ve většině případů se kapacity a požadavky navzájem rovnat nebudou. Avšak tyto případy lze snadno převést na probraný již případ rovnosti kapacit a požadavků zaváděním přídatných proměnných. Mohou se vyskytnout dva případy:

a) Kapacity jsou větší než požadavky (tj. $\sum_i a_i > \sum_j b_j$). V tomto případě se rovnice (8.1) změní na nerovnosti tvaru

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \leqq a_i$$

Pomocí přídatných proměnných ($x_{i,n+1}$) je můžeme opět změnit na rovnice tvaru

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + x_{i,n+1} = a_i$$

Věcně přídatné proměnné znamenají přebytečné kapacity. Jejich součet musí dát úhrn nevyužitých kapacit, tj.

$$x_{1,n+1} + x_{2,n+1} + \ldots + x_{m,n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j \tag{8.9}$$

Rovnice (8.9) má zřejmě povahu sloupcového omezení. Dostaneme tedy dopravní problém již známého tvaru o $m(n + 1)$ proměnných a o $m + n + 1$ rovnicích, z nichž je $m + n$ nezávislých. Novou rovnici (8.9) (nový sloupec) můžeme interpretovat tak, že existuje další spotřebitel, jehož požadavek se rovná úhrnu přebytečných kapacit. Je to ovšem fiktivní spotřebitel; $x_{i,n+1}$ znamená množství dodané i-tým dodavatelem tomuto fiktivnímu spotřebiteli (věcně je to ovšem nevyužitá kapacita i-tého dodavatele). Sazba za dodávku fiktivnímu spotřebiteli se rovná nule (neboť prakticky nejde o dodávku). V tabulkové úpravě bude fiktivní spotřebitel reprezentován přídatným, $(n + 1)$-ním sloupcem, v jehož políčkách budou sazby vesměs nulové.

Příklad 8.6. Postup vysvětlíme na jednoduchém příkladě s třemi dodavateli o kapacitách 1 800, 1 200 a 2 000 a s dvěma spotřebiteli o požadavcích 2 900 a 1 500, se sazbami uvedenými v tab. 8.16.

Tabulka 8.16

	S_1	S_2	Kapacity
V_1	53	51	1 800
V_2	48	53	1 200
V_3	62	42	2 000
Požadavky	2 900	1 500	

Kapacity tří dodavatelů zde převyšují požadavky spotřebitelů o 600 jednotek. Zavedeme do výpočtu fiktivního spotřebitele S_3, jehož požadavek činí právě 600 jednotek. Sazby za dodávky fiktivnímu spotřebiteli jsou nulové. Řešení je uvedeno v tab. 8.17.

Tabulka 8.17

	S_1	S_2	S_3	Kapacity	u_i
V_1	53 1 700	51 42	0 100	1 800	0
V_2	48 1 200	53 37	0 —5	1 200	—5
V_3	62 53	42 1 500	0 500	2 000	0
Požadavky	2 900	1 500	600	5 000	
v_j	53	42	0		

V optimálním programu nebude tedy kapacit V_1 a V_3 plně využito.

Předpokládejme, že v příkladě jde o tři podniky téhož sdružení, které vyrábějí týž výrobek a jejichž úhrnná kapacita převyšuje požadavky. V uvedeném případě pak nejde jen o racionální přepravní plán, nýbrž i o nejvýhodnější rozmístění výroby mezi podniky sdružení.

b) Kapacity jsou menší než požadavky, tj.

$$\sum_i a_i < \sum_j b_j$$

V tomto případě budou mít sloupcová omezení místo rovnic (8.2) tvar nerovností typu

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \leqq b_j$$

Tyto nerovnosti změníme opět pomocí přídatných proměnných na rovnice

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} + x_{m+1,j} = b_j$$

Přídatné proměnné zde znamenají neuspokojené požadavky. Jejich součet se rovná úhrnu neuspokojených požadavků, tj.

$$x_{m+1,1} + x_{m+1,2} + \ldots + x_{m+1,n} = \sum_j b_j - \sum_i a_i \tag{8.10}$$

Rovnice (8.10) má tvar řádkového omezení (8.1). Podobně jako v případě a) můžeme neuspokojené požadavky považovat za dodávky od fiktivního dodavatele. Sazby za dodávky od tohoto dodavatele jsou opět nulové. V tabulkové úpravě řešení můžeme tedy postupovat jako v případě a), jedině s tím rozdílem, že přidáváme v tomto případě další $(m + 1)$-ní řádku.

Příklad 8.7. Dva dodavatelé skladují po 1 000 jednotkách určitého zboží a dva spotřebitelé požadují po 1 200 jednotkách tohoto zboží. Sazby jsou uvedeny v tab. 8.18.

Tabulka 8.18

	S_1	S_2	Kapacity
V_1	20	22	1 000
V_2	19	20	1 000
Požadavky	1 200	1 200	

Nedostávajících se 400 jednotek přisuzujeme fiktivnímu dodavateli V_3. Sazby za dodávku od tohoto dodavatele jsou nulové. Takto rozšířená úloha i její řešení jsou uvedeny v tab. 8.19.

Tabulka 8.19

	S_1	S_2	Kapacity	u_i
V_1	20 1 000	22 21	1 000	21
V_2	19 200	20 800	1 000	20
V_3	0 —1	0 400	400	0
Požadavky	1 200	1 200	2 400	
v_j	—1	0		

Je to řešení optimální, jak ukazuje vyhodnocení volných políček. Toto řešení znamená, že požadavek druhého spotřebitele nebude uspokojen; dostane 800 jednotek od druhého dodavatele, ale 400 jednotek nedostane (dostane je od fiktivního dodavatele).

Oba příklady jsme řešili jedině z hlediska dopravních nákladů a jen z tohoto hlediska jsou uvedená řešení optimální. Avšak v těchto příkladech nešlo jen o otázku dopravy. První příklad se týkal také otázky, kterých kapacit se má přednostně využít; druhý příklad se pak týkal též otázky přednostního pořadí zásobování spotřebitelů. U příkladů tohoto druhu nemusí být ovšem výše dopravních nákladů jediným a rozhodujícím kritériem optimálnosti. Při řešení podobných úloh bude mít význam i řada jiných momentů, jako vlastní náklady, náklady na údržbu nevyužitých kapacit, smluvní zajištěnost dodávek aj. Některé z nich je možno pojmout do dopravního modelu.

Tak např. vlastní náklady budou mít význam při rozhodování o využití kapacit, existují-li přebytečné kapacity.

Předpokládejme např., že v příkladě 8.6 se vlastní náklady v jednotlivých podnicích liší; v prvním podniku činí 100 Kčs za jednotku, v druhém 110 Kčs a ve třetím 95 Kčs. Řešení upraveného problému je naznačeno v tab. 8.20.

Tabulka 8.20

	S_1	S_2	S_3	Kapacity	u_i
V_1	153 1 800	151 133	0 —5	1 800	—4
V_2	158 600	163 138	0 600	1 200	1
V_3	157 500	137 1 500	0 —1	2 000	0
Požadavky	2 900	1 500	600	5 000	
v_j	157	137	—1		

Toto řešení se podstatně liší od předchozího. Kdežto v předchozím případě zůstaly nevyužity kapacity prvního a třetího podniku, nyní v optimálním řešení není využito kapacity druhého podniku.

Problémy s fiktivními stanicemi vyžadují určitou modifikaci, jestliže nevyužití kapacit je spojeno s náklady, popřípadě jestliže nesplnění dodávek některým spotřebitelům se penalizuje.

Vezměme třeba příklad 8.7 a předpokládejme, že dodávka 1 200 jednotek spotřebiteli S_2 (jehož poptávka v řešení podle tab. 8.19 není uspokojena) je smluvně zaručena a nesplnění dodávky je penalizováno ve výši 1,50 Kčs za každou nedodanou jednotku.

V tomto případě nelze považovat sazbu na dodávku od fiktivního dodavatele (tedy sazbu za nesplnění dodávky) spotřebiteli S_2 za nulu, ale je třeba za sazbu dosadit výši penále. Náš příklad bude tedy mít řešení uvedené v tab. 8.21.

Tabulka 8.21

	S_1	S_2	Kapacity	u_i
V_1	20 1 000	22 21,5	1 000	20
V_2	19 18,5	20 1 000	1 000	18,5
V_3	0 200	1,5 200	400	0
Požadavky	1 200	1 200		
v_j	0	1,5		

Je zajímavé, že požadavek spotřebitele S_2 nebude podle optimálního programu plně uspokojen, přestože nesplnění požadavku je penalizováno. Pokuta je totiž vyvážena nižšími dopravními náklady ke spotřebiteli S_1.

Kdyby z určitých důvodů byl spotřebitel S_2 preferován natolik, že by musel dostat plnou dodávku (např. dodávky pro výstavbu důležitých objektů), museli bychom zabránit tomu, aby políčko $\overline{V_3S_2}$ bylo obsazeno. Dosáhne se toho tak, že do tohoto políčka dosadíme sazbu M, tzv. prohibitivní sazbu, která může nabývat libovolně velikých kladných hodnot.

Obdobně postupujeme, chceme-li v případě přebytečných kapacit některý z podniků nechat pracovat na plnou kapacitu. Tak např. chceme-li v příkladě 8.7 v tab. 8.20 udržet výrobu podniku V_2 v plné kapacitě, musíme zabránit obsazení políčka $\overline{V_2S_3}$ (tj. dodávce fiktivnímu spotřebiteli), a dosadíme tam tedy opět prohibitivní sazbu M.

8.9 REDUKCE MATICE SAZEB

Mějme opět vyrovnaný dopravní problém:
Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{8.11}$$

při podmínkách

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad x_{ij} \geqq 0 \tag{8.12}$$

Upravme nyní matici sazeb $[c_{ij}]$ tohoto problému tak, že v každé řádce přičteme k sazbám určité číslo α_i a podobně v každém sloupci přičteme k sazbám určité číslo β_j. Místo původní matice dostaneme tím změněnou matici sazeb $[c_{ij} + \alpha_i + \beta_j]$.

Otázka je, jak se tím mění řešení úlohy. Změna sazeb se zřejmě netýká omezení (8.12), mění se tím jenom účelová funkce. Pro novou účelovou funkci platí:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + \alpha_i + \beta_j)\, x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{ij}$$

Po dosazení podle (8.11)

$$z_1 = z + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Dosadíme-li zde ještě podle (8.12), dostaneme:

$$z_1 = z + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \tag{8.13}$$

Nová účelová funkce se tedy liší od původní pouze o konstantu

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \tag{8.14}$$

To ale znamená, že optimální řešení pozměněné úlohy bude stejné jako u úlohy původní, s tím jediným rozdílem, že hodnota účelové funkce bude větší o konstantu (8.14).

Přičteme-li (odečteme-li) k sazbám v jednotlivých řádkách vyrovnaného dopravního problému libovolná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ a k sazbám v jednotlivých sloupcích libovolná

čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, bude mít takto pozměněný problém totéž optimální řešení jako problém původní, ovšem hodnota minima se zvýší (sníží) o

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$$

Stručně říkáme, že matice sazeb $[c_{ij}]$ a matice, která vzniká tím, že v jednotlivých řádkách i v jednotlivých sloupcích matice přičteme k sazbám libovolná reálná čísla, jsou ekvivalentní v tom smyslu, že dopravní problémy s těmito maticemi mají optimální řešení v témž bodě.

To, co bylo uvedeno o možnosti redukce sazeb, platí sice zcela obecně, u nevyrovnaných úloh je však taková redukce pochopitelně možná až po doplnění fiktivním dodavatelem nebo fiktivním spotřebitelem. Jinak by redukce vedla k nesprávnému výsledku (viz doplněk k příkladu 8.7 na str. 256).

Příklad 8.8. Optimalizace výroby a dopravy při konstantních nákladech.

Pozměňme poněkud úlohu 8.1 a předpokládejme, že čtyři mlýny a šest pekáren v příkladě tvoří jeden podnik a že okrajová čísla znamenají kapacity těchto závodů. Předpokládejme dále, že náklady na zpracování jsou v závodech různé: Semletí jedné tuny mouky stojí v jednotlivých závodech 1 100, 1 050, 1 120, popř. 1 150 Kčs. Zpracování jedné tuny v pekárnách stojí 1 200, 1 200, 1 350, 1 300, 1 300, popř. 1 320 Kčs. Podniku při rozhodování o rozvozu mouky půjde zřejmě nejen o minimalizaci dopravních nákladů, nýbrž o komplexní minimalizaci nákladů dopravních a nákladů na zpracování.

Není obtížné v tomto smyslu úkol přeformulovat. Stačí místo dopravních sazeb dosadit do účelové funkce (a samozřejmě i do jednotlivých políček) součet dopravních sazeb a nákladů zpracování na jednotku. Tak např. v políčku $\overline{V_1 S_1}$ bude místo dosavadní sazby $c_{11} = 12$ číslo $12 + 1\,000 + 1\,200 = 2\,212$. Podle uvedené věty má tato úloha stejné řešení jako úloha 8.1, ovšem hodnota účelové funkce je větší o $3\,359\,240 (= 200 . 1\,100 + 320 . 1\,050 + 380 . 1\,120 + 500 . 1\,150 + 162 . 1200 + 175 . 1\,200 + 220 . 1\,350 + 264 . 1\,300 + 312 . 1\,300 + 267 . 1\,320)$.

Uvedené věty je možno použít k redukci matice sazeb tak, aby mezi sazbami bylo co nejvíce nul. Odečteme-li např. v každé řádce nejmenší sazbu a v takto redukované matici odečteme v každém sloupci opět nejmenší sazbu, bude v redukované matici v každé řadě aspoň jedna sazba nulová, přičemž ostatní zůstanou nezáporné. Taková matice je přehlednější, snáze v ní zkonstruujeme vhodné výchozí řešení. Tak např. podaří-li se nalézt základní řešení, u něhož jsou ve všech obsazených políčkách sazby nulové, je to řešení optimální (hodnota účelové funkce se totiž v tomto případě rovná nule a menší nemůže být, jsou-li sazby vesměs nezáporné).

Příklad 8.9. V tab. 8.22 je dán dopravní problém s maticí sazeb a okrajovými čísly.

Odečteme-li zde v první řádce 9, v druhé 6, ve třetí 9 a pak ve zredukované matici v druhém sloupci 2 a ve čtvrtém 4, dostaneme ekvivalentní dopravní úlohu (tab. 8.23).

Tabulka 8.22

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
V_1	9	11	11	13	100
V_2	6	9	6	13	100
V_3	13	11	9	18	100
Požadavky	75	75	75	75	300

Tabulka 8.23

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
V_1	0 25	0	2	0 75	100
V_2	0 50	1	0 50	3	100
V_3	4	0 75	0 25	5	100
Požadavky	75	75	75	75	300

V tabulce je hned vepsána jedna z možných variant řešení, kde obsazená políčka jsou vesměs nulová. Je to zřejmě řešení optimální.

8.10 APROXIMAČNÍ METODY

Dosud jsme při hledání výchozího řešení nehleděli vůbec na kvalitu řešení, tj. jak blízké je optimu. Prakticky je však důležité dostat hned dobrou aproximaci, a to ze dvou důvodů. Jednak dobrá první aproximace může ušetřit mnoho kroků potřebných k dosažení optima, jednak je často možno se spokojit vůbec s dobrou první aproximací (např. je-li kvalita výchozích údajů špatná, je obvykle účelnější se spokojit s dobrou aproximací než hledat pracně optimum).

Obvykle vede k dobrému výsledku postup, při němž obsazujeme nejdříve políčka s nejnižšími sazbami. Nemusí tomu však vždy být, jak ukazuje příklad 8.10 v tab. 8.24.

Příklad 8.10

Tabulka 8.24

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
V_1	6	5	4	3	200
V_2	16	15	11	8	300
V_3	18	14	9	6	240
Požadavky	160	178	186	216	740

Nejnižší sazba je zde v políčku $\overline{V_1S_4}$, a proto tam dosadíme maximálně možné množství 200 jednotek. Dalšími v pořadí jsou políčka $\overline{V_1S_3}$, $\overline{V_1S_2}$ a $\overline{V_1S_1}$, resp. $\overline{V_3S_4}$. Do prvých tří však už nemůžeme nic dosadit, neboť obsazením políčka $\overline{V_1S_4}$ je už celá první řádka obsazena. Z volných políček má nejnižší sazbu $\overline{V_3S_4}$; dosadíme tam 16 jednotek. Dále dosadíme do políčka $\overline{V_3S_3}$ 186 jednotek, čímž zabráníme obsazení dalšího nejlevnějšího políčka $\overline{V_2S_3}$. Pokračujeme dále v obsazování políček $\overline{V_3S_2}$, $\overline{V_2S_2}$ a $\overline{V_2S_1}$. Výsledek je uveden v tab. 8.25. Hodnota účelové funkce při tomto řešení činí:

$$z = 200 \,.\, 3 + 160 \,.\, 16 + 140 \,.\, 15 + 38 \,.\, 14 + 186 \,.\, 9 + 16 \,.\, 6 = 7\,562,$$

a jak se můžeme přesvědčit, je toto řešení velmi vzdáleno od optima. Je to řešení dokonce podstatně horší, než jakého bychom dosáhli metodou severozápadního rohu, při níž se kvalita řešení nebere vůbec v úvahu. Tento výsledek je do jisté míry překvapující, protože jsme přece postupovali zdánlivě zcela logicky, jak se to v praxi obvykle dělá; obsazovali jsme přednostně nejlevnější dopravní cesty.

Zkoumáme-li blíže tabulku 8.25, můžeme snadno zjistit, proč zdánlivě logický postup může vést k velmi špatné aproximaci. Všimněme si např. sloupců 1 a 4. Tím, že jsme spotřebitele S_4 zásobili převážně z V_1, tedy po absolutně nejlevnější cestě, ušetřili jsme sice 3 . 200 = 600 Kčs, neboť nejbližší vyšší sazba je tu o 3 Kčs dražší, zároveň jsme tím však znemožnili zásobovat spotřebitele S_1 (a současně i spotřebitele S_2) z V_1, čímž jsme prodražili dopravu o 160 . 10 = 1 600 Kčs (a nejméně o dalších 40 . 9 = 360 Kčs při zásobování spotřebitele S_2). Obsazení políčka $\overline{V_1S_4}$ není tedy v daném případě výhodné, třeba je to absolutně nejnižší sazba. Z uvedeného faktu současně vyplývá, že absolutní výše sazby není pro obsazení té či oné dopravní cesty rozhodující. Rozhodující je relativní výhodnost, tj. rozdíl mezi danou sazbou a dalšími nejnižšími sazbami v témž sloupci nebo v téže řádce (tj. po cestách vedoucích k témuž spotřebiteli nebo od téhož dodavatele). Čím je tento rozdíl větší, tím je daná sazba výhodnější. Proto je mnohem lepší obsadit např. v prvním pořadí políčko $\overline{V_1S_1}$, protože tím ušetříme na každé jednotce dopravené k spotřebiteli S_1 10 Kčs. Takové úspory nelze dosáhnout po žádné jiné cestě. Na tomto poznatku je založena Vogelova metoda (metoda VAM) řešení dopravního problému.

Tabulka 8.25

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
V_1	6	5	4	3 200	200
V_2	16 160	15 140	11	8	300
V_3	18	14 38	9 186	6 16	240
Požadavky	160	178	186	216	740

Chceme-li určit pořadí v obsazování políček při konstrukci první aproximace, je nutno zkoumat rozdíly mezi nejnižšími sazbami v jednotlivých řádkách a sloupcích a mezi sazbami nejblíže vyššími. Tyto rozdíly je účelné zapsat do pomocné řádky, resp. sloupce. V našem případě jsou tyto rozdíly patrny v tab. 8.26.

Největší rozdíl je tu v prvním sloupci. Obsadíme proto především políčko $\overline{V_1S_1}$, a to 160 jednotkami, čímž je celý první sloupec obsazen a pro další výpočty již nepřichází v úvahu. Tím se však mohou změnit některé rozdíly řádkové (v daném případě však tomu tak není), takže je třeba je přezkoumat.

Největší rozdíl je nyní v druhém sloupci. Obsadíme proto v dalším kroku políčko $\overline{V_1S_2}$. Můžeme tam dosadit nejvýše 40 jednotek. Tím je první řádka obsazena a z dalšího výpočtu ji můžeme vyřadit. Rozdíly ve zbývajících sloupcích se změní, a to v druhém sloupci na 1, ve třetím sloupci na 2 a ve čtvrtém na 2. Obsadíme proto dále políčka v tomto pořadí: $\overline{V_3S_3}$ obsadíme 186 jednotkami, $\overline{V_3S_4}$ 54 jednotkami a zbytek rozdělíme mezi $\overline{V_2S_2}$ a $\overline{V_2S_4}$.

Výsledek je uveden v tab. 8.27.

Tabulka 8.26

	S_1	S_2	S_3	S_4	Rozdíly
V_1	6	5	4	3	1
V_2	16	15	11	8	3
V_3	18	14	9	6	3
Rozdíly	10	9	5	3	

Tabulka 8.27

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity	u_i
V_1	6 160	5 40	4 1	3 —2	200	0
V_2	16 16	15 138	11 11	8 162	300	10
V_3	18 14	14 13	9 186	6 54	240	8
Požadavky	160	178	186	216	740	
v_j	6	5	1	—2		

Hodnota účelové funkce při tomto řešení činí

$$z = 160 . 6 + 40 . 5 + 138 . 15 + 162 . 8 + 186 . 9 + 54 . 6 = 6\,524$$

V tabulce jsou hned vypočtena řádková a sloupcová čísla. Vyplývá z nich, že napsané řešení je optimální. Dosáhli jsme tedy hned v prvním kroku optimálního řešení. Nebude tomu tak ovšem ve všech případech. Je zajímavé si všimnout, že v optimálním programu nejsou dvě cesty s absolutně nejnižšími sazbami vůbec obsazeny.

Popsaná metoda vede vždy k dobrým aproximacím, u rozsáhlých matic se však stává dosti nepřehlednou. Mimoto působí někdy potíže v rozhodování o přednostním obsazení políček okolnost, že je několik největších rozdílů. Je proto účelné zredukovat matici nákladů před výpočtem rozdílů tak, aby v každé řadě byla aspoň jedna nulová sazba.

8.11 MAĎARSKÁ METODA

Jak jsme již uvedli (čl. 8.7), hodí se k řešení mnoha distribučních úloh tzv. maďarská metoda.

Maďarská metoda je založena na této myšlence: V čl. 8.9 jsme uvedli, že místo původní úlohy lze řešit úlohu s maticí sazeb zredukovanou tak, že v každé řadě se od sazeb odečte libovolná konstanta (tj. místo obecného prvku c_{ij} bude v zredukované matici $c_{ij} - u_i - v_j$, kde u_i a v_j jsou libovolná čísla). Redukci sazeb lze však provést tak, aby všechny sazby zůstaly nezáporné, aby však přitom v každé řadě byla aspoň jedna sazba nulová. Existuje-li řešení, ve kterém jsou obsazena jenom políčka s nulovou sazbou, je to řešení optimální. (Hodnota účelové funkce u takového řešení je nula, což je s ohledem na nezápornost sazeb hodnota minimální.) Neexistuje-li takové řešení, obsadí se jenom nulová políčka (políčka s nulovou sazbou), a to maximální možnou hodnotou. Dále se pak provede další redukce sazeb tak, aby vznikla nová nulová políčka. Po konečném počtu takových kroků se dospěje k řešení optimálnímu.

Odvodíme maďarskou metodu nejdříve pro přiřazovací problém.

Začneme konkrétně s příkladem 8.5 (str. 250). Prvním krokem tu je zredukování sazeb tak, aby zůstaly nezáporné a aby v každé řadě byla aspoň jedna sazba nulová. Uděláme to např. tak, že odečteme nejdříve v každé řádce nejmenší sazbu a po této redukci odečteme ještě v každém sloupci nejmenší sazbu. Stačí ovšem toto odčítání jenom naznačit, jako v tab. 8.28, kde v posledním sloupci jsou uvedena čísla u_i, která se mají odečíst od sazeb v jednotlivých řádkách, a v poslední řádce jsou čísla v_j, která se mají odečíst v jednotlivých sloupcích. Tím dostaneme v každé řadě nejméně jednu nulovou sazbu. V tab. 8.28 je celkem devět nulových sazeb a jsou označeny podtržením příslušné neredukované sazby.

Víme již, že v přiřazovacím problému můžeme do každého políčka dosadit jenom nulu nebo jednotku, a to v každé řadě jedinou jednotku. Naší snahou bude využít maximálně políček s nulovou sazbou (nulových políček). Protože v prvním sloupci je jediné takové políčko, a to $\overline{V_3S_1}$, dosadíme do tohoto políčka jednotku. Tím jsou první sloupec a třetí řádka obsazeny. To znamená, že jediné nulové políčko ve čtvrtém sloupci $\overline{V_3S_4}$ již nelze obsadit. Podobně v druhé řádce je jediné nulové políčko $\overline{V_2S_5}$; dosadíme tam rovněž jednotku. Tím jsme obsadili druhou řádku a pátý sloupec. To znamená, že jediné nulové políčko v páté řádce $\overline{V_5S_5}$ již rovněž nelze obsadit. V úvahu přicházejí ještě nulová políčka $\overline{V_1S_2}$, $\overline{V_1S_3}$, $\overline{V_4S_2}$ a $\overline{V_4S_3}$. Z nich

Tabulka 8.28

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i
V_1	50	$\underline{35}$ 1	$\underline{36}$	44	40	1	35
V_2	46	48	40	42	$\underline{28}$ 1	1	28
V_3	$\underline{40}$ 1	$\underline{32}$	36	$\underline{34}$	38	1	32
V_4	38	$\underline{29}$	$\underline{30}$ 1	32	32	1	29
V_5	42	36	32	34	$\underline{30}$	1	30
b_j	1	1	1	1	1		
v_j	8	0	1	2	0		

je možno obsadit buď $\overline{V_1S_2}$ a $\overline{V_4S_3}$, jak jsme to udělali v tab. 8.28, nebo $\overline{V_1S_3}$ a $\overline{V_4S_2}$.

Tím jsme obsadili celkem čtyři nulová políčka, což ještě nedává řešení úlohy. V daném případě snadno nahlédneme, že více než čtyři nulová políčka nelze obsadit. Obecně však není vždy snadné zjistit, zda jsme obsadili maximální počet nulových políček. Je proto namístě udat pravidlo, jak postupovat, abychom v podobných případech obsadili maximální počet nulových políček, a jak zjistit, zda skutečně byl maximální počet těchto políček obsazen. Klíčem k tomu je věta Königova.

8.12 KÖNIGOVA VĚTA

Mějmě obecně matici typu $(m\,.\,n)$, jejíž některé prvky jsou nulové. Vyberme mezi nulovými prvky některé tak, aby v každé řadě (tj. v každém řádku a sloupci) byl nejvýše jeden vybraný nulový prvek. Pro stručnost nazveme takto vybrané nulové prvky nezávislými nulami. Abychom v matici vybrali co největší počet nezávislých nul, můžeme použít tohoto logického postupu:

a) Vyškrtneme nejdříve všechny řady, které neobsahují nuly.
V příkladě tab. 8.28 zatím taková řada není.

b) Ve zbývající matici najdeme řady s jedinou nulou (pokud takové řady existují) a jednu z těch nul vybereme za nezávislou nulu. Vyškrtneme řádku a sloupec, v níž tato nula leží, a ve zbývající matici opakujeme kroky a) a b) tak dlouho, pokud to jde. Ve schématu A je jediná nula např. v druhé řádce. Vybereme tuto nulu (označeno rámečkem) a škrtneme druhou řádku a třetí sloupec. Pak ale bude jediná nula v řádce šesté. Vybereme ji a škrtneme první sloupec a šestou řádku. Podle stejné zásady pak postupně vybereme devátý prvek první řádky, čtvrtý prvek páté řádky, osmý prvek sedmé řádky, druhý prvek osmé řádky atd.

c) Jestliže je v každé řadě více než jedna nula, určíme řadu s nejmenším počtem nul a vybereme v ní jednu nulu jako nezávislou. Vyškrtneme řádku a sloupec, v níž tato nula leží, a ve zbývající matici opakujeme kroky b), popř. c) tak dlouho, až vyčerpáme všechny nuly. Ve schématu A jsme tímto způsobem vybrali celkem osm nezávislých nul.

Je otázka, zda jsme tímto postupem vybrali maximální počet nezávislých nul. Abychom tuto otázku zodpověděli, spojíme ji s jinou otázkou.

Snažme se přeškrtat vodorovnými a svislými úsečkami nulové prvky matice. Je otázka, kolik těchto tzv. krycích čar stačí k pokrytí všech nul.

Odpověď na uvedené otázky dává **věta Königova:**

Maximální počet nezávislých nul, které je možno v dané matici vybrat, se rovná minimálnímu počtu krycích čar, jimiž je možno pokrýt všechny nulové prvky matice.

Dejme tomu, že minimální počet krycích čar je t, z toho r řádků a s sloupců ($r + s = t$). Počet nezávislých nul nemůže být zřejmě větší než t, neboť v každé řadě může být jenom jedna nezávislá nula. Z druhé strany nezávislé nuly, které nejsou obsaženy v r krycích řádkách, musí ležet nejméně na s (tj. počet krycích sloupců) dalších řádkách. Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby zbývající nezávislé nuly byly umístěny na $k < s$ dalších řádkách, pak by $r + k < t$ řádků stačilo na pokrytí všech

A Schéma B

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1\\
1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
\boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1\\
1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|cccc|c|cc}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1\\
1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
\boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1\\
1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 1\\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \boxed{0}\\
\hline
\end{array}$$

nul v rozporu s předpokladem, že t je minimální počet krycích čar. Kromě nezávislých nul ležících na r krycích řádkách musí být tedy nejméně dalších s nezávislých nul.

Stejnou argumentaci lze ovšem uvést i v opačném pořadí a dokázat, že kromě nezávislých nul ležících na s krycích sloupcích musí být nejméně r dalších nezávislých nul. Jinými slovy, celkový počet nezávislých nul nemůže být menší než $r + s$. Protože větší také nemůže být, rovná se přesně $r + s = t$. Tím je Königova věta dokázána.

Podle Königovy věty se určí, zda počet vybraných nezávislých nul je maximální, tak že se zkonstruuje minimální soustava krycích čar.

Ke konstrukci minimální soustavy krycích čar lze udat tento návod:

a) Vybereme řadu, v níž nejsou nezávislé nuly (pokud takové řady existují), a vedeme nulami této řady, kolmo k ní, krycí čáry. Tento postup opakujeme, pokud to jde. Ve schématu B to byla především řádka třetí (proto jsme vedli čáru přes třetí sloupec), dále řádka čtvrtá (čáry přes druhý a čtvrtý sloupec). Postupně následují řádka devátá (čára přes osmý sloupec), řádka desátá (čára přes devátý sloupec), řádka první (čára přes první sloupec) a sloupec pátý (čára přes 11. a 12. řádek). Tím jsou v našem příkladě všechny nuly pokryty.

b) Nejsou-li tím všechny nuly pokryty, tj. zůstanou-li nepokryty jenom řady s nezávislými nulami, vedeme krycí čáry přes tyto řady. Všimněme si, že konstrukce krycích čar podle uvedeného návodu nepřipouští protínání dvou čar v nezávislé nule. V našem příkladě jsme pokryli všechny nuly osmi čarami (stejný byl počet vybraných nul). Podle Königovy věty to znamená, že počet vybraných nul byl maximální (a zároveň počet krycích čar minimální).

Tabulka 8.29

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i
V_1	50	1 $\underline{35}$	$\underline{36}$	44	40	1	35
V_2	46	48	40	42	1 $\underline{28}$	1	28
V_3	$\underline{40}$ 1	$\underline{32}$	$\underline{36}$	$\underline{34}$	38	1	32
V_4	38	$\underline{29}$	1 $\underline{30}$	32	32	1	29
V_5	42	36	32	34	$\underline{30}$	1	30
b_j	1	1	1	1	1		
v_j	8	0	1	2	0		

Další redukce matice sazeb

Vraťme se nyní k přiřazovací úloze 8.5. V tab. 8.28 se nám podařilo vybrat čtyři nezávislé nuly. Podle návodu předchozího odstavce pokryjeme všechny nuly matice soustavou krycích čar, jak je uvedeno v tab. 8.29.

Protože počet krycích čar je čtyři, znamená to, že jsme skutečně vybrali maximální počet nezávislých nul (tj. obsadili jsme maximální počet nulových políček). Abychom dospěli k řešení, v němž jsou obsazena jenom nulová políčka, musíme redukovat matici dále (abychom získali další nuly). Využijeme k tomu rovněž soustavy krycích čar.

Zjistíme nejnižší sazbu v nepokrytých políčkách. V našem příkladě je to jednotka (v políčkách $\overline{V_4S_1}$ a $\overline{V_4S_4}$, tj. 38 – 29 – 8; 32 – 29 – 2).

Odečteme-li tuto sazbu, označme ji obecně δ, ve všech nepokrytých řádkách (resp.

Tabulka 8.30

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i
V_1	50	$\underline{35}$ 1	$\underline{36}$	44	40	1	36
V_2	46	48	40	42	1 $\underline{28}$	1	29
V_3	$\underline{40}$ 1	32	36	$\underline{34}$	38	1	32
V_4	$\underline{38}$	$\underline{29}$	$\underline{30}$ 1	$\underline{32}$	32	1	30
V_5	42	36	32	34	$\underline{30}$	1	31
b_j	1	1	1	1	1		
v_j	8	—1	0	2	—1		

přičteme k příslušným u_i) a přičteme-li ve všech pokrytých sloupcích (tj. odečteme od příslušných v_j), získáme tím, že

a) ve všech nepokrytých políčkách se sazby sníží o δ, tj. tam, kde byly sazby δ, vzniknou nové nuly, avšak nikde nevznikne sazba záporná;

b) políčka jednou pokrytá zůstanou nezměněna, to se týká i všech obsazených políček (tj. vybraných nul, ve kterých se nemohou protínat dvě čáry);

c) v políčkách dvakrát pokrytých vzroste sazba o δ.

V našem příkladě zvýšíme o jednotku u_1, u_2, u_4 a u_5 a snížíme v_2, v_3 a v_5; dostaneme matici v tab. 8.30.

V tabulce jsou podtrženy nulové sazby. Protože se podařilo obsadit opět jen čtyři políčka, byla v tabulce zkonstruována soustava krycích čar.

V tab. 8.30 zjistíme opět nejmenší sazbu v nepokrytých políčkách.

Tabulka 8.31

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i
V_1	50	1 $\underline{35}$	$\underline{36}$	44	40	1	36
V_2	46	48	40	42	1 $\underline{28}$	1	30
V_3	1 $\underline{40}$	32	36	$\underline{34}$	38	1	32
V_4	$\underline{38}$	$\underline{29}$	1 $\underline{30}$	$\underline{32}$	32	1	30
V_5	42	36	$\underline{32}$	1 $\underline{34}$	$\underline{30}$	1	32
b_j	1	1	1	1	1		
v_j	8	—1	0	2	—2		

Je to opět jednotka, a to v políčkách $\overline{V_5S_3}$ $(32-31)$ a $\overline{V_5S_4}$ $(34-31-2)$. Přičteme tedy jednotku k u_2 a u_5 a odečteme od v_5. Tím dostaneme tab. 8.31, v níž už je možno vybrat pět nezávislých nul. To je také řešení úlohy.

8.13 ZOBECNĚNÍ MAĎARSKÉ METODY

Maďarskou metodu lze snadno zobecnit na řešení dopravní úlohy s celočíselnými kapacitami (a_i) a požadavky (b_j) na základě této úvahy.

Má-li i-tý dodavatel kapacitu a_i, lze v úloze tohoto dodavatele nahradit a_i dodavateli o kapacitě jedna. Podobně spotřebitele s požadavkem b_j lze nahradit b_j spotřebiteli o jednotkovém požadavku. Tím se původní dopravní úloha změní na úlohu stejného typu jako přiřazovací problém o počtu řádků (resp. sloupců) $\sum a_i = \sum b_j$ (nazveme ji rozšířenou maticí), již lze řešit maďarskou metodou.

Prakticky však není třeba místo i-té řádky (kapacita a_i) psát a_i řádků a podobně místo j-tého sloupce b_j sloupců. Stačí si zapamatovat, že políčku $\overline{ij}$ odpovídá v rozšířené matici celá submatice o a_i řádkách a b_j sloupcích, tedy o $a_i \cdot b_j$ políčkách se stejnými sazbami c_{ij}.

Postup vysvětlíme nejlépe na příkladě 8.11.

Příklad 8.11. Mějme vyrovnanou dopravní úlohu s pěti dodavateli a čtyřmi spotřebiteli, jak je uvedeno v tab. 8.32.

Tabulka 8.32

	S_1	S_2	S_3	S_4	Kapacity
D_1	36	42	38	35	500
D_2	40	44	34	37	550
D_3	35	32	41	40	340
D_4	37	35	38	41	340
D_5	42	36	38	40	270
Požadavky	1 000	400	300	300	2 000

Provedeme redukci sazeb jako v předchozí úloze, tj. tak, abychom v každé řadě získali nulovou sazbu (tab. 8.33). Máme přitom na paměti, že např. nulový prvek v políčku $\overline{D_1S_1}$ znamená v rozšířené matici submatici o 500 řádkách a 1 000 sloupcích s vesměs nulovými prvky. Lze v ní tedy vybrat celkem 500 nezávislých nul, což vyznačíme tak, že do políčka $\overline{D_1S_1}$ napíšeme 500 (tab. 8.33).

Tabulka 8.33

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	$\underline{36}$ 500	42	38	$\underline{35}$	500	35
D_2	40	44	$\underline{34}$ 300	37	550	34
D_3	35 340	$\underline{32}$	41	40	340	32
D_4	37 60	$\underline{35}$	38	41	340	35
D_5	42	$\underline{36}$	38	40	270	36
b_j	1 000	400	300	300	2 000	
v_j	1	0	0	0		

Postup obsazení tabulky byl tento: Obsadíme nejdříve řady, v nichž je jediná nula. Tak v prvním sloupci je jediná nula v políčku $\overline{D_1S_1}$. Jak jsme již uvedli, je tam možno dosadit nejvýše 500. Políčko $\overline{D_1S_4}$ představuje rovněž submatici o 500 řádkách a 300 sloupcích s vesměs nulovými prvky, avšak všech 500 řádek je již obsazeno, a nelze tedy v této submatici už vybrat žádnou nezávislou nulu. Podle stejné úvahy jako $\overline{D_1S_1}$ obsadíme postupně $\overline{D_2S_3}$ a $\overline{D_3S_2}$. Po obsazení $\overline{D_3S_2}$ je možno v políčku $\overline{D_4S_2}$ nebo $\overline{D_5S_2}$ (resp. v příslušných submaticích) vybrat už jen 60 nezávislých nul (tolik zbývá v rozšířené matici neobsazených sloupců s nulovými sazbami).

Jak je zřejmé z postupu, můžeme představu rozšířené matice vůbec vynechat. Obsadíme prostě postupně nulová políčka, a to vždy maximálními hodnotami, ve stejném pořadí, jak jsme to dělali u přiřazovacího problému (tj. nejdříve řady, v nichž je jediná nula, atd.).

Při konstrukci soustavy krycích čar, pro niž platí stejné zásady jako u přiřazovacího problému, pamatujme opět, že každá krycí čára představuje v rozšířené matici tolik čar, kolik činí kapacita příslušné řady. Proto vedeme přes dané nulové políčko krycí čáru vždy po té řadě, která je plně obsazena.

Soustava tří krycích čar v tab. 8.33 představuje 1 200 čar (500 + 400 + + 300) v rozšířené matici, což odpovídá právě počtu vybraných nul (součtu dosazených čísel). Znamená to, že jsme skutečně maximálně obsadili nulová políčka.

Najdeme nyní nejnižší sazbu v nepokrytých políčkách. Je to jednotka v políčku $\overline{D_4S_1}$ (37 – 35 – 1). Odečteme proto jednotku v nepokrytých řádkách (tj. přičteme k u_2, u_3, u_4 a u_5) a přičteme v pokrytých sloupcích (tj. odečteme od v_2 a v_3). Dostaneme tab. 8.34, v níž je podle stejných zásad už provedeno maximální obsazení a konstrukce krycích čar.

Tabulka 8.34

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	$\underline{36}$ 500	42	38	$\underline{\underline{35}}$	500	35
D_2	40	44	$\underline{34}$ 300	37	550	35
D_3	35 340	$\underline{32}$	41	40	340	33
D_4	$\underline{37}$ 340	$\underline{35}$	38	41	340	36
D_5	42 60	$\underline{36}$	38	40	270	37
b_j	1 000	400	300	300	2 000	
v_j	1	—1	—1	0		

Nejnižší sazba v nepokrytých políčkách je jednotka v políčku $\overline{D_3S_1}$. Provedeme tedy opět redukci sazeb a obsadíme maximálně nulová políčka, jak je uvedeno v tab. 8.35.

Nejnižší nepokrytá sazba je v tab. 8.35 jednotka v políčku $\overline{D_2S_4}$. Po další redukci sazeb dostaneme již řešení, jak je zřejmo z tab. 8.36.

Tabulka 8.35

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	36 450	42	38	35 50	500	35
D_2	40	44	34 — 300	37	550	36
D_3	35 210	32 130	41	40	340	34
D_4	35 340	35	38	41	340	36
D_5	42	36 270	38	40	270	38
b_j	1 000	400	300	300	2 000	
v_j	1	—2	—2	0		

Tabulka 8.36

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	36 450 —	42	38	35 50 —	500	35
D_2	40	44	34 300 —	37 250 —	550	37
D_3	35 210 —	32 130 —	41	40	340	34
D_4	37 340 —	35	38	41	340	36
D_5	42	36 270 —	38	40	270	38
b_j	1 000	400	300	300	2 000	
v_j	1	—2	—3	0		

8.14 CVIČENÍ

1. V tabulce jsou uvedeny sazby v Kčs za přepravu t polotovarů, kapacity dodavatelů (D) v t a požadavky odběratelů (O) v t:

Tabulka 8.37

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a_i
D_1	6	10	6	5	5	2 210
D_2	5	7	3	4	5	560
b_j	650	320	360	820	800	

Případné nedodání 1 t polotovarů bude prvním odběratelem penalizováno ve výši 2 Kčs a druhým ve výši 4 Kčs.

Určete optimální přepravní program.

2. Výrobci (V) zásobují spotřebitele (S) hotovými výrobky.

Kapacity výrobců v kusech, potřeby spotřebitelů v kusech, sazby v Kčs za přepravu kusu výrobku jsou uvedeny v tabulce 8.38.

Tabulka 8.38

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
V_1	1	1	1,5	2	18 770
V_2	2	1	1,5	2	15 270
b_j	5 200	7 320	11 570	6 750	

V případě nevyužití kapacity výrobců dojde ke ztrátám 50 hal. na 1 kus výrobku.

a) Navrhněte rozvozní plán, který umožňuje dosažení minimálních nákladů.

b) Dodavatelé i odběratelé náleží témuž sdružení, proto k zájmu na minimálních nákladech přepravních přistupuje zájem o minimální náklady zpracování. Zpracování výrobků, spočívající v jejich balení, vyžaduje tyto náklady na 1 kus: u prvního a čtvrtého spotřebitele 14 Kčs, u druhého 14,10 Kčs a u třetího 13,90 Kčs.

K jakým změnám v rozvozním plánu dojde?

c) Zjistěte změny v rozvozním plánu, přistoupí-li k nákladům z a) a b) ještě náklady na výrobu výrobků ve výši 1 850 Kčs u prvního výrobce a 1 830 Kčs u druhého výrobce.

3. Závodníci projeli zkušebně pěti obtížnostními tratěmi, přičemž získali tento počet trestných bodů (tab. 8.39).

Tabulka 8.39

Závodník	Trať				
	1.	2.	3.	4.	5.
1.	15	19	30	31	10
2.	10	15	14	16	10
3.	25	5	30	5	41
4.	32	30	5	15	20
5.	16	14	13	12	10

Pro závody je třeba vyslat na každou trať jednoho závodníka. (Každý závodník může být jen na jedné trati.) Rozdělte závodníky tak, aby za předpokladu nezměněných podmínek dosáhlo 5členné družstvo nejméně trestných bodů.

4. Vedení obchodního domu zjistilo uplatnění šestičlenných kolektivů na různých pracovištích, a to podle výše dosažených tržeb na osobu. Nejvyšší tržba — 3 000 Kčs — dostala 1 bod, 2 500 Kčs 2 body, 2 000 Kčs 3 body, 1 500 Kčs 4 body a 1 000 Kčs 5 bodů.

Tabulka 8.40

VÝSLEDKY HODNOCENÍ

Kolektiv	Pracoviště			
	1.	2.	3.	4.
1.	1	2	3	4
2.	5	1	3	2
3.	2	3	3	2
4.	3	1	5	2

Navrhněte umístění kolektivů tak, aby úhrnný počet bodů byl co nejmenší (jaké celkové tržbě to odpovídá?).

5. Čtyři stroje lze dát do provozu na výrobu čtyř výrobků. V tabulce 8.41 jsou uvedeny výnosy z využití těchto strojů při výrobě jednotlivých výrobků:

Tabulka 8.41

Stroje	Výrobky			
	1.	2.	3.	4.
1.	10 620	16 120	15 310	14 110
2.	16 720	16 350	15 210	14 720
3.	10 540	11 000	16 120	13 540
4.	11 310	12 450	13 150	10 790

Každý stroj je možno nasadit jen na výrobu 1 výrobku, každý výrobek musí být vyráběn. Rozmístěte stroje tak, aby celkový výnos byl co největší.

KAPITOLA 9 ZOBECNĚNÉ DISTRIBUČNÍ ÚLOHY

9.1 VÍCEROZMĚRNÁ DOPRAVNÍ ÚLOHA

Jedním ze zobecnění jednostupňové (viz kap. 8) dopravní úlohy je návazný dopravní problém. Zformulujeme jej pro dopravu s jedním mezičlánkem takto:

V m bodech $D_1, D_2, \ldots, D_m$ (dodavatelé) je k dispozici určitý druh stejnorodého zboží v množstvích $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Toto zboží se dopravuje přes n bodů $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (mezisklady) o kapacitách $b_1, b_2, \ldots, b_n$ k r konečným spotřebitelům $S_1, S_2, \ldots, S_r$, jejichž požadavky činí $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Náklady za přepravu jednotky (dopravní sazby) jsou konstantní, nezávislé na množství, a činí c_{ij} při dopravě od dodavatele D_i do meziskladu M_j a d_{jk} při přepravě z meziskladu M_j k spotřebiteli S_k.

Otázka je, podobně jako u jednostupňového dopravního problému, jaká množství dopravovat od jednotlivých dodavatelů k jednotlivým meziskladům a od jednotlivých meziskladů k jednotlivým spotřebitelům, aby celkové dopravní náklady byly minimální.

Jde-li o problém vyrovnaný, tj. platí-li $\sum_i a_i = \sum_j b_j = \sum_k p_k$, je zřejmě možno tuto úlohu řešit jako dvě jednostupňové dopravní úlohy. V tomto případě můžeme totiž nejdříve optimalizovat dopravu od dodavatelů k meziskladům a v dalším kroku pak optimalizovat dopravu od meziskladů ke spotřebitelům. Obecně však řešení pomocí dvou jednostupňových dopravních problémů není možné. Jestliže např. $\sum_i a_i < \sum_j b_j$, tj. jsou-li dodavatelské kapacity menší než kapacity meziskladů, pak řešení první části problému, tj. dopravy od dodavatelů do meziskladů, může preferovat ty mezisklady, jejichž poloha je z hlediska dopravy ke konečným spotřebitelům nevýhodná, jak je zřejmé z jednoduchého příkladu 9.1 uvedeného v tab. 9.1.

Příklad 9.1

Tabulka 9.1

a

	M_1	M_2	a_i
D_1	10	8	80
D_2	12	5	120
b_j	100	130	

b

	S_1	S_2	b_j
M_1	4	3	100
M_2	8	9	130
p_k	90	110	

Tabulky 9.1a, b jsou konstruovány obdobně jako u jednostupňového dopravního problému a nepotřebují bližšího vysvětlení. Optimalizujeme-li nejdříve dopravu v tab. 9.1a, pak dostaneme v tab. 9.2a:

Tabulka 9.2

a

	M_1	M_2	
D_1	10 70	8 10	80
D_2	12	5 120	120
	70	130	

b

	S_1	S_2	
M_1	4	3 70	70
M_2	8 90	9 40	130
	90	110	

Při dílčí optimalizaci nebude kapacita prvního meziskladu vytížena. Minimální náklady na přepravu zboží od dodavatelů do meziskladů činí 1 380. Optimalizujeme-li na základě toho dopravu od meziskladů ke spotřebitelům, dostaneme řešení (v tab. 9.2b) s minimálními náklady 1 290.

Celkové náklady na přepravu činí při tomto postupu 1 380 + 1 290 = 2 670.

I když v obou dílčích úlohách máme optimum, není toto řešení vcelku optimální. Tak v řešení uvedeném v tab. 9.3 činí celkové náklady jenom 1 400 + 1 230 = = 2 630, tedy o 30 méně než při řešení předchozím.

Příčina je v tom, co jsme uvedli výše. Při dílčí optimalizaci dopravy od dodavatelů k meziskladům preferujeme nutně M_2. Avšak poloha M_2 je dopravně nevýhodná vůči spotřebitelům (sazby od M_2 jsou podstatně vyšší než od M_1). Je zajímavé, že provedeme-li dílčí optimalizace v opačném sledu, nedospějeme rovněž k celkovému optimálnímu výsledku.

Tabulka 9.3

a

	M_1	M_2	
D_1	10 80	8	80
D_2	12	5 120	120
	80	120	

b

	S_1	S_2	
M_1	4	3 80	80
M_2	8 90	9 30	120
	90	110	

Předpokládejme tedy problém nevyrovnaný a pro určitost předpokládejme, že platí

$$\sum_k p_k \leqq \sum_i a_i \leqq \sum_j b_j \tag{9.1}$$

Označíme-li přitom symbolem x_{ij} množství přepravené od D_i k M_j a symbolem y_{jk} množství přepravené od M_j do S_k, můžeme problém formulovat matematicky takto:

Určit minimum lineární formy

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} + \sum_j \sum_k d_{jk}y_{jk} \tag{9.2}$$

na množině řešení soustavy rovnic a nerovností

$$\sum_j x_{ij} \leqq a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{9.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i x_{ij} \leqq b_j \qquad (9.4) \\ \sum_k y_{jk} \leqq b_j \qquad (9.5) \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_j y_{jk} = p_k \qquad (k = 1,2, \ldots, r) \tag{9.6}$$

$$x_{ij}, \quad y_{jk} \geqq 0$$

Tato formulace však není zcela korektní a vskutku takto formulovaná úloha může dát v praxi neupotřebitelné výsledky. Musíme totiž požadovat, aby přísun do kteréhokoli meziskladu se rovnal odsunu z tohoto meziskladu, tj.

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k y_{jk} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Abychom zachovali symetrii, zajistíme tento požadavek tak, že doplníme nerovnosti v omezeních na rovnice, přičemž v omezeních typu (9.4) a (9.5) dosadíme vždy stejnou přídatnou proměnnou. Máme tedy za předpokladu (9.1) tuto úlohu, kterou nazveme pro další výklad *úlohou I:*

Na množině řešení soustavy

$$\sum_j x_{ij} + x_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{9.7}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i x_{ij} + y_j = b_j \qquad (9.8) \\ \sum_k y_{jk} + y_j = b_j \qquad (9.9) \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_j y_{jk} = p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{9.10}$$

$$x_{ij}, y_{jk} \geqq 0$$

$$x_i, \quad y_j \geqq 0 \, .$$

minimalizovat lineární formu

$$\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} + \sum_j \sum_k d_{jk}y_{jk} \tag{9.2}$$

Proměnné x_i a y_j jsou přídatné proměnné. V našem konkrétním případě znamenají nevyužitou kapacitu.

Poznámka: Jinou formulaci téže vícerozměrné úlohy jsme podali v [69], kde je navrženo i speciální řešení. Později řešili podobnou úlohu Maghout, Comes a Steinberg.*) Na jejich myšlenkovém postupu je založen další výklad, ovšem se zpřesněnými důkazy i dalším zobecněním.

Úloha I má $n(m + r)$ proměnných (bez přídatných) a $m + 2n + r$ vlastních omezení. Řešení takové úlohy při velikých m, n a r, jak to lze v praxi očekávat, je pomocí obecných algoritmů velmi pracné. Naším úkolem v dalším výkladu bude odvodit pro tuto úlohu jednoduchý speciální algoritmus, který je zobecněním algoritmu řešení jednostupňové dopravní úlohy.

9.2 VÝCHOZÍ ŘEŠENÍ

Za předpokladu (9.1) má úloha I, podobně jako jednostupňová dopravní úloha, vždy řešení. Dokážeme to konstruktivně tak, že ukážeme způsob, jak lze řešení vždy nalézt. Sestavme za tím účelem úlohu do tabulky, která je zobecněním obdobné tabulky jednostupňové dopravní úlohy (je to vlastně dvojtabulka, viz tab. 9.4).

Tabulka nepotřebuje vysvětlení. Je v ní vyznačeno, do kterých políček budeme psát jednotlivé proměnné i konstanty. Každá řádka horní části tabulky reprezentuje jedno omezení typu (9.7), každá řádka dolní části tabulky jedno omezení typu (9.10) a každý sloupec reprezentuje dvě omezení, horní část omezení typu (9.8) a dolní část omezení typu (9.9).

Předpokládejme, že úloha není degenerována. Výchozí řešení lze pak zkonstruovat třeba tímto postupem: Začneme s dolní částí tabulky a vyplňujeme ji jako při řešení

---

*) Viz Revue Française de la Récherche Opérationelle, č. 22/1962.

Tabulka 9.4

	M_1	M_2	...	M_n		a_i
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	x_1	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	x_2	a_2
.	.	.	...	.	.	.
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	x_m	a_m
	y_1	y_2	...	y_n		p_k
S_1	d_{11} y_{11}	d_{21} y_{21}	...	d_{n1} y_{n1}		p_1
S_2	d_{12} y_{12}	d_{22} y_{22}	...	d_{n2} y_{n2}		p_2
.	.	.	...	.		.
S_r	d_{1r} y_{1r}	d_{2r} y_{2r}	...	d_{nr} y_{nr}		p_r
b_j	b_1	b_2	...	b_n		

obyčejného dopravního problému. Protože v úloze je $r + 1$ řádků (včetně prostředního řádku s přídatnými proměnnými) a n sloupců, v základním řešení bude $r + n$ obsazených políček opět včetně políček pro přídatné proměnné. Odečteme-li v dalším postupu hodnoty přídatných proměnných y_j od příslušných kapacit meziskladů b_j, dostaneme v horní části tabulky jednostupňový dopravní problém o m řádcích a $n + 1$ sloupcích (včetně sloupce pro fiktivní proměnné x_i). V základním řešení této úlohy bude tedy $m + n$ obsazených políček. Tím jsme však získali přípustné řešení úlohy I s $m + 2n + r$ obsazenými políčky. Počet obsazených políček odpovídá počtu nezávislých omezení (9.7), (9.8), (9.9) a (9.10). V dalším výkladu dokážeme, že je to řešení základní, tj. že vektory koeficientů kladných proměnných tvoří bázi.

Pro ilustraci konstrukce výchozího řešení uvedeme nejdříve příklad.

Příklad 9.2. V tabulce 9.5 jsou uvedeny výchozí údaje problému dopravy od pěti dodavatelů o celkové kapacitě 600 přes pět meziskladů o celkové kapacitě 680 ke čtyřem spotřebitelům s úhrnnými požadavky 544 jednotek.

Tabulka 9.5

Mezisklady Dodavatelé	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	a_i
D_1	12	12	8	13	11	120
D_2	13	9	8	11	8	55
D_3	13	16	10	13	13	160
D_4	10	12	6	7	7	135
D_5	12	14	9	12	12	130
Spotřebitelé						p_k
S_1	16	14	17	15	16	147
S_2	14	13	14	14	15	152
S_3	19	17	17	18	16	150
S_4	18	15	19	19	17	95
b_j	120	130	130	150	150	

Požadavky spotřebitelů jsou tu menší než kapacity meziskladů i dodavatelů, a tak je při hledání výchozího řešení vhodné začít se spodní částí tabulky. Najdeme základní řešení (pokud možno hned dobrou aproximaci dopravy z M_j do S_k bez ohledu na dopravu od dodavatelů). Takové řešení je uvedeno v tab. 9.6:

Tabulka 9.6

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	p_k
S_1	16	14 35	17	15 112	16	147
S_2	14 120	13	14 32	14	15	152
S_3	19	17	17 98	18	16 52	150
S_4	18	15 95	19	19	17	95
S_{fikt}				38	98	
b_j	120	130	130	150	150	

Tabulka 9.7

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	$M_{\text{f kt}}$	a_i
D_1	12	12 104	8 16	13	11		120
D_2	13	9 26	8	11	8 29		55
D_3	13	16	10 104	13	12	56	160
D_4	10	12	6	7 112	7 23		135
D_5	12 120	14	9 10	12	10		130
b_j	120	130	130	112	52		

Tabulka 9.8

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_{fikt}	a_i
D_1	12	12 104	8 16	13	11		120
D_2	13	9 26	8	11	8 29		55
D_3	13	16	10 104	13	13	56	160
D_4	10	12	6	7 112	7 23		135
D_5	12 120	14	9 10	12	12		130
S_{fikt}				38	98		p_k
S_1	16	14 35	17	15 112	16		147
S_2	14 120	13	14 32	14	15		152
S_3	19	17	17 98	18	16 52		150
S_4	18	15 95	19	19	17		95
b_j	120	130	130	150	150		

Vyjdeme z tohoto řešení, najdeme pak výchozí základní řešení první části problému, tj. dopravy z D_i do M_j (opět pokud možno dobrou aproximací). Přitom ovšem už nepočítáme s plnou kapacitou meziskladů, ale pouze s tou jejich částí, která je potřebná k uspokojení spotřebitelských požadavků, tj. v daném případě s kapacitou 112 u M_4 a 52 u M_5. Takové řešení je uvedeno v tab. 9.7. Řešení dílčích úloh v tab. 9.6 a 9.7 dávají výchozí základní řešení naší úlohy. Z praktických důvodů spojujeme řešení do jediné tabulky 9.8.

9.3 STRUKTURA ZÁKLADNÍHO ŘEŠENÍ

Abychom zjistili, zda řešení získané postupným řešením dvou dílčích úloh je základním řešením úlohy I, přiřaďme každému políčku tabulky vektor koeficientů příslušné proměnné. Označme vektory koeficientů proměnné x_{ij} symbolem $\mathbf{a}_{ij}$, vektory koeficientů y_{jk} symbolem $\mathbf{b}_{jk}$, vektory koeficientů x_i symbolem $\mathbf{a}_i$ a vektory koeficientů y_j symbolem $\mathbf{b}_j$. Jsou to vektory o $m + 2n + r$ souřadnicích. Přitom, jak snadno zjistíme ze soustavy rovnic (9.7), (9.8), (9.9) a (9.10), u vektoru $\mathbf{a}_{ij}$ jsou i-tá a $(m + j)$-tá souřadnice jednotky a ostatní jsou nuly. Podobně u vektoru $\mathbf{b}_{jk}$ jsou $(m + n + j)$-tá a $(m + 2n + k)$-tá souřadnice jednotky, ostatní jsou nuly. U vektoru $\mathbf{a}_i$ je pouze i-tá souřadnice jednotka, ostatní jsou nuly. Konečně u vektoru $\mathbf{b}_j$ jsou $(m + j)$-tá a $(m + n + j)$-tá souřadnice jednotky, ostatní jsou nuly:

$$\mathbf{a}_{ij} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m + j \\ \vdots \\ m + 2n + r \end{array} \qquad \mathbf{b}_{jk} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m + n + j \\ \vdots \\ m + 2n + k \\ \vdots \\ m + 2n + r \end{array} \qquad \mathbf{a}_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m + 2n + r \end{array} \qquad \mathbf{b}_j = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m + j \\ \vdots \\ m + n + j \\ \vdots \\ m + 2n + r \end{array}$$

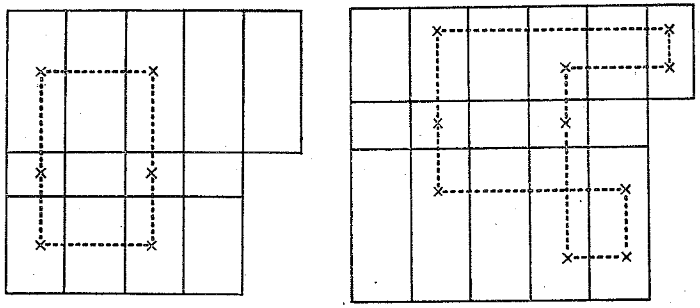
Jak známo, je řešení základním, jestliže soustava vektorů přiřazených obsazeným políčkám (nenulovým proměnným) je lineárně nezávislá. Aby soustava vektorů uvedených typů byla lineárně závislá, k tomu je zřejmě nutno a také stačí, aby táž souřadnice (tj. souřadnice téhož pořadí) byla jednotkovou vždy u dvou vektorů. Mohou zde nastat dva různé případy:

a) Všechny vektory lineárně závislé soustavy jsou přiřazeny pouze políčkám jedné části tabulky (horní nebo dolní).*) To je případ známý z obyčejné dopravní úlohy, kdy políčka přiřazená lineárně závislé soustavě vektorů tvoří uzavřený okruh. Pro rozlišení budeme v tomto případě mluvit o okruhu prvního druhu.

b) Lineárně závislá soustava obsahuje vektory přiřazené políčkám obou částí tabulky. Protože vektory přiřazené políčkám horní části tabulky mohou mít jednotky pouze na prvních $m + n$ místech a vektory přiřazené políčkám dolní části tabulky pouze na posledních $n + r$ místech, může taková soustava být lineárně závislá jedině tehdy, jestliže spolu s vektorem $\mathbf{a}_{ij}$ a $\mathbf{b}_{jk}$ obsahuje též vektor $\mathbf{b}_j$. Vzorem takové lineárně závislé soustavy je např.

$$\mathbf{a}_{ij},\ \mathbf{b}_j,\ \mathbf{b}_{jk},\ \mathbf{b}_{lk},\ \dots,\ \mathbf{b}_{rs},\ \mathbf{b}_r,\ \mathbf{a}_{tr},\ \mathbf{a}_{tu},\ \mathbf{a}_{iu}$$

Že jde o soustavu lineárně závislou, přesvědčíme se snadno, opatříme-li jednotlivé vektory střídavě znaménky + a − a sečteme. Výsledek je nulový vektor. Je dále zřejmé, že políčka, jimž jsou vektory takové soustavy přiřazeny, tvoří opět uzavřený okruh. Vektory, které po sobě následují, jsou totiž vždy po dvou z téže řady (řádky, resp. sloupce) a první a poslední vektor jsou z téže řádky. Zvláštností tohoto okruhu je, že v sloupcích přechodových (tj. tam, kde okruh přechází z jedné části tabulky do druhé) jsou tři obsazená políčka: jedno v horní části tabulky, jedno v dolní části a jedno políčko prostřední, obsahující přídatnou proměnnou y_j (zároveň s vektory $\mathbf{a}_{ij}$ a $\mathbf{b}_{jk}$ patří k lineárně závislé soustavě též vektor $\mathbf{b}_j$). Tyto uzavřené okruhy nazveme okruhy druhého druhu. Vzory uzavřených okruhů tohoto druhu jsou na obr. 9.1.


a)

b)

Obr. 9.1

Jiné možnosti lineární závislosti soustav vektorů koeficientů nejsou.

Poznámka: Je třeba zdůraznit, že v případě, kdy jde o políčka z obou částí tabulky, nazveme uzavřeným okruhem pouze okruh druhého druhu, tj. okruh obsahující v přechodových sloupcích též políčka prostřední řádky. Netvoří tedy např. uzavřený okruh v tab. 9.8 obsazená políčka $\overline{D_5M_1}$, $\overline{D_5M_3}$, $\overline{S_2M_1}$, $\overline{S_2M_3}$.

Z výše uvedeného naopak plyne, že soustava vektorů koeficientů vícerozměrné dopravní úlohy je lineárně nezávislá tehdy, a jen tehdy, jestliže příslušná políčka netvoří uzavřený okruh. Platí tedy také věta:

Řešení vícerozměrné dopravní úlohy je základní tehdy, a jen tehdy, jestliže obsazená políčka netvoří uzavřený okruh.

Postup, jehož jsme použili k nalezení výchozího řešení v předchozím odstavci, nemůže vést k uzavřeným okruhům (dává tedy řešení základní). Plyne to z toho, že každým krokem (tj. obsazením jednotlivého políčka) obsazujeme vždy celou řadu (řádku nebo sloupec), a nemůžeme se tedy vracet k téže řadě.

Protože $m + 2n + r$ lineárně nezávislých vektorů tvoří bázi, plynou z uvedeného výkladu (bereme-li ještě v úvahu možnost jednoznačného vyjádření každého vektoru jako lineární kombinaci vektorů báze) tyto důsledky:

a) Každých $m + 2n + r + 1$ políček obsahuje alespoň jeden uzavřený okruh.

b) Připojíme-li k $m + 2n + r$ obsazeným políčkám nedegenerovaného základního řešení další políčko, je jím jednoznačně určen jeden uzavřený okruh.

Těchto vět použijeme i při zlepšování řešení.

9.4 DUÁLNÍ ÚLOHA

Máme-li základní řešení, je třeba dále zjistit, zda je optimální či nikoli, a v záporném případě zlepšit řešení. Kritérium optimality získáme nejvhodněji, stejně jako u jednostupňového dopravního problému, pomocí vět o dualitě. Za tím účelem zformulujeme nejdříve úlohu duální k úloze I.

Označme duální proměnné přiřazené omezením typu (9.7) symboly u_i, duální proměnné přiřazené omezením typu (9.8) symboly v_j, duální proměnné přiřazené omezením typu (9.9) symboly v'_j a duální proměnné přiřazené omezením (9.10) symboly w_k.

Duální úloha pak zní:

---

*) K horní části tabulky patří pochopitelně též políčka s přídatnými proměnnými x_i, tedy i vektory $\mathbf{a}_i$. Nepočítáme však ani k horní ani k dolní části tabulky políčka přídatných proměnných y_j (tedy ani vektory $\mathbf{b}_j$), které tvoří jakýsi spojovací článek mezi horní a dolní částí tabulky.

Na množině řešení soustavy nerovností

$$u_i + v_j \leqq c_{ij} \tag{9.11}$$

$$u_i \leqq 0 \tag{9.12}$$

$$v_j + v'_j \leqq 0 \tag{9.13}$$

$$v'_j + w_k \leqq d_{jk} \tag{9.14}$$

nalézt maximum lineární formy

$$\sum_i a_i u_i + \sum_j b_j(v_j + v'_j) + \sum_k p_k w_k \tag{9.15}$$

Podle známých vět o dualitě platí pro optimální řešení, a jen pro optimální řešení dvojice duálních úloh, že omezení duální úlohy odpovídající základní proměnné je splněno jako rovnice. V našem případě tedy platí pro optimální, a jen pro optimální řešení, že

a) $u_i + v_j = c_{ij}$, jestliže x_{ij} je základní proměnná,

b) $u_i = 0$, jestliže x_i je základní proměnná, tj. jestliže se kapacity dodavatele D_i nevyužije,

c) $v_j + v'_j = 0$, jestliže y_j je základní proměnná, tj. jestliže se kapacity meziskladu M_j nevyužije,

d) $v'_j + w_k = d_{jk}$, jestliže y_{jk} je základní proměnná.

Na základě toho lze nalézt kritérium optimality takto:

Přiřadíme jednotlivým řádkám horní části tab. 9.4 čísla u_i, jednotlivým sloupcům horní části tabulky čísla v_j, řádkám dolní části tabulky čísla w_k a sloupcům dolní části tabulky čísla v'_j, a to tímto způsobem:

1. jestliže je i-té řádkové omezení splněno jako ostrá nerovnost, tj. platí-li v daném řešení $x_i > 0$, položíme $u_i = 0$;
2. jestliže j-té políčko v i-té řádce horní části tabulky je obsazeno, položíme $u_i + v_j = c_{ij}$;
3. jestliže j-té sloupcové omezení je splněno jako ostrá nerovnost, položíme $v_j + v'_j = 0$ (nebo $v'_j = -v_j$);
4. jestliže j-té políčko k-té řádky dolní části tabulky je obsazeno, položíme $v'_j + w_k = d_{jk}$.

Protože základních proměnných (počítaje v to i event. přídatné proměnné x_i, resp. y_j), a tedy i rovnic uvedených pod (9.1) až (9.6) je $m + 2n + r$, je možno z nich $m + 2n + r$ čísel u_i, v_j a w_k jednoznačně určit.

Splňují-li takto vypočtená čísla všechny nerovnosti (9.11) až (9.14), máme řešení duální úlohy, a tedy i optimální řešení. Není-li aspoň jedna z uvedených nerovností splněna, není řešení optimální.

Výpočet čísel u_i, v_j, v'_j, w_k je možno stejně jako u jednostupňového dopravního problému provést v pomocných řádkách a v pomocném sloupci na okrajích tabulky (na rozdíl od jednostupňového dopravního problému nelze však zde libovolně dosazovat nuly za některé z těchto čísel, neboť jsou určena jednoznačně). Rovněž levé strany nerovností (9.11) až (9.14) píšeme přímo do prázdných políček jako u jednostupňového dopravního problému. Pro příklad 9.2 je výpočet proveden v tab. 9.9.

Tabulka 9.9

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_{fikt}		
v_j	13	14	10	13	13		a_i	u_i
D_1	12	12 + 104	8 16 —	13	11		120	—2
D_2	13	9 26	8	11	8 29 +		55	—5
D_3	13	16	10 104	13	13	56	160	0
D_4	10	12	6	7 112	7 23		135	—6
D_5	12 120 —	14	9 10 +	12	12		130	—1
S_{fikt}	+			38	98 —		p_k	w_k
S_1	16	14 35	17	15 112	16		147	28
S_2	14 120 —	13	14 + 32	14	15		152	26
S_3	19	17	17 98	18	16 52 +		150	29
S_4	18	15 95	19	19	17		95	29
b_j	120	130	130	150	150			
v'_j	—12	—14	—12	—13	—13			

Postup výpočtů v tab. 9.9 byl tento:

Dosadili jsme $u_3 = 0$, protože $x_3 = 56 > 0$ (tj. kapacity třetího dodavatele není využito). Z toho pak bylo možno všechna u_i a v_j spočítat jako u jednostupňového dopravního problému. Protože $y_4 > 0$ a $y_5 > 0$ (tj. kapacit čtvrtého a pátého meziskladu není využito), dosadíme $v'_4 = -v_4 = -13$ a $v'_5 = -v_5 = -13$. Ostatní v'_j a w_k lze pak opět spočítat stejným postupem jako u jednostupňového dopravního problému.

Získané řešení zřejmě není optimální. Podmínky optimality jsou porušeny na jediném místě, a to $v_1 + v_1' = 13 - 12 > 0$.

9.5 ZLEPŠOVÁNÍ ŘEŠENÍ

Není-li řešení optimální, lze přejít na nové řešení podobným způsobem jako u jednostupňového dopravního problému, tj. tím, že se obsadí některé z políček, kde je podmínka optimality porušena a mění patřičně hodnoty ve vrcholech uzavřeného okruhu přiřazeného tomuto políčku. Konkrétněji, jsou-li porušeny podmínky (9.11) nebo (9.14), obsadíme příslušné vnitřní políčko horní, resp. dolní části tabulky, je-li porušena některá podmínka (9.12), obsadíme příslušné políčko ve sloupci $M_{\text{fikt.}}$, a je-li porušena některá z podmínek (9.13), obsadíme příslušné políčko v řádce $S_{\text{fikt.}}$

Nepatrný rozdíl proti jednostupňovému dopravnímu problému nastává v případě, že jde o uzavřený okruh druhého druhu, kdy k vrcholům okruhu musíme počítat i políčka, v nichž uzavřený okruh protíná prostřední řádku.

Po konečném počtu kroků dospíváme nutně k optimálnímu řešení.

V našem příkladě obsadíme políčka $\overline{S_{\text{fikt.}}M_1}$ (tj. v novém řešení nebude kapacity M_1 plně využito). Příslušný uzavřený okruh je v tab. 9.9 zakreslen. Nové řešení je uvedeno v tab. 9.10. Řešení v tab. 9.10 ještě není optimální. V tabulce je zakreslen

Tabulka 9.10

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_{fikt}		
v_j	13	15	10	14	14		a_i	u_i
D_1	12	12 120	8	13	11		120	—3
D_2	13	9 10	8	11	8 45		55	—6
D_3	13	16	10 104 —	13 +	13	56	160	0
D_4	10	12	6	7 112—	7 + 23		135	—7
D_5	12 104 —	14	9 26+	12	12		130	—1
S_{fikt}	16 +			38	— 82		p_k	w_k
S_1	16	14 35	17	15 112	16		147	29
S_2	14 104—	13	14 48 +	14	15		152	27
S_3	19	17	17 82—	18	16 +68		150	30
S_4	18	15 95	19	19	17		95	30
b_j	120	130	130	150	150			
v_j'	—13	—15	—13	—14	—14			

Tabulka 9.11

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_{fikt}		
v_j	13	14	10	13	13		a_i	u_i
D_1	12	12 — 120	8 +	13	11		120	—2
D_2	13	9 +10	8	11	8 45 —		55	—5
D_3	13	16	10 22—	13 82 +	13	56	160	0
D_4	10	12	6	7 30—	7 105+		135	—6
D_5	12 22	14	9 108	12	12		130	—1
S_{fikt}	98			38	0		p_k	w_k
S_1	16	14 35	17	15 112	16		147	28
S_2	14 22	13	14 130	14	15		152	27
S_3	19	17	17	18	16 150		150	29
S_4	18	15 95	19	19	17		95	29
b_j	120	130	130	150	150			
v_j'	—13	—14	—13	—13	—13			

uzavřený okruh přiřazený políčku $\overline{D_3M_4}$. Obsadíme-li toto políčko, dostaneme nové řešení uvedené v tab. 9.11.

Řešení v tab. 9.11 je degenerované (přechodem na nové řešení se totiž uvolnila dvě políčka). Doplníme tedy nejdříve počet obsazených políček do plného počtu. V tab. 9.11 je to provedeno obsazení políčka $\overline{S_{\text{fikt.}}M_5}$.

Řešení opět není optimální. V tab. 9.11 je zakreslen uzavřený okruh přiřazený políčku $\overline{D_1M_3}$. Po dalších dvou krocích získáváme optimální řešení.

9.6 ZOBECNĚNÝ DISTRIBUČNÍ MODEL

Řada praktických úloh vede k matematickému modelu velmi podobnému modelu dopravní úlohy, s tím rozdílem, že v řádkových nebo sloupcových omezeních jsou koeficienty jiné než jednotky. Je to tzv. zobecněný distribuční model, k jehož řešení lze použít jednoduššího algoritmu, než je simplexová metoda nebo jiná obecná metoda.

Nejčastěji se setkáváme s touto obměnou zobecněné distribuční úlohy:
Minimalizovat lineární formu

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (9.16)$$

při podmínkách

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i \qquad (9.17)$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij}x_{ij} = b_j \qquad (9.18)$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (9.19)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

V dalším výkladu nazveme čísla k_{ij} pro stručnost koeficienty výkonnosti podle typických příkladů, které vedou k zobecněnému distribučnímu modelu. Vedle matice sazeb $[c_{ij}]$ je tedy v zobecněných distribučních úlohách zadána i matice výkonností $[k_{ij}]$.

Příklad 9.3. Máme tři stroje na plnění lahví. Plní se láhve o obsahu 1 l, 0,7 l, 0,5 l a 0,3 l. Výkony strojů v 1 000 lahví/h jsou uvedeny v tab. 9.12a, kde jsou zároveň i kapacity jednotlivých strojů ve strojových hodinách a plán plnění lahví v 1 000 kusů. V tab. 9.12b jsou uvedeny náklady na provoz strojů v Kčs/h.

Tabulka 9.12a

Stroj č.	Výkon v 1 000 lahví/h				K dispozici strojových hodin
	1 l	0,7 l	0,5 l	0,3 l	
I II III	0,5 0,9 2,0	0,6 1,2 2,2	0,8 1,5 3,0	1,0 1,8 3,5	400 240 450
Plán v 1 000 lahví	200	320	80	1 200	

Tabulka 9.12b

Stroj. č.	Náklady na provoz v Kčs/h při plnění lahví			
	1 l	0,7 l	0,5 l	0,3 l
I II III	15 20 25	15 22 25	18 23 26	18 24 26

Úkolem je splnit plán s minimálními náklady. Lahve označme podle druhů pořadovými čísly 1, 2, 3 a 4 a označme symbolem x_{ij} počet hodin, po které i-tý stroj bude plnit lahve j-tého druhu. Pak zřejmě půjde o tuto úlohu:

Minimalizovat

$$z = 15x_{11} + 15x_{12} + \ldots + 26x_{34}$$

při podmínkách

$$\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & & & & & & & & & & \leqq & 400 \\
& & & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & & & & & & & \leqq & 240 \\
& & & & & & & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & & & & \leqq & 450 \\
0{,}5x_{11} & & & & + 0{,}9x_{21} & & & & + 2x_{31} & & & & = & 200 \\
& 0{,}6x_{12} & & & & + 1{,}2x_{22} & & & & + 2{,}2x_{32} & & & = & 320 \\
& & 0{,}8x_{13} & & & & + 1{,}5x_{23} & & & & + 3x_{33} & & = & 80 \\
& & & x_{14} & & & & + 1{,}8x_{24} & & & & + 3{,}5x_{34} & = & 1\,200
\end{array}$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4)$$

Podobně jako dopravní úlohy sestavujeme i tyto úlohy do tabulek o m řádcích a n sloupcích, přičemž do každého políčka vpisujeme kromě „sazby" c_{ij} též koeficienty k_{ij} (budeme je psát vlevo nahoře). Příklad sestavíme do této tabulky:

Tabulka 9.13

Stroje / Výrobky	1	2	3	4	Kapacity
1	0,5 15	0,6 15	0,8 18	1 18	400
2	0,9 20	1,2 22	1,5 23	1,8 24	240
3	2 25	2,2 25	3 26	3,5 26	450
Požadavky	200	320	80	1 200	

Všimněme si některých odlišností zobecněného distribučního modelu proti jednostupňovému dopravnímu modelu.

Předně zde není tak jednoduchá konstrukce výchozího řešení. Navíc tu zřejmě řešení vůbec nemusí existovat.

U jednostupňové dopravní úlohy bylo možno nevyrovnaný problém (tj. problém, kde součet kapacit se nerovnal součtu požadavků) převést zařazením fiktivního spotřebitele nebo fiktivního dodavatele na vyrovnaný problém. U zobecněného distribučního problému závisí velikost přebytku kapacit, resp. nedostatku kapacit, na způsobu přiřazení „dodavatelů" ke „spotřebitelům", takže třeba v našem příkladě nelze vyrovnat kapacity a požadavky zavedením fiktivního výrobku s určitým plánem výroby.

Konečně zobecněný distribuční model má obecně $m + n$ nezávislých omezení. Proto každá báze obsahuje $m + n$ vektorů (tolik, kolik je součet řádků a sloupců). Jinými slovy, u vyrovnaného problému (kde všechna omezení jsou rovnice) má základní řešení $m + n$ obsazených políček čili nutně obsahuje uzavřený okruh.

Uvedené odlišnosti komplikují řešení zobecněné distribuční úlohy. Algoritmus pro řešení zobecněné distribuční úlohy lze odvodit rovněž z vět o dualitě. Označíme-li duální proměnnou přiřazenou i-té řádce symbolem u_i a duální proměnnou přiřazenou j-tému sloupci symbolem v_j, pak úloha duální k (9.16) až (9.19) zní: Maximalizovat

$$f = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad (9.20)$$

při podmínkách

$$-u_i + k_{ij}v_j \leqq c_{ij}\text{*)} \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \qquad (9.21)$$

$$u_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \qquad (9.22)$$

Jestliže je přitom v úloze (9.16) až (9.19) i-té řádkové omezení splněno jako ostrá nerovnost, tj. platí-li

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i,$$

pak pro příslušnou duální proměnnou platí

$$u_i = 0$$

Jestliže je dále x_{ij} základní proměnná, tj. v případě nedegenerované úlohy

$$x_{ij} > 0,$$

je příslušné duální omezení splněno jako rovnice, tj.

$$-u_i + k_{ij}v_j = c_{ij}$$

9.7 STRUKTURA ZÁKLADNÍHO ŘEŠENÍ

Podobně jako u jednostupňové dopravní úlohy je i zde důležité určit rozložení obsazených políček v základním řešení. Vyjděme za tím účelem z matice koeficientů úlohy (s přídatnými proměnnými). Pro jednoduchost je uvedena matice úlohy s třemi řádkami a třemi sloupci

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{10} & \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{20} & \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{30} \\
\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ k_{11} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. &
\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{12} \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{13} \end{matrix} &
\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k_{21} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ k_{22} \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{23} \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ k_{31} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ k_{32} \\ 0 \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ k_{33} \end{matrix} &
\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]
\end{array}$$

Podobně jako u jednostupňové dopravní úlohy lze jednotlivé sloupce této matice přiřadit jednotlivým políčkám tabulky, obdobné tab. 9.13. Vektor $\mathbf{a}_{ij}$ přiřazený j-tému políčku i-té řádky má podobně jako u jednostupňové dopravní úlohy na

---

*) Záporné znaménko u duálních proměnných u_i je dáno tím, že v původní úloze, která je minimalizační, je třeba, aby se změnil smysl nerovností, řádková omezení násobit číslem (—1).

i-tém místě jednotku, avšak $(m + j)$-tá souřadnice je k_{ij}. Ostatní souřadnice má nulové. Vektor $\mathbf{a}_{i0}$ přiřazený i-tému políčku sloupce pro přídatné proměnné má pouze jednu souřadnici jednotkovou, a to na i-tém místě; ostatní souřadnice má nulové.

Nyní budeme opět zkoumat, kdy je soustava takových vektorů lineárně závislá. Je zřejmé, že lineárně závislá soustava těchto vektorů musí podobně jako u jednostupňové dopravní úlohy obsahovat uzavřený okruh (jinak by se nenulová lineární kombinace těchto vektorů nemohla anulovat). Tato podmínka však zde už není dostačující. Vezměme například jednoduchý okruh

$$\mathbf{a}_{11},\ \mathbf{a}_{12},\ \mathbf{a}_{21},\ \mathbf{a}_{22} \tag{9.23}$$

Aby soustava těchto čtyř vektorů byla lineárně závislá, musí platit

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_1 . 1 & + \alpha_2 . 1 & & & = 0 \\
\alpha_1 . k_{11} & & + \alpha_3 . k_{21} & & = 0 \\
 & \alpha_2 . k_{12} & & + \alpha_4 . k_{22} & = 0 \\
 & & \alpha_3 . 1 & + \alpha_4 . 1 & = 0
\end{array} \tag{9.24}$$

Máme zde soustavu čtyř homogenních rovnic pro čtyři neznámé koeficienty α_1, α_2, α_3, α_4, která obecně nemá netriviální řešení. Snadno se dá dokázat, že uvedená soustava má netriviální řešení tehdy, a jen tehdy, jestliže platí

$$k_{11} : k_{21} = k_{12} : k_{22}$$

Jedině v tomto případě je soustava $\mathbf{a}_{11}$, $\mathbf{a}_{12}$, $\mathbf{a}_{21}$, $\mathbf{a}_{22}$ lineárně závislá.*) Nepřihlížíme-li k tomuto zvláštnímu případu, je uvedená soustava lineárně nezávislá. Abychom získali soustavu lineárně závislou, musíme zřejmě doplnit soustavu (9.24) o další vektory tak, aby v ní bylo více neznámých koeficientů než rovnic. Lze to provést dvojím způsobem:

a) K soustavě (9.24) přidáme jeden z vektorů $\mathbf{a}_{10}$, $\mathbf{a}_{20}$ (tj. k příslušným políčkám přidáme políčko přídatné proměnné v jedné z řádek uzavřeného okruhu). Přidáme-li např. $\mathbf{a}_{10}$, pak soustava rovnic (9.24) se změní na soustavu

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha_1 . 1 & + \alpha_2 . 1 & & & + \alpha_5 . 1 & = 0 \\
\alpha_1 . k_{11} & & + \alpha_3 . k_{21} & & & = 0 \\
 & \alpha_2 . k_{12} & & + \alpha_4 . k_{22} & & = 0 \\
 & & \alpha_3 . 1 & + \alpha_4 . 1 & & = 0
\end{array} \tag{9.25}$$

To je soustava čtyř homogenních rovnic o pěti neznámých, která má vždy netriviální řešení.

---

*) Platí-li přímá úměrnost mezi koeficienty k_{ij} jednotlivých řádků obecně, pak lze řešení zobecněného distribučního modelu zredukovat na řešení jednostupňové dopravní úlohy.

b) Přidáme další vektory $\mathbf{a}_{ij}$ $(j \neq 0)$. V tomto případě musí i přidané vektory tvořit uzavřený okruh (jinak se nemůže lineární kombinace celé soustavy anulovat), tj. musíme mít dva uzavřené okruhy. Dále rozšířená soustava rovnic (stejně i v případě a) musí obsahovat méně rovnic než neznámých koeficientů. Toho je možno dosáhnout tak, že oba uzavřené okruhy budou rozloženy v menším počtu řad, než mají dohromady stran. Jinými slovy, oba uzavřené okruhy musí mít aspoň jednu stranu ve společné řadě.

Například soustava

$$\mathbf{a}_{11},\ \mathbf{a}_{12},\ \mathbf{a}_{21},\ \mathbf{a}_{22},\ \mathbf{a}_{23},\ \mathbf{a}_{32},\ \mathbf{a}_{33}$$

je lineárně závislá. Je to zřejmě z toho, že soustava šesti rovnic o 7 neznámých

$$\begin{array}{lllllllll}
\alpha_1 . 1 & + \alpha_2 . 1 & & & & & & & = 0 \\
\alpha_1 . k_{11} & & + \alpha_3 . k_{21} & & & & & & = 0 \\
 & \alpha_2 . k_{12} & & + \alpha_4 . k_{22} + & & \alpha_6 . k_{32} & & & = 0 \\
 & & \alpha_3 . 1 & + \alpha_4 . 1 & + \alpha_5 . 1 & & & & = 0 \\
 & & & & \alpha_5 . k_{23} & & + \alpha_7 . k_{33} & & = 0 \\
 & & & & & \alpha_6 . 1 & + \alpha_7 . 1 & & = 0
\end{array}$$

má vždy netriviální řešení.

To, co bylo řečeno o jednoduchém okruhu (9.23), se dá zřejmě zobecnit. Nepřihlížíme-li k zvláštním případům, platí:

Vektory koeficientů zobecněné distribuční úlohy jsou lineárně závislé tehdy, a jen tehdy, jestliže příslušná políčka obsahují:

a) buď uzavřený okruh, jehož jedna vodorovná strana je prodloužena do sloupce pro přídatné proměnné (stručně budeme v tomto případě mluvit o prodlouženém okruhu),

b) anebo dva uzavřené okruhy, spojené tak, že mají aspoň jednu stranu ve společné řadě (stručně nazveme tento případ dvojitým okruhem).

Vzory takových konfigurací políček jsou uvedeny na obr. 9.2.

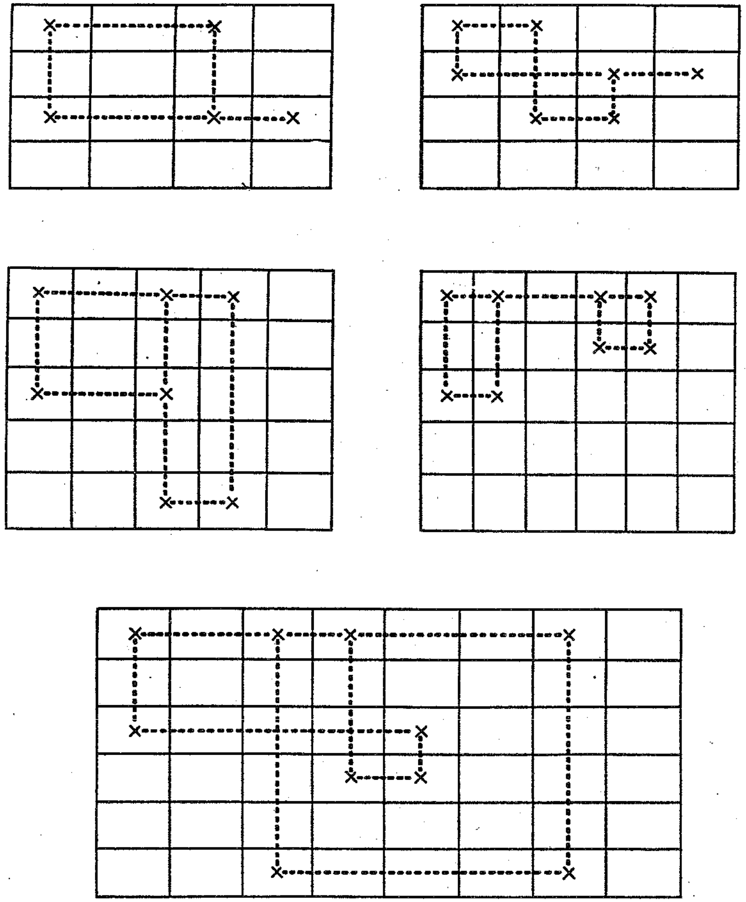
Z uvedeného výkladu plyne, že řešení zobecněné distribuční úlohy je řešením základním, jestliže obsazená políčka netvoří ani prodloužený okruh, ani dvojitý okruh.

Dále je zřejmé, že obsazujeme-li políčka způsobem uvedeným v čl. 9.8, tj. dosazujeme-li do obsazeného políčka vždy maximálně možnou hodnotu, nemůže vzniknout ani jeden z uvedených případů. Řešení takto získané bude tedy řešením základním.

Protože maximální počet lineárně nezávislých vektorů koeficientů je $m + n$, musí $m + n + 1$ políček nutně obsahovat buď prodloužený okruh, nebo dvojitý okruh.

Máme-li základní řešení o $m + n$ obsazených políčkách (tedy nedegenerované), pak z jednoznačnosti vyjádření vektorů v bázi plyne, že každým dalším políčkem je jednoznačně určen buď jeden prodloužený okruh, nebo dvojitý okruh.

Těchto poznatků použijeme v dalším výkladu při řešení zobecněné distribuční úlohy. V dalším výkladu budeme předpokládat, že máme jedno základní řešení, a to nedegenerované. (V případě, že je řešení degenerované, můžeme počet obsazených políček doplnit na $m + n$ dosazením nul tak, aby nevznikl ani prodloužený, ani dvojitý okruh, a považovat tato políčka rovněž za obsazená.)



Obr. 9.2

9.8 Algoritmus řešení zobecněné distribuční úlohy

Předpokládejme, že máme základní řešení úlohy. Přiřazujeme jednotlivým řádkům úlohy řádková čísla u_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) a jednotlivým sloupcům čísla sloupcová v_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$) podle těchto pravidel:

1. Je-li řádkové omezení splněno jako nerovnost, tj. jestliže

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i,$$

přiřazujeme této řádce 0, tedy

$$u_i = 0 \tag{9.26}$$

2. Jestliže je políčko $\overline{ij}$ obsazeno, tj. jestliže $x_{ij} > 0$, platí

$$-u_i + k_{ij} v_j = c_{ij} \tag{9.27}$$

Rovnic (9.26) a (9.27) je v případě nedegenerovaného řešení přesně $m + n$ a je z nich možno řádková a sloupcová čísla jednoznačně vypočítat.*)

Splňují-li tato čísla podmínky (9.21) a (9.22), pak máme zřejmě přípustné řešení duálního problému, a tím i optimální řešení obou úloh. Není-li některá z podmínek (9.21) a (9.22) splněna, je možno přejít na nové, lepší řešení podobným způsobem jako u jednostupňové dopravní úlohy, a to:

a) Jestliže pro některé volné políčko platí

$$-u_i + k_{ij} v_j > c_{ij},$$

pak obsadíme toto políčko při současné úpravě obsazených políček tak, aby řešení zůstalo přípustné a základní.

b) Vychází-li u některé plně obsazené řádky (tj. u takové, kde řádkové omezení je splněno jako rovnice)

$$u_i < 0,$$

snížíme součet této řádky, tj. zařadíme do řešení příslušnou přídatnou proměnnou s provedením patřičných změn v obsazených políčkách tak, aby řešení zůstalo přípustným a základním.

Konkrétní provedení výpočtů vysvětlíme nejdříve na našem příkladě 9.3.

---

*) Toto tvrzení plyne z toho, že matice koeficientů této soustavy rovnic je transponovanou bází.

Z praktických důvodů je vhodné tabulku rozšířit o $(m + 1)$-ní sloupec (ovšem jedině tehdy, jestliže řádková omezení jsou nerovnosti), kam vepíšeme hodnoty přídatných proměnných u řádkových omezení, tj. rozdíly

$$a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Musíme ovšem pamatovat, že tomuto sloupci neodpovídá žádné sloupcové omezení jako u dopravního problému. Počet omezení zůstává $m + n$, a proto v základním řešení (odmyslíme-li si zatím případy degenerace) bude přesně $m + n$ obsazených políček, z nichž některá ovšem mohou být v posledním sloupci pro přídatné proměnné.

Vhodné výchozí řešení (tj. dosti blízké optimu) můžeme dostat tímto postupem:*)

V jednotlivých políčkách určíme podíl c_{ij}/k_{ij}. Tento podíl určuje vlastně náklady na jednotku výrobku. Obsazujeme pak přednostně (a to největšími možnými čísly) políčka s nejmenšími c_{ij}/k_{ij} (tab. 9.14).

Tabulka 9.14

Stroje	Výrobky					Kapacity	u_i
	1	2	3	4			
1	0,5 15 $\frac{1\,277}{7}$	0,6 15	0,8 18	1,0 10	$\frac{1\,523}{7}$	400	0
2	0,9 20 $\frac{7\,615}{63}$	1,2 22 $\frac{7\,505}{63}$	1,5 23	1,8 24		240	7
3	2,0 25	2,2 25 $\frac{1\,690}{21}$	3,0 26 $\frac{80}{3}$	3,5 26 $\frac{2\,400}{7}$		450	169/6
Požadavky	200	320	80	1 200			
v_j	30	145/6	325/18	325/21			

V našem příkladě je podíl c_{ij}/k_{ij} nejmenší v políčku $\overline{3-4}$, proto jsme toto políčko obsadili 2 400/7 jednotkami. Tím je zároveň celý čtvrtý sloupec obsazen.

V dalším pořadí obsazujeme políčko $\overline{3-3}$, a to 80/3 jednotkami. Tím je také celý třetí sloupec obsazen.

Další v pořadí podle velikosti c_{ij}/k_{ij} je políčko $\overline{3-2}$. Můžeme sem dosadit zbývající volnou kapacitu třetí řádky, tj. 1 690/21 jednotek. Tím je třetí řádka úplně obsazena.

---

*) K otázce nalezení výchozího řešení se ještě vrátíme na konci tohoto článku.

Z ostatních políček, která ještě přicházejí v úvahu, je c_{ij}/k_{ij} nejmenší v políčku $\overline{2-2}$. Dosadíme tam tolik, aby druhé sloupcové omezení bylo splněno, tj.

$$\left(320 - \frac{2{,}2 \,.\, 1\,690}{21}\right) : 1{,}2 = \frac{7\,505}{63}$$

Nyní již přicházejí v úvahu pouze první dvě políčka prvního sloupce. Obsadíme nejdříve druhé políčko; můžeme tam dosadit zbytek kapacity druhé řádky, tj.

$$x_{21} = 240 - \frac{7\,505}{63} = \frac{7\,615}{63}$$

Abychom splnili první sloupcové omezení, dosadíme ještě

$$x_{11} = \left(200 - \frac{0{,}9 \,.\, 7\,615}{63}\right) : 0{,}5 = \frac{1\,277}{7}.$$

Tím jsou všechna sloupcová omezení splněna. Kapacita prvního stroje zůstává přitom nevyužita, a to hodnotou

$$400 - \frac{1\,277}{7} = \frac{1\,523}{7},$$

což vepíšeme do prvního políčka pátého sloupce. Tím jsme získali výchozí základní řešení (viz tab. 9.14).

Výpočet řádkových a sloupcových čísel je v daném příkladě poměrně jednoduchý. Jedno řádkové omezení, totiž první, je splněno jako nerovnost. Můžeme tedy dosadit $u_i = 0$ a ostatní čísla vypočítat postupně pomocí rovnic typu (9.27). Podle šesti obsazených políček jsou to rovnice

$$\begin{aligned}
-u_1 + k_{11}v_1 &= c_{11}\\
-u_2 + k_{21}v_1 &= c_{21}\\
-u_2 + k_{22}v_2 &= c_{22}\\
-u_3 + k_{32}v_2 &= c_{32}\\
-u_3 + k_{33}v_3 &= c_{33}\\
-u_3 + k_{34}v_4 &= c_{34}
\end{aligned}$$

Z nich plyne postupně

$$v_1 = 30, \quad u_2 = 7, \quad v_2 = 145/6, \quad u_3 = 169/6,$$
$$v_3 = \frac{325}{18}, \quad v_4 = \frac{325}{21}$$

Tato čísla jsou vepsána na okrajích naší tabulky.

Spočteme-li nyní pro volná políčka výrazy $-u_i + k_{ij}v_j$ (můžeme je rovněž vepsat do jednotlivých políček, např. vlevo dole), dostaneme pro políčko $\overline{3-1}$ výsledek

$$-u_3 + k_{31}v_1 = -\frac{169}{6} + 2 . 30 = \frac{191}{6} > 25$$

To znamená, že uvedené řešení není optimální. Lze je zlepšit obsazením políčka $\overline{3-1}$.

Nyní jde o to, jak toto políčko obsadit. Uvažujeme takto:

Dosadíme $x_{31} = t$, kde t je zatím neurčené kladné číslo. Aby třetí řádkové omezení zůstalo zachováno, musíme provést patřičné změny v obsazených políčkách třetí řádky. Protože ve třetím a čtvrtém sloupci je pouze po jednom obsazeném políčku, nemůžeme u nich nic měnit, nechceme-li porušit příslušná sloupcová omezení. Zbývá tedy jediná možnost, totiž odečíst t v políčku $\overline{3-2}$. V novém řešení tedy

$$x_{32} = \frac{1\,690}{21} - t$$

Tuto změnu musíme promítnout do políčka $\overline{2-2}$ tak, aby zůstalo zachováno druhé sloupcové omezení. Musíme tam připočíst číslo t_1, takové, aby

$$1{,}2t_1 - 2{,}2t = 0,$$

tj.

$$t_1 = \frac{11}{6}t$$

Jinými slovy, v novém řešení bude

$$x_{22} = \frac{7\,505}{63} + \frac{11}{6}t$$

Nemá-li být porušeno druhé řádkové omezení, musí ovšem zároveň platit

$$x_{21} = \frac{7\,615}{63} - \frac{11}{6}t$$

Zbývá ještě vyrovnat první sloupcové omezení. Připočteme za tím účelem k x_{11} číslo t_2, takové, aby platilo

$$0{,}5t_2 - 0{,}9\frac{11}{6}t + 2t = 0,$$

tj.

$$t_2 = -0{,}7t,$$

tedy

$$x_{11} = \frac{1\,277}{7} - 0{,}7t$$

Zároveň s tím vzroste nevyužitá kapacita prvního stroje (tj. přídatná proměnná v první řádce) o $0{,}7t$, a to na

$$\frac{1\,523}{7} + 0{,}7t$$

Aby nové řešení zůstalo přípustným, musí zřejmě platit

$$\frac{1\,690}{21} - t \geqq 0,$$

$$\frac{7\,615}{63} - \frac{11}{6}t \geqq 0$$

a

$$\frac{1\,277}{7} - 0{,}7t \geqq 0$$

Z těchto tří nerovností je omezující druhá. Dosadíme-li právě

$$t = \frac{7\,615}{63} . \frac{6}{11} = \frac{15\,320}{231},$$

pak

$$x_{21} = 0;$$

dostaneme tak nové základní řešení uvedené v tab. 9.15.

Tabulka 9.15

Stroje	Výrobky					Kapacity	u_i
	1	2	3	4			
1	0,5 15 $\frac{31\,480}{231}$	0,6 15	0,8 18	1,0 10	$\frac{60\,920}{231}$	400	0
2	0,9 20	1,2 22 240	1,5 23	1,8 24		240	$\frac{118}{11}$
3	2,0 25 $\frac{15\,230}{231}$	2,2 25 $\frac{160}{11}$	3,0 26 $\frac{80}{3}$	3,5 26 $\frac{2\,400}{7}$		450	35
Požadavky	200	320	80	1 200			
v_j	30	$\frac{300}{11}$	$\frac{61}{3}$	$\frac{122}{7}$			

U nového řešení můžeme opakovat stejným způsobem jako u předchozího výpočet řádkových a sloupcových čísel (v tabulce jsou již napsána). Vypočteme-li na jejich základě pro volná políčka veličiny $-u_i + k_{ij}v_j$, zjistíme, že toto řešení je již optimální.

Ve většině praktických úloh bude řešení stejně jednoduché jako v uvedeném příkladě. Pro úplnost je však třeba uvést, že obecně mohou nastat některé komplikace, a to:

a) v některých případech není tak snadné nalézt výchozí řešení, navíc nelze vždy na první pohled rozhodnout, zda úloha má řešení;

b) v případech, kdy řešení obsahuje uzavřené okruhy, je poněkud složitější výpočet řádkových a sloupcových čísel i výpočet nového řešení.

Pokud jde o základní řešení, je možno v případech, kdy nenajdeme bezprostředně přípustné výchozí řešení, postupovat dvěma způsoby:

a1) Vycházíme z nepřípustného řešení, tj. překročíme v některé řádce kapacitu (a dosadíme za příslušnou přídatnou proměnnou záporné číslo). Jako pomocnou úlohu minimalizujeme pak v první fázi součet obsazených políček v řádce, kde je překročena kapacita. Vyjde-li minimum stále ještě větší než kapacita příslušné řádky, nemá zřejmě úloha přípustné řešení. Není-li minimum větší než příslušná kapacita, máme přípustné řešení a můžeme přistoupit k optimalizaci původní úlohy.

a2) Můžeme použít metody pomocných proměnných, kterou pro daný případ přizpůsobujeme tak, že přidáme celou pomocnou $(m + 1)$-ní řádku. Do všech políček této řádky dosazujeme $k_{m+1,j} = 1$ a přisuzujeme této řádce kapacitu

$$a_{m+1} > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Další postup je pak obdobný jako při použití pomocných proměnných u simplexové metody.

Příklad 9.4. Pro ilustraci obou metod použijeme příkladu:

Nechť je dán distribuční model s údaji podle tab. 9.16.

Tabulka 9.16

Stroje	Výrobky			Kapacity
	A	*B*	*C*	
1	4 8	6 15	8 12	200
2	5 15	8 8	12 10	240
3	10 10	15 5	20 8	400
Požadavky	3 500	2 400	2 000	

Chceme-li zde nalézt vhodné výchozí řešení, obsadíme především druhé a třetí políčko poslední řádky. Pak ale nemůžeme při daných kapacitách splnit požadavek na výrobek *A*. Chceme-li tento požadavek formálně přece jen splnit, dosadíme do některého z políček prvního sloupce více než připouští příslušné řádkové omezení. Aby řádkové omezení bylo splněno, musí být příslušná přídatná proměnná záporné číslo. Dostaneme tedy nepřípustné řešení. V našem příkladě dostaneme například toto řešení (tab. 9.17).

Tabulka 9.17

	A	*B*	*C*		Kapacity
1	4 8 200	6 15	8 12		200
2	5 15 240	8 8	12 10		240
3	10 10 150	15 5 160	20 8 100	—10	400
Požadavky	3 500	2 400	2 000		

Nepřípustnost v našem případě je v třetí řádce. Řešíme proto nejdříve pomocnou úlohu, v níž minimalizujeme

$$z'' = x_{31} + x_{32} + x_{33}$$

V pomocné úloze předpokládáme tedy, že

$$c''_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2,; j = 1, 2, 3)$$

a

$$c''_{3j} = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Přepíšeme znovu řešení v té formě, jak ukazuje tab. 9.18.

V tabulce jsou hned vypočtena řádková a sloupcová čísla, a to tak, že třetí řádce je přiřazeno $u_3 = 0$ (neboť třetí řádkové omezení je splněno jako ostrá nerovnost) a ostatní čísla jsou pak vypočtena běžným způsobem. Ve volných políčkách jsou již uvedena i čísla $-u_i + k_{ij}v_j$.

Vidíme z nich, že je v dalším kroku možno s výhodou obsadit druhé nebo třetí políčko druhé řádky. Obsaďme třeba třetí políčko a dosaďme

$$x_{23} = t$$

Tabulka 9.18

	A	B	C		Kapacity	u_i
1	4 0 200	6 0 0	8 0 0		200	2/5
2	5 0 240	8 0 1/30	12 0 1/10		240	1/2
3	10 1 150	15 1 160	20 1 100	—10	400	0
Požadavky	3 500	2 400	2 000			
v_j	1/10	1/15	1/20			

Pak musí platit

$$x_{21} = 240 - t$$

$$x_{31} = 150 + \frac{5}{10} t$$

$$x_{33} = 100 - \frac{12}{20} t$$

$$x_{34} = -10 - \frac{5}{10} t + \frac{12}{20} t$$

Aby proměnné x_{21} a x_{33} zůstaly nezáporné, musí platit

$$t \leqq 240,$$

$$t \leqq \frac{500}{3}$$

Protože poslední nerovnost je omezující, dosadíme

$$x_{23} = \frac{500}{3}$$

a dostaneme řešení v tab. 9.19.

Toto řešení je už přípustné a můžeme přejít na další fázi řešení, na minimalizaci původní účelové funkce.

Pokusíme se nalézt u téže úlohy výchozí řešení jiným způsobem, a to metodou pomocných proměnných. Začínáme-li s obsazováním políček stejně jako v předchozím případě, vystačíme s jedinou pomocnou proměnnou, a to v prvním sloupci. Výchozí řešení pomocné úlohy ukazuje tab. 9.20.

Tabulka 9.19

	A	B	C		Kapacity
1	4 8 200	6 15	8 12		200
2	5 15 $\frac{220}{3}$	8 8	12 10 $\frac{500}{3}$		240
3	10 10 $\frac{700}{3}$	15 5 160	20 8	$\frac{20}{3}$	400
Požadavky	3 500	2 400	2 000		

Tabulka 9.20

	A	B	C	Kapacity	u_i
1	4 0 200	6 0 0	8 0 0	200	4
2	5 0 240	8 0 1/3	12 0 1	240	5
3	10 0 140	15 0 160	20 0 100	400	10
4	1 1 100	1 1	1 1	a_4	0
Požadavky	3 500	2 400	2 000		
v_j	1	2/3	1/2		

Kapacitu pomocné řádky a_4 není třeba stanovit; předpokládáme jenom, že je dost velká a že není plně vyčerpána obsazenými políčky, že tedy můžeme dosadit $u_4 = 0$. Protože v pomocné úloze minimalizujeme součet pomocných proměnných, tj. funkci

$$z'' = x_{41} + x_{42} + x_{43},$$

dosadili jsme

$$c''_{4j} = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

a

$$c''_{ij} = 0 \quad \text{pro ostatní } i, j.$$

Podle toho jsou v tabulce hned vypočtena sloupcová a řádková čísla a hodnoty $-u_i + k_{ij}v_j$ pro volná políčka.

K obsazení zde přicházejí opět v úvahu druhé a třetí políčko druhé řádky. Obsadíme třetí políčko. Dosadíme-li

$$x_{23} = t,$$

bude

$$x_{21} = 240 - t$$

$$x_{33} = 100 - \frac{12}{20}t$$

$$x_{31} = 140 + \frac{12}{20}t$$

$$x_{41} = 100 + 5t - 10 \cdot \frac{12}{20}t = 100 - t$$

Aby proměnné zůstaly nezáporné, můžeme dosadit nejvýše $t = 100$. Dosadíme-li tedy $x_{23} = 100$, dostaneme řešení, v němž se pomocné proměnné už anulují, tj. dostaneme přípustné řešení původní úlohy (tab. 9.21).

Tabulka 9.21

	A	*B*	*C*	Kapacity	u_i
1	4 8 200	6 15 6	8 12 7,2	200	—23,2
2	5 15 140	8 8 166/15	12 10 100	240	—34
3	10 10 200	15 5 160	20 8 40	400	—48
Požadavky	3 500	2 400	2 000		
v_j	—3,8	—43/15	—2		

V tomto řešení máme uzavřený okruh; vyložíme, jak v takových případech postupovat dále.

Poněkud obtížnější výpočet řádkových a sloupcových čísel vyplývá z toho, že máme $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých, z nichž ani jedna není typu $u_i = 0$ (tj. o jediné neznámé), z níž by se mohlo postupně dosazovat do ostatních rovnic. Postupujeme proto tak, že řešíme nejdříve rovnice odpovídající uzavřenému okruhu. V našem případě jsou to tyto čtyři rovnice

$$\begin{aligned} -u_2 + 5v_1 &= 15 \\ -u_2 + 12v_3 &= 10 \\ -u_3 + 10v_1 &= 10 \\ -u_3 + 20v_3 &= 8 \end{aligned}$$

Z těchto čtyř rovnic lze snadno vypočíst

$$u_2 = -34, \quad u_3 = -48, \quad v_1 = -3{,}8, \quad v_3 = -2$$

Ostatní čísla u_i a v_j je pak možno vypočítat prostým dosazováním do zbývajících rovnic.

V tab. 9.21 jsou takto vypočtená řádková a sloupcová čísla již vepsána, stejně tak i výrazy $-u_i + k_{ij}v_j$ ve volných políčkách.

Prakticky je možno i zde výpočty provést přímo v tabulce, a to tak, že se za jednu z veličin u_i, v_j, např. za u_k, dosazuje zatím neurčená hodnota a ostatní se pak vyjadřují jako funkce této veličiny. S ohledem na existenci uzavřeného okruhu se jedno z čísel u_i, v_j dá vyjádřit dvojím způsobem. Srovnáním obou výrazů dostaneme pak rovnici pro výpočet neznámé hodnoty u_k. Zpětným dosazením pak zjistíme ostatní čísla.

V našem příkladě můžeme dosadit např. $u_3 = u$. Pak, jak je vidět ze schématu v tab. 9.22,

$$v_1 = \frac{10 + u}{10}, \qquad v_2 = \frac{5 + u}{15}, \qquad v_3 = \frac{8 + u}{20}$$

Tabulka 9.22

	A	*B*	*C*	Kapacity	u_i
1	4 8 200	6 15	8 12	200	$\frac{-20 + 2u}{5}$
2	5 15 140	8 8	12 10 100	240	$\frac{-20 + u}{2} = \frac{-26 + 3u}{5}$
3	10 10 200	15 5 160	20 8 40	400	u
Požadavky	3 500	2 400	2 000		
v_j	$\frac{10 + u}{10}$	$\frac{5 + u}{15}$	$\frac{8 + u}{20}$		

Z nich je pak možno určit

$$u_1 = \frac{-20 + 2u}{5}$$

Konečně u_2 je možno určit dvojím způsobem. Jednak platí

$$-u_2 + 5 . \frac{10 + u}{10} = 15, \quad \text{tj.} \quad u_2 = \frac{-20 + u}{2},$$

jednak

$$-u_2 + 12 . \frac{8 + u}{20} = 10, \quad \text{tj.} \quad u_2 = \frac{-26 + 3u}{5},$$

Srovnáním obou výrazů pro u_2 dostaneme

$$u = -48;$$

po dosazení pak vypočteme řádková a sloupcová čísla.

Vraťme se nyní k tabulce 9.21. Řešení tam obsažené není optimální. Řešení je možno zlepšit buď tak, že obsadíme políčko 2—2 (ve kterém platí $-u_i + k_{ij}v_j > c_{ij}$), nebo tak, že se sníží obsazení některé řádky (ve všech je $u_i < 0$). Ať už volíme kterýkoli způsob, vyplývá tu z existence uzavřeného okruhu určitá komplikace při výpočtu nového řešení. Obsaďme např. políčko 2—2. Dosadíme-li $x_{22} = t$, není možno v žádném případě vyrovnat součet druhé řádky tak, že odečteme t v jediném obsazeném políčku; to by pak nebylo možno vyrovnat příslušná sloupcová omezení. Postupujeme tedy tak, že omezení vyrovnáváme podél celého okruhu. Tak v našem příkladě dosazujeme

$$x_{21} = 140 - kt, \qquad x_{23} = 100 - (1 - k)\,t,$$

kde k je zatím neurčené číslo; jeho hodnotu určíme z podmínky, že i třetí řádkové omezení musí zůstat zachováno. Platí totiž

$$x_{31} = 200 + \frac{5}{10}kt, \qquad x_{32} = 160 - \frac{8}{15}t, \qquad x_{33} = 40 + \frac{12}{20}(1 - k)\,t$$

Má-li zůstat zachováno třetí řádkové omezení, musí platit

$$\frac{5}{10}kt - \frac{8}{15}t + \frac{12}{20}(1 - k)\,t = 0$$

Protože $t > 0$, platí také

$$-\frac{1}{10}k - \frac{8}{15} + \frac{12}{20} = 0,$$

což dává

$$k = \frac{2}{3}$$

Dosadíme-li za k do hořejších rovnic a bereme-li v úvahu nezápornost, musí platit

$$140 - \frac{2}{3}t \geqq 0, \qquad 100 - \frac{1}{3}t \geqq 0, \qquad 160 - \frac{8}{15}t \geqq 0$$

Z těchto nerovností je omezující první, a proto dosadíme $t = \frac{3 . 140}{2} = 210$ a dostaneme nové řešení uvedené v tab. 9.23.

Tabulka 9.23

	A	*B*	*C*	Kapacity	u_i
1	4 8 200	6 15 6	8 12 7,2	200	—4,8
2	5 15 10,4	8 8 210	12 10 30	240	—6,4
3	10 10 270	15 5 48	20 8 82	400	—2
Požadavky	3 500	2 400	2 000		
v_j	0,8	0,2	0,3		

V novém řešení můžeme opět vypočíst řádková a sloupcová čísla.

Dosadíme-li $u_3 = u$, dostaneme

$$v_1 = \frac{10 + u}{10}, \quad v_2 = \frac{5 + u}{15}, \quad v_3 = \frac{8 + u}{20}, \quad u_1 = \frac{-20 + 2u}{5},$$

$$u_2 = \frac{-80 + 8u}{15} = \frac{-26 + 3u}{5}$$

Z poslední relace dostaneme $u = -2$, a dosadíme-li zpětně, získáme řádková a sloupcová čísla uvedená v tabulce 9.23. V tabulce jsou rovněž již vepsány veličiny $-u_i + k_{ij}v_j$ na neobsazených políčkách. Řešení ještě není optimální, neboť řádková čísla jsou záporná. Protože absolutně největší záporné číslo je přiřazeno druhé řádce, dosadíme $x_{24} = t$ (přídatná proměnná), dále

$$x_{22} = 210 - kt, \qquad x_{23} = 30 - (1 - k)\,t$$

$$x_{32} = 48 + \frac{8}{15}kt, \qquad x_{33} = 82 + \frac{12}{20}(1 - k)\,t$$

Z posledních dvou relací plyne

$$\frac{8}{15}kt + \frac{12}{20}(1 - k)t = 0,$$

čili

$$k = 9$$

Dále z nezápornosti x_{22} a x_{33} plyne

$$210 - 9t \geqq 0$$

$$82 - \frac{12 \,.\, 8}{20}t \geqq 0$$

Poslední relace je omezující. Vyplývá z ní, že můžeme dosadit nejvýše

$$t = \frac{205}{12}$$

Dostaneme tím nové řešení, uvedené v tab. 9.24.

Tabulka 9.24

	A	*B*	*C*		Kapacity	u_i
1	4 8 200	6 15 6	8 12 40/6		200	0
2	5 15 10	8 8 $\frac{225}{4}$	12 10 $\frac{500}{3}$	$\frac{205}{12}$	240	0
3	10 10 270	15 5 130	20 8 20/3		400	10
Požadavky	3 500	2 400	2 000			
v_j	2	1	5/6			

Výpočtem řádkových a sloupcových čísel, jak je provedeno v tabulce 9.24, se můžeme snadno přesvědčit, že toto řešení je již optimální. Minimální hodnota účelové funkce je

$$200 \,.\, 8 + 270 \,.\, 10 + \frac{225}{4} \,.\, 8 + 130 \,.\, 5 + \frac{500}{3} \,.\, 10 = 7\,066\frac{2}{3}$$

Ovšem okolnost, že duální úloha je degenerovaná ($u_1 = 0$), ukazuje, že existují další optimální řešení. Vskutku můžeme dostat další optimální řešení, ponecháme-li kapacitu první řádky nevyužitu. Dosadíme-li

$$x_{14} = t,$$

pak

$$x_{11} = 200 - t, \qquad x_{31} = 270 + \frac{4}{10}t, \qquad x_{32} = 130 - \frac{4}{10}t,$$

$$x_{22} = \frac{225}{4} + \frac{3}{4}t, \qquad x_{24} = \frac{205}{12} - \frac{3}{4}t$$

Dosadíme-li $t = \frac{205}{9}$, dostaneme v tab. 9.25 nové řešení, které je rovněž optimální.

Tabulka 9.25

	A	*B*	*C*		Kapacity
1	4 8 $\frac{1\,595}{9}$	6 15	8 12	$\frac{205}{9}$	200
2	5 15	8 8 $\frac{220}{3}$	12 10 $\frac{500}{3}$		240
3	10 10 $\frac{2\,512}{9}$	15 5 $\frac{1\,088}{9}$	20 8		400
Požadavky	3 500	2 400	2 000		

Pro úplnost je třeba se zmínit o degeneraci. U zobecněného distribučního modelu se degenerace vyskytuje méně často než u jednostupňové distribuční úlohy. Dá se přitom dokázat v podstatě stejným způsobem jako u jednostupňové distribuční úlohy (tj. pomocí infinitezimální změny okrajových hodnot), že i zde je možno degeneraci obejít přibráním potřebného počtu vhodně volených volných políček.

Metoda řešení zobecněného distribučního modelu, kterou jsme uvedli, se pochopitelně dá s příslušnými úpravami aplikovat i na úlohy maximalizační.

9.9 CVIČENÍ

1. Závody (*D*) podniku o výrobních kapacitách 135, 40, 295 a 65 t polotovarů zásobují jiné závody (*S*) téhož podniku o požadavcích 120, 115, 120, 65 a 100 t polotovarů. Dodávající závody nemají dostatečné skladovací prostory hotových výrobků, proto se dodávky uskutečňují výhradně přes 3 ústřední sklady (*M*) podniku o kapacitách 180 t.

Sestavte rozvozní plán o minimálních přepravních nákladech (v tabulkách 9.26 a 9.27 jsou uvedeny přepravní sazby za t polotovaru od i-tého dodávajícího závodu k j-tému skladu a od j-tého skladu ke k-tému zpracovatelskému závodu).

Tabulka 9.26

	M_1	M_2	M_3
D_1	4	7	3
D_2	6	9	4
D_3	3	4	0
D_4	4	6	1

Tabulka 9.27

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
M_1	10	19	12	8	6
M_2	7	16	10	5	3
M_3	11	20	12	8	6

2. Podnik vyrábí výrobky A, B, C, D na 5 linkách (L). Z celkové pracovní doby linek je týdně vyhrazeno nejvýše 70, 140, 90, 130 a 40 hodin pro výrobu uvedených výrobků. Dodavatelsko-odběratelskou smlouvou je podnik vázán dodat týdně obchodu 360 kusů výrobku A, 420 kusů výrobku B, 580 kusů výrobku C a 540 kusů výrobku D. Hodinové výkony linek činí (tab. 9.28):

Tabulka 9.28

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
A	4	6	3	6	4
B	3	2	3	3	3
C	2	4	3	4	4
D	6	5	6	10	9

Náklady v Kčs na 1 hodinu práce linek se liší podle toho, který výrobek se vyrábí (tab. 9.29). Určete optimální přiřazení výrobků jednotlivým linkám.

3. Ve čtyřech oblastech (O) lze pěstovat pět plodin (R). Hektarové výnosy plodin v q/ha a náklady v Kčs/ha jsou odlišné podle druhu osevních ploch a plodin (viz tabulka 9.30, vlevo výnos v ha, vpravo náklady na ha).

Tabulka 9.29

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
A	17	36	10	20	12
B	22	20	20	16	18
C	10	34	12	16	20
D	18	21	12	25	22

Tabulka 9.30

	R_1		R_2		R_3		R_4		R_5	
O_1	25	125	20	140	15	150	25	100	15	60
O_2	25	125	20	75	30	180	15	120	25	85
O_3	15	125	20	120	15	130	20	135	25	160
O_4	20	175	25	160	20	180	15	105	30	195

První, druhá a třetí oblast mají po 8 700 ha osevní plochy. Čtvrtá oblast má 8 736 ha. Je třeba vyrobit 21 750 t první plodiny, 17 400 t druhé plodiny, 26 100 t třetí plodiny, 6 600 t čtvrté plodiny a 12 900 t páté plodiny.

Určete, na kterých druzích ploch které plodiny pěstovat, aby úkoly výroby byly splněny při minimálních nákladech.

Kapitola 10 SPECIÁLNÍ PROBLÉMY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

10.1 Simplexová metoda při omezených proměnných

U většiny dosavadních úloh jsme předpokládali, že proměnné musí být nezáporné, tj. že mají za dolní mez nulu a shora nejsou omezeny. Právě nezáporná řešení soustavy vlastních omezení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jsme nazvali přípustnými. Avšak v mnoha praktických úlohách jsou proměnné omezeny jinak. Jednak dolní mez proměnných nemusí být vždy nula. Jestliže je např. procesem výroba nějakého výrobku a předpisuje-li plán určitý objem l_j výroby tohoto výrobku, pak dolní mezí příslušné proměnné bude l_j, tj. $x_j \geqq l_j$. V jiných případech musíme výrobu některého výrobku omezit, třeba v důsledku omezenosti odbytu. Je-li L_j maximální odbyt, pak $x_j \leqq L_j$.

Jiný velmi často se vyskytující případ je, že proměnné musí být celá čísla.

V dalším výkladu nazveme přípustnými jen taková řešení soustavy vlastních omezení $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, která splňují i podobné vedlejší podmínky úlohy. Zabývejme se nejdříve případy, kdy proměnné se mohou pohybovat pouze v uzavřených intervalech, tj. kdy

$$l_j \leqq x_j \leqq L_j, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

kde $l_j < L_j$ jsou reálná čísla.*)

Všimněme si nejprve, že omezení

$$x_j \geqq l_j \tag{10.1}$$

nečiní žádné potíže. Stačí místo x_j zavést proměnnou $y_j = x_j - l_j \geqq 0$, tj. dosadit $x_j = y_j + l_j$, a máme místo podmínky (10.1) podmínku nezápornosti. Omezíme se proto na zkoumání podmínek

$$x_j \leqq L_j \tag{10.2}$$

Je pochopitelně možno změnit podmínku $x_j \leqq L_j$ pomocí přídatné proměnné na rovnici

$$x_j + x_j' = L_j \tag{10.3}$$

---

*) Je třeba podotknout, že některé obecné metody, jako např. multiplexová metoda, řeší úlohy lineárního programování přímo za předpokladu $l_j \leqq x_j \leqq L_j$.

a aplikovat simplexovou (nebo kteroukoli jinou) metodu na rozšířenou soustavu omezení. Rozšířením počtu omezení však rychle roste pracnost řešení a je otázka, zda není možno omezení typu (10.3) nějak obejít.

Předpokládejme za tím účelem, že původní úloha nalézt maximum lineární formy

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

při podmínkách

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{10.4}$$

je rozšířena o podmínky

$$x_j \leqq L_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{10.2}$$

kde L_j jsou kladná čísla, popř. ∞.*)

Doplníme-li nerovnosti (10.2) na rovnice, bude mít rozšířená úloha celkem $m + n$ rovnic o $2n$ proměnných. Je-li rozšířená úloha nedegenerovaná, bude v základním řešení celkem $m + n$ proměnných kladných a $n - m$ nulových. Původních n proměnných můžeme rozdělit do tří vzájemně se vylučujících skupin:

a) na proměnné nezákladní, tj. ty, které v daném řešení mají hodnotu nulovou, jejichž počet budiž n_1;

b) na proměnné základní, které dosahují své horní meze, jejichž počet budiž n_2;

c) na proměnné základní s hodnotou menší než horní mez, jejichž počet budiž n_3.

Zřejmě platí

$$n_1 + n_2 + n_3 = n \tag{10.5}$$

Pro čísla n_1, n_2, n_3 můžeme odvodit ještě další relaci. Ve skupině a) máme totiž proměnné s hodnotou nulovou, to znamená podle (10.3), že odpovídajících n_1 přídatných proměnných dosahuje své horní meze, tj. patří k základním proměnným. Rovněž n_3 přídatných proměnných odpovídajících proměnným skupiny c) má hodnotu kladnou, tj. patří mezi základní proměnné. Mezi základními proměnnými je tedy $n_2 + n_3$ původních proměnných a $n_1 + n_3$ přídatných proměnných, celkem tedy $n_1 + n_2 + 2n_3$. Protože celkový počet základních proměnných je $m + n$ [celkový počet omezení (10.4) a (10.3)], platí

$$n_1 + n_2 + 2n_3 = m + n$$

Z toho a z (10.5) pak plyne, že

$$n_3 = m$$

To znamená, že právě m proměnných, tj. tolik, kolik je rovnic v soustavě (10.4), bude mít v základním řešení kladnou hodnotu menší než horní mez. Ostatní proměnné budou mít buď hodnotu nulovou, nebo hodnotu rovnající se horní mezi.

---

*) Existence řešení u původní úlohy nezaručuje, že má řešení také rozšířená úloha.

Vyjděme ze soustavy rovnic (10.4) a převeďme je na kanonický tvar, pro určitost třeba na tvar, při němž právě prvních m proměnných jsou základní proměnné:

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ x_2 \quad &+ \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &+ \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{aligned} \tag{10.6}$$

Účelová funkce přitom nabude tvaru

$$z + \alpha_{0,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{0n}x_n = \beta_0$$

Nyní víme, že v každém základním řešení rozšířené soustavy nabývá právě m proměnných hodnot ležících mezi nulou a příslušnou horní mezí, ostatní pak se rovnají nule nebo horní mezi.

V úloze lineárního programování neobsahující omezení proměnných shora jsme za nezákladní proměnné dosazovali vždy nuly. Abychom však získali základní řešení rozšířené úlohy, budeme za nezákladní proměnné v soustavě (10.6) dosazovat buď nuly, nebo horní meze příslušných proměnných.

Dosadíme-li za všechny nezákladní proměnné nuly, pak pro základní proměnné soustavy (10.6) platí pochopitelně

$$x_i = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Toto řešení bude přípustným řešením rozšířené úlohy jedině tehdy, jestliže

$$0 \leqq \beta_i \leqq L_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{10.7}$$

Neplatí-li nerovnosti (10.7), pak můžeme někdy nalézt přípustné řešení rozšířené úlohy zkusmo tak, že v soustavě (10.6) dosadíme za některé nezákladní proměnné jejich horní meze.*)

Dosadíme-li např. za x_{m+1} horní mez L_{m+1}, budou základní proměnné soustavy (10.6) mít hodnoty

$$x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1}L_{m+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Jestliže přitom

$$0 \leqq \beta_i - \alpha_{i,m+1}L_{m+1} \leqq L_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

pak jsme získali přípustné řešení rozšířené úlohy s hodnotou účelové funkce

$$z = \beta_0 - \alpha_{0,m+1}L_{m+1}$$

---

*) Hledání výchozího řešení rozšířené úlohy nahodilým dosazováním horních mezí za některé nezákladní proměnné vede sice často rychle k cíli, v mnoha případech však může úplně selhat. Uvedeme proto níže zvláštní metodu nalezení výchozího řešení rozšířené úlohy.

Máme-li přípustné řešení rozšířené úlohy, je třeba určit, zda je to řešení optimální, či zda se dá zlepšit. Kritériem nám opět budou znaménka koeficientů α_{0j} ($j = m + 1, m + 2, \dots, n$); bude to ovšem poněkud složitější než u obvyklé simplexové metody. Pokud všechny nezákladní proměnné mají hodnoty nulové, přítomnost aspoň jednoho záporného koeficientu α_{0j} prozrazuje, že řešení se dá zlepšit tím, že přisoudíme proměnné x_{m+1} kladnou hodnotu (máme na mysli nedegenerované úlohy). Rovná-li se však některá nezákladní proměnná soustavy (10.6) horní mezi, pak už zvýšení hodnoty u této proměnné nepřichází v úvahu; naopak přichází zde v úvahu snížení hodnoty. Při snížení hodnoty některé nezákladní proměnné poroste hodnota účelové funkce (tj. zlepší se řešení) jedině tehdy, je-li příslušný koeficient α_{0j} kladný. Z toho plyne pro rozšířenou úlohu toto kritérium optimality:

Řešení rozšířené úlohy, které se dá získat ze soustavy (10.6) tím, že za některé nezákladní proměnné dosadíme nuly a za jiné jejich horní meze, je optimální, jestliže pro všechny nezákladní proměnné platí

$$\alpha_{0k} \geqq 0, \qquad \text{jestliže } x_k = 0$$

a

$$\alpha_{0k} \leqq 0, \qquad \text{jestliže } x_k = L_k$$

Nejsou-li tyto podmínky splněny, není řešení optimální. Hodnotu účelové funkce lze zvětšit buď tím, že zařadíme do báze proměnnou $x_k = 0$, jestliže $\alpha_{0k} < 0$, anebo proměnnou $x_r = L_r$, jestliže $\alpha_{0r} > 0$. V druhém případě se zařazením x_r do řešení hodnota této proměnné zmenší. Máme tedy dva způsoby, jak volit klíčový sloupec, a to:

a) klíčovým sloupcem může být sloupec koeficientů nezákladní proměnné s hodnotou nulovou, je-li koeficient α_{0k} záporný,

b) klíčovým sloupcem může být sloupec koeficientů nezákladní proměnné rovnající se své horní mezi, je-li koeficient α_{0k} kladný.

Přechod na nové řešení je rovněž složitější než u obvyklé simplexové metody. Jediné, čeho jsme museli dbát u simplexové metody při přechodu na nové řešení, bylo, aby žádná z proměnných se nestala zápornou. U rozšířené úlohy musíme kromě toho dbát, aby žádná z proměnných nenabyla hodnoty větší než je její horní mez. Abychom určili postup přechodu na nové řešení, zkoumejme zvlášť případy a) a b).

a) Předpokládejme pro určitost, že x_{m+1} v soustavě (10.6) je nezákladní proměnná s hodnotou nulovou a s $\alpha_{0,m+1} < 0$. Zvolme tedy $(m + 1)$-ní sloupec za sloupec klíčový. Označme dále hodnoty základních proměnných v případě, že některé z nezákladních proměnných se rovnají svým horním mezím, $\beta_i^{(L)}$. Otázka zní: Jaké kladné hodnoty může x_{m+1} maximálně nabýt?

a1) Především je samozřejmé, že

$$x_{m+1} \leqq L_{m+1}, \tag{10.8}$$

neboť L_{m+1} je horní mez proměnné x_{m+1}.

a2) Jestliže $\alpha_{i,m+1} > 0$, pak, protože proměnná x_i

$$x_i = \beta_i^{(L)} - \alpha_{i,m+1}x_{m+1},$$

se nesmí stát zápornou a musí platit, že

$$x_{m+1} \leqq \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}$$

a tudíž také, že

$$x_{m+1} \leqq \min \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}} \tag{10.9}$$

pro všechna i, pro něž

$$\alpha_{i,m+1} > 0$$

a3) Jestliže $\alpha_{i,m+1} < 0$, pak s ohledem na to, že proměnnou x_i

$$x_i = \beta_i^{(L)} - \alpha_{i,m+1}x_{m+1}$$

musí zůstat menší než L_i, musí platit

$$x_{m+1} \leqq \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{-\alpha_{i,m+1}},$$

tj. musí také platit

$$x_{m+1} \leqq \min \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{-\alpha_{i,m+1}} \tag{10.10}$$

pro všechna i, pro něž

$$\alpha_{i,m+1} < 0$$

Má-li být nové řešení přípustné, lze za x_{m+1} dosadit nejvýše nejmenší ze tří čísel (10.8), (10.9), (10.10), tj.

$$\min \left(L_{m+1},\ \min_{\alpha_{i,m+1}>0} \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}};\ \min_{\alpha_{i,m+1}<0} \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{-\alpha_{i,m+1}} \right) \tag{10.11}$$

Jestliže je nejmenší z uvedených tří čísel L_{m+1}, pak přechod na nové řešení je velmi jednoduchý. Báze zůstává nezměněna, x_{m+1} zůstává nezákladní proměnnou, ale nabývá hodnoty L_{m+1}. Simplexová tabulka se v podstatě nemění, přepočítávají se jenom hodnoty základních proměnných, tj. $\beta_i^{(L)}$ a účelové funkce s ohledem na hodnotu $x_{m+1} = L_{m+1}$.

Jestliže je nejmenší z uvedených tří čísel prostřední, tj.

$$\min_{\alpha_{i,m+1}>0} \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}},$$

pak x_{m+1} se stává základní proměnnou a vylučovaná proměnná bude mít hodnotu nulovou. Přechod na nové řešení se v tomto případě provede stejně jako u obvyklé simplexové metody.

Jestliže je nejmenší z čísel (10.11) poslední, pak x_{m+1} se stává základní proměnnou a hodnota vylučované proměnné (která bude nezákladní proměnnou) vzroste na horní mez. Přechod na nové řešení se v tomto případě provede, opět jako u obvyklé simplexové metody, dodatečně se však musí přepočíst hodnoty základních proměnných (za vylučovanou proměnnou se dosazuje její horní mez).

Příklad 10.1. Pro názornost vezměme opět příklad 5.3, s tím, že předpokládáme u třetího výrobku odbyt omezený na 120 jednotek a u čtvrtého na 100 jednotek, tj. $L_3 = 120$, $L_4 = 100$.

Tabulka 10.1a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1'	10	5	4	2	1	0	0	2 000
x_2'	8	5	1,2	5,6	0	1	0	1 800
x_3'	5	8	2,5	10	0	0	1	2 000
z	—500	—300	—200	—280	0	0	0	0

U prvních dvou výrobků je odbyt neomezený, tj. $L_1 = L_2 = \infty$. Protože na přídatné proměnné neklademe žádná omezení, bude výchozí řešení stejné jako u obvyklého simplexového postupu. Snadno zjistíme, že i další dvě řešení lze určit shodně s obvyklým postupem. Vyjdeme tedy z třetího řešení, tj. z tabulky 10.1b.

Tabulka 10.1b

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1'	x_2'	x_3'	
x_1	1	0,45	0,5	0	0,14	—0,05	0	190
x_4	0	0,25	$\boxed{-0{,}5}$	1	—0,2	0,25	0	50
x_3'	0	3,25	5	0	1,3	—2,25	1	550
z	0	—5	—90	0	14	45	0	109 000

Za klíčový sloupec volíme v dalším kroku sloupec třetí. Určeme čísla (10.11):

$$\min \left(120, \min_{\alpha_{i3}>0} \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i3}} = \frac{550}{5}, \min_{\alpha_{i3}<0} \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{-\alpha_{i3}} = \frac{100 - 50}{0{,}5} \right) = 100$$

Nejmenším z uvedených čísel je poslední. To znamená, že zařadíme-li do řešení x_3, můžeme za ni dosadit nejvýše 100, tím vyloučíme x_4, přičemž x_4 nabude své horní meze, tj. hodnoty 100. Výpočet nové tabulky provedeme běžným způsobem, ale dodatečně se přepočte poslední sloupec (tak, že za x_4 se dosazuje 100).

Tabulka 10.1c

	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3		$\mathbf{b}^{(4)}$
x_1	1	0,7	0	1	—0,06	0,2	0	240	140
x_3	0	0,5	1	—2	0,4	—0,5	0	—100	100
x'_3	0	5,75	0	10	—0,7	0,25	1	1 050	50
z	0	—50	0	—180	50	0	0	100 000	118 000

Poslední sloupec tabulky se vypočte takto: od prvků předposledního sloupce se odečtou příslušné koeficienty čtvrtého sloupce násobené hodnotou proměnné x_4 (tj. stem). Poslední tabulka obsahuje toto řešení:

$$x_1 = 140, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 100, \quad x_4 = 100, \quad x'_1, x'_2 = 0, \quad x'_3 = 50,$$
$$z = 118\,000$$

Toto řešení není optimální. Jako klíčový sloupec přichází teď v úvahu pouze sloupec druhý (pod sloupcem čtvrtým máme sice rovněž záporný koeficient, avšak x_4 se rovná své horní mezi). Po zařazení x_2 dostaneme již optimální řešení.

b) Předpokládejme nyní, že $x_{m+1} = L_{m+1}$ a že $\alpha_{0,m+1} > 0$. Zvolíme-li $(m + 1)$-ní sloupec za klíčový, tj. x_{m+1} za zařazovanou proměnnou, znamená to, že musíme hodnotu x_{m+1} snížit. Otázkou pak je, jaká bude nová hodnota x_{m+1}. Nová hodnota x_{m+1} musí splnit tyto tři podmínky:

b1)

$$x_{m+1} \geqq 0 \qquad (10.12)$$

b2) Dosavadní základní proměnné musí zůstat nezáporné. Tím, že snižujeme hodnotu proměnné x_{m+1} z L_{m+1} na $x_{m+1} < L_{m+1}$, změní se hodnota základní proměnné x_i z $\beta_i^{(L)}$ na

$$\beta_i^{(L)} + \alpha_{i,m+1}(L_{m+1} - x_{m+1}) \qquad (10.13)$$

Aby tento výraz zůstal nezáporný, musí v případě, že $\alpha_{i,m+1} < 0$, platit

$$x_{m+1} \geqq L_{m+1} + \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}},$$

tj. musí platit

$$x_{m+1} \geqq \max_{\alpha_{i,m+1}<0} \left(L_{m+1} + \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}\right) \qquad (10.14)$$

b3) Dosavadní základní proměnné se nesmějí stát většími než příslušné horní meze. Je-li $\alpha_{i,m+1} > 0$, pak musí podle (10.13) platit

$$\beta_i^{(L)} + \alpha_{i,m+1}(L_{m+1} - x_{m+1}) \leqq L_i$$

anebo

$$x_{m+1} \geqq L_{m+1} - \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}};$$

musí tedy platit

$$x_{m+1} \geqq \max_{\alpha_{i,m+1}>0} \left(L_{m+1} - \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}\right) \qquad (10.15)$$

Aby byly splněny všechny tři podmínky, b1), b2), b3), stačí za x_{m+1} dosadit největší ze tří čísel, (10.12), (10.14), (10.15), tj.

$$\max \left[0, \max_{\alpha_{i,m+1}<0} \left(L_{m+1} + \frac{\beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}\right), \max_{\alpha_{i,m+1}>0} \left(L_{m+1} - \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}\right)\right] \qquad (10.16)$$

Jestliže je největším z uvedených tří čísel první, tj. nula, pak přechod na nové řešení je velmi jednoduchý. Celá simplexová tabulka se nechá beze změny (neboť báze se nemění), až na poslední sloupec (sloupec požadavkového vektoru), který se přepočte s ohledem na to, že x_{m+1} se stává nezákladní proměnnou s hodnotou nulovou (k poslednímu sloupci se připočte L_{m+1} – násobek $(m + 1)$ – ního sloupce).

Jestliže je ze tří čísel (10.16) největší druhé, pak řádka, ve které nabývá tento výraz největší hodnoty, se stává klíčovou řádkou. Dejme tomu, že je to řádka k-tá. Pak x_k bude vylučovanou proměnnou a v dalším kroku bude mít hodnotu nulovou. Dá se snadno dokázat, že přechod k dalšímu kroku se dá uskutečnit stejně jako obvykle u simplexové metody, až na to, že v posledním sloupci v k-té řádce nedostaneme hodnotu x_{m+1}, ale $x_{m+1} - L_{m+1}$ (tedy záporné číslo), jak je zřejmé z (10.14). Musíme proto dodatečně zvýšit poslední číslo v k-té řádce o L_{m+1}.

Konečně předpokládejme, že největším ze tří čísel (10.16) je poslední, a to, že největší hodnoty nabývá toto číslo v s-té řádce. Řádka s-tá se pak stává klíčovou řádkou a x_s vylučovanou proměnnou, která však nabývá v následujícím kroku maximální hodnoty L_s.

Přechod na nové řešení se provede opět jako obvykle u simplexové metody. Dodatečně se však přepočte poslední sloupec s ohledem na to, že vylučovaná proměnná x_s nabývá maximální hodnoty L_s. V klíčové (s-té) řádce je třeba navíc přidat L_{m+1}, neboť jak je zřejmé z (10.15), běžnou simplexovou iterací tam dostaneme jenom hodnotu $x_{m+1} - L_{m+1}$ (tedy záporné číslo).

Poznámka: Jednodušší je místo čísel (10.16) zkoumat jejich doplňky do L_{m+1}, tj. hledat hodnotu

$$L_{m+1} - x_{m+1} = \min\left[L_{m+1},\ \min_{\alpha_{i,m+1}<0} \frac{\beta_i^{(L)}}{-\alpha_{i,m+1}},\ \min_{\alpha_{i,m+1}>0} \frac{L_i - \beta_i^{(L)}}{\alpha_{i,m+1}}\right] \tag{10.17}$$

Příklad 10.2. Výrobek V se dá vyrobit čtyřmi způsoby, jak je uvedeno v tab. 10.2a

Tabulka 10.2a

Činitele	Spotřeba činitelů na jednotku procesu				Disponibilní množství činitelů
	I	II	III	IV	
A *B* *C*	2 4 1	5 4 2	8 0 4	10 10 4	2 000 4 000 2 000
Množství výrobku *V* získané při jednotlivých procesech	40	60	72	120	

Úkolem je sestavit výrobní program, který dá maximum výrobku V. Přitom s ohledem na kapacitní omezení je možno první proces provést nejvýše 800krát, druhý 500krát, třetí a čtvrtý jen 100krát.

Uvedenou úlohu lze tedy zformulovat takto:

Nalézt maximum lineární formy

$$z = 40x_1 + 60x_2 + 72x_3 + 120x_4$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 &\leqq 2\,000 \\ 4x_1 + 4x_2 \phantom{{}+8x_3} + 10x_4 &\leqq 4\,000 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 &\leqq 2\,000 \end{aligned}$$

$$0 \leqq x_1 \leqq 800, \quad 0 \leqq x_2 \leqq 500, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 100, \quad 0 \leqq x_4 \leqq 100$$

Sestavme úlohu do simplexové tab. 10.2b s vynecháním podmínek uvedených v posledním řádku.

Tabulka 10.2b

	x_1	x_2	x_3	x_4		$\mathbf{b}^{(4)}$	$\mathbf{b}^{(3,4)}$
x_1' x_2' x_3'	$\boxed{2}$ 4 1	5 4 2	8 0 4	10 10 4	2 000 4 000 2 000	1 000 3 000 1 600	200 3 000 1 200
z	—40	—60	—72	—120	0	12 000	19 200

V tabulce jsou hned připsány další dva sloupce, odpovídající dvěma dalším krokům, a to:

Podle běžného pravidla chceme zařadit do báze sloupec čtvrtý. Všechny koeficienty jsou v tomto sloupci kladné. K určení klíčové řádky stačí tedy srovnávat první dvě čísla (10.11). Nejmenší z podílů,

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{i4}}, \quad \text{je} \quad \frac{2\,000}{10} = 200;$$

je však větší než $L_4 = 100$. Můžeme tedy za x_4 dosadit nejvýše 100. Proměnná x_4 zůstává nezákladní proměnnou s hodnotou $L_4 = 100$. Přepočtený sloupec absolutních členů je proto označen $\mathbf{b}^{(4)}$.

Obdobnou úvahou dospějeme k tomu, že za x_3 lze rovněž zařadit maximální hodnotu 100. Přepočtený poslední sloupec je označen $\mathbf{b}^{(3,4)}$.

V dalším kroku zařadíme do řešení x_1. Všechny koeficienty v prvním sloupci jsou kladné, z podílů

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \text{ je nejmenší první,} \quad \frac{200}{2} = 100;$$

je menší než $L_1 = 800$.

Přejdeme tedy v tab. 10.2c k dalšímu kroku jako obvykle:

Tabulka 10.2c

	x_1'	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}^{(3,4)}$	$\mathbf{b}^{(4)}$
x_1 x_2' x_3'	0,5 —2 —0,5	2,5 —6 —0,5	4 —16 0	$\boxed{5}$ —10 —1	100 2 600 1 100	500 1 000 1 100
z	20	40	88	80	23 200	32 000

Protože x_3 a x_4 jsou nyní v řešení s maximálními hodnotami, pak kladné koeficienty v řádce z znamenají, že lze hodnotu účelové funkce ještě zvýšit snížením hodnoty x_3 nebo x_4. Vezměme nejdříve x_3 a hledejme podle (10.17) hodnotu $L_3 - x_3$:

$$L_3 - x_3 = \min\left(100, \frac{2\,600}{16}, \frac{800 - 100}{4}\right) = 100$$

To znamená, že hodnota x_3 se sníží o 100, čili že se stane v dalším kroku nezákladní proměnnou s hodnotou nulovou. Protože se báze přitom nemění, stačí přepočítat poslední sloupec, jak je vyznačeno v hořejší tabulce.

Na vnitřní části tabulky se tím nic nezměnilo, a tak můžeme stále ještě zlepšit hodnotu účelové funkce snížením hodnoty x_4. Hledejme opět podle (10.17) $L_4 - x_4$:

$$L_4 - x_4 = \min\left(100, \frac{1\,000}{10}, \frac{800 - 500}{5}\right) = \frac{800 - 500}{5} = 60$$

To znamená, že x_4 poklesne o 60, ze 100 na 40.

Protože nejmenší z uvedených čísel je v první řádce, bude první řádka klíčovou řádkou, x_1 se stane nezákladní proměnnou s maximální hodnotou (800). Výpočet provedeme nejdříve simplexovou metodou a dodatečně přepočteme poslední sloupec (tab. 10.2d).

Tabulka 10.2d

	x_1'	x_2	x_3	x_1	$\mathbf{b}^{(4)}$	$\mathbf{b}^{(1)}$
x_4	0,1	0,5	0,8	0,2	100	40
x_2'	—1	—1	—8	2	2 000	400
x_3'	—0,4	0	0,8	0,2	1 200	1 040
z	12	0	24	—16	24 000	36 800

Poslední sloupec jsme vypočetli tak, že jsme z předposledního odečetli L_1 – násobek (800 – násobek) čtvrtého sloupce a v první řádce jsme ještě přidali $L_4 = 100$.

Řešení obsažené v poslední tabulce je optimální. V poslední řádce je sice jeden záporný koeficient, a to pod x_1, ale x_1 má v řešení maximální hodnotu 800; větší hodnota u této proměnné nepřichází v úvahu.

Optimální řešení je tedy: provést první proces 800krát a čtvrtý 40krát. Maximální množství výrobku V je přitom 36 800. Činitelů B a C není v optimálním řešení plně využito.

Příklad 10.3. Pozměňme nepatrně podmínky předchozího příkladu, a to tak, že disponibilní množství činitele B snížíme ze 4 000 na 3 500. Místo tab. 10.2c pak dostaneme v tab. 10.3a:

Tabulka 10.3a

	x_1'	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{b}^{(3,\,4)}$	$\mathbf{b}^{(4)}$
x_1	0,5	2,5	4	5	100	500
x_2'	—2	—6	—16	$\boxed{-10}$	2 100	500
x_3'	—0,5	—0,5	0	—1	1 100	1 100
z	20	40	88	80	23 200	32 000

Zde

$$L_4 - x_4 = \min\left(100, \frac{500}{10}, \frac{800 - 500}{5}\right) = \frac{500}{10} = 50$$

To znamená, že x_4 se stane základní proměnnou místo x_2'. Nové řešení dostaneme obvyklou simplexovou iterací v tab. 10.3b.

Tabulka 10.3b

	x_1'	x_2	x_3	x_2'	$\mathbf{b}^{(4)}$	
x_1	—0,5	—0,5	—4	0,5	750	750
x_4	0,2	$\boxed{0{,}6}$	1,6	—0,1	—50	50
x_3'	—0,3	0,1	1,6	—0,1	1 050	1 050
z	4	—8	—40	8	36 000	36 000

Řešení, které jsme dostali, není ještě optimální. Zařadíme-li v dalším do řešení x_2, bude klíčovou řádkou řádka druhá. Další krok znázorňuje tab. 10.3c.

Tabulka 10.3c

	x_1'	x_4	x_3	x_2'	
x_1	—1/3	5/6	$\boxed{-8/3}$	1/6	2 375/3
x_2	1/3	5/3	8/3	—1/6	250/3
x_3'	—1/3	—1/6	4/3	—1/12	3 125/3
z	20/3	40/3	—56/3	20/3	110 000/3

Konečně můžeme ještě zařadit x_3 do řešení místo x_1 (x_1 bude mít ovšem hodnotu $L_1 = 800$) a dostaneme v tab. 10.3d:

Tabulka 10.3d

	x'_1	x_4	x_1	x'_2		$\mathbf{b}^{(1)}$
x_3	1/8	—5/16	—3/8	—1/16	—2 375/8	25/8
x_2	0	2,5	1	0	875	75
x'_3	—0,5	—0,25	0,5	0	1 437,5	1 037,5
z	9	15	—7	5,5	89 375/3	36 725

Toto řešení je už optimální. V poslední řádce je sice jeden záporný prvek, ale u nezákladní proměnné, která dosáhla své horní meze.

Nalezení výchozího řešení

Zbývá ještě ukázat, jak nalézt výchozí přípustné řešení. Nelze-li zkusmo nalézt přípustné řešení rozšířené úlohy, je možno vycházet z jakéhokoli přípustného řešení užší úlohy (tj. bez horních mezí), nepřípustného pro rozšířenou úlohu, a řešit v první fázi pomocnou úlohu, tj. minimalizaci součtu těch proměnných, jejichž hodnota překračuje horní mez. Platí-li v optimálním řešení pomocné úlohy

$$x_j \leqq L_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

máme výchozí řešení rozšířené úlohy. V opačném případě nemá rozšířená úloha vůbec přípustné řešení.

Příklad 10.4. Maximalizovat

$$z = 4{,}8x_1 + 16x_2 + 20x_3 + 12x_4$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 12x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 10x_3} + 4x_4 + x_5 \phantom{{}+ x_6 + x_7} &= 600 \\ 4x_2 + 10x_3 + 4x_4 \phantom{{}+ x_5} + x_6 \phantom{{}+ x_7} &= 680 \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 4x_4 \phantom{{}+ x_5 + x_6} + x_7 &= 880 \end{aligned}$$

$$0 \leqq x_1 \leqq 40, \quad 0 \leqq x_2 \leqq 40, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 100, \quad 0 \leqq x_4 \leqq 100,$$
$$0 \leqq x_5 \leqq 20, \quad 0 \leqq x_6 \leqq 20, \quad 0 \leqq x_7 \leqq 20$$

Údaje sestavíme do tab. 10.4a.

Řešení obsažené v této tabulce, tj.

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 600, \quad x_6 = 680, \quad x_7 = 880,$$

Tabulka 10.4a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		$\mathbf{b}^{(4)}$	$\mathbf{b}^{(2,4)}$
x_5	12	2	0	4	1	0	0	600	200	120
x_6	0	4	$\boxed{10}$	4	0	1	0	680	280	120
x_7	5	8	8	4	0	0	1	880	480	160
z	—4,8	—16	—20	—12	0	0	0	0	1 200	1 840
z''	17	14	18	12	0	0	0	2 160	960	400

je nepřípustné. Minimalizujeme proto nejdříve pomocnou účelovou funkci

$$z'' = x_5 + x_6 + x_7$$

V tabulce 10.4a je z'' uvedeno už po úpravě, tj. po přičtení prvních tří rovnic.

V tabulce je hned uveden přepočtený poslední sloupec po zařazení x_4 a x_2 s maximální hodnotou. Řešení zůstává i tak nepřípustné.

V dalších dvou krocích zařadíme do řešení x_3 a x_1, jak je zřejmé z další části tab. 10.4b.

Tabulka 10.4b

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{b}^{(2,4)}$
x_5	$\boxed{12}$	2	0	4	1	0	0	120
x_3	0	0,4	1	0,4	0	0,1	0	12
x_7	5	4,8	0	0,8	0	—0,8	1	64
z	—4,8	—8	0	—4	0	2	0	2 080
z''	17	6,8	0	4,8	0	—1,8	0	184
x_1	1	1/6	0	1/3	1/12	0	0	10
x_3	0	0,4	1	0,4	0	0,1	0	12
x_7	0	119/30	0	—13/15	—5/12	—0,8	1	14
z	0	—7,2	0	—2,4	0,4	2	0	2 128

V poslední části tabulky už není pomocná účelová funkce uvedena, protože řešení obsažené v této tabulce je již přípustné. Není to ovšem ještě řešení optimální.

10.2 Doprava při omezené kapacitě tratí

Uvedených výsledků se dá použít i při řešení dopravního problému, jsou-li kapacity některých cest omezeny ($x_{ij} \leqq L_{ij}$). Postupuje se tímto způsobem:

1. Najde se jakékoli řešení jako u jednostupňového dopravního problému. Nesplňuje-li toto řešení omezení $x_{ij} \leqq L_{ij}$, řeší se nejdříve pomocná úloha, tj. minimalizuje se součet proměnných o hodnotě větší než horní mez.
2. „Volná“ políčka, odpovídající nezákladním proměnným, mohou být přitom buď nulová anebo proměnné tu mohou dosahovat horní meze.
3. Řešení se dá zlepšit buď obsazením volného nulového políčka, pokud je příslušná sazba nižší než hodnota ekvivalentní kombinace sazeb, anebo snížením hodnoty u políčka, které je obsazeno po horní mez, jestliže příslušná sazba je vyšší než hodnota ekvivalentní kombinace.
4. Přechod na nové řešení je podobný jako u jednostupňového dopravního problému, je třeba jenom dbát, aby žádné políčko nebylo obsazeno hodnotou vyšší, než je kapacita příslušné cesty.

Řešme například problém uvedený v tab. 10.5a:

Příklad 10.5

Tabulka 10.5a

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
D_1	60 5	8	50 4 25	40 2 75	100
D_2	10	10 50	50 6 50	40 2	100
D_3	50 5 75	50 4 25	50 4	8	100
b_j	75	75	75	75	300

V tabulce jsou uvedeny v pravém horním rohu jednotlivých políček jako obvykle sazby, v levém horním rohu kapacity příslušných cest, pokud jsou omezeny (např. kapacita cesty $\overline{D_1S_1}$ je omezena na 60 jednotek, cesta $\overline{D_1S_2}$ má kapacitu neomezenou). V tabulce je hned uvedeno řešení, které však není přípustné. Políčka $\overline{D_1S_4}$ a $\overline{D_3S_1}$ jsou obsazena větší hodnotou, než jsou příslušné kapacity. Řešíme proto nejdříve pomocnou úlohu, tj. minimalizujeme součet

$$z'' = x_{14} + x_{31},$$

což značí, že všude dosadíme nulové sazby, kromě políček $\overline{D_1S_4}$ a $\overline{D_3S_1}$, kam dosadíme sazby jednotkové, jak je to uvedeno v tabulce 10.5b, kde jsou již vypočtena sloupcová i řádková čísla.

Tabulka 10.5b

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 0 1	0 0	50 0 25	40 1 75	100	0
D_2	0 1	0 50	50 0 50	40 0 1	100	0
D_3	50 1 75	50 0 25	50 0 0	0 1	100	0
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	1	0	0	1		

V dalším kroku obsadíme políčko $\overline{D_2S_4}$.
Dosadíme-li

$$x_{24} = \vartheta \leqq 40,$$

pak

$$x_{14} = 75 - \vartheta \geqq 0, \qquad x_{13} = 25 + \vartheta \leqq 50, \qquad x_{23} = 50 - \vartheta \geqq 0$$

Velikost ϑ je omezena v daném případě relací $25 + \vartheta \leqq 50$. Dosadíme tedy $\vartheta = 25$ (tab. 10.5c), čímž x_{13} dosáhne horní meze.

V tomto řešení považujeme tedy $\overline{D_1S_3}$ za políčko „volné“, proto je tam pro rozlišení číslo 50 v rámečku. V dalším kroku obsadíme políčko $\overline{D_1S_2}$, a to hodnotou $x_{12} = 15$ (více nelze dosadit, protože $x_{24} \leqq 40$); tím bude též $\overline{D_2S_4}$ plně obsazeno a budeme je považovat za volné políčko (tab. 10.5d).

Tabulka 10.5c

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 0 1	0 1	50 0 $\boxed{50}$ 1	40 1 50	100	1
D_2	0 1	0 50	50 0 25	40 0 25	100	0
D_3	50 1 75	50 0 25	50 0 0	0 0	100	0
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	1	0	0	0		

Tabulka 10.5d

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 0 1	0 15	50 0 $\boxed{50}$ 0	40 0 35	100	0
D_2	0 1	0 35	50 0 25	40 0 $\boxed{40}$ 0	100	0
D_3	50 1 75	50 0 25	50 0 0	0 0	100	0
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	1	0	0	0		

V dalším kroku obsadíme $\overline{D_2S_1}$, a to hodnotou $x_{21} = 25$ (více pro $x_{32} \leqq 50$ nelze).

Tím už dostaneme přípustné řešení (v tab. 10.5e).

Tabulka 10.5e

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 5 8	8 15	50 4 $\boxed{50}$ 4	40 2 35	100	—2
D_2	10 25	10 10	50 6 25	40 2 $\boxed{40}$ 4	100	0
D_3	50 5 50	50 4 $\boxed{50}$ 5	50 4 1	8 —1	100	—5
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	10	10	6	4		

V dalším výpočetním kroku obsadíme $\overline{D_1S_1}$, a to hodnotu $x_{11} = 15$. Dostaneme řešení v tab. 10.5f.

Tabulka 10.5f

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 5 15	8 5	50 4 $\boxed{50}$ 1	40 2 35	100	—5
D_2	10 10	10 25	50 6 25	40 2 $\boxed{40}$ 7	100	0
D_3	50 5 50	50 4 $\boxed{50}$ 5	50 4 1	8 2	100	—5
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	10	10	6	7		

Toto řešení není ještě optimální; je možno snížit hodnotu x_{13} (a zároveň x_{21}) o 10 a pak dostaneme (tab. 10.5g):

Tabulka 10.5g

	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i	u_i
D_1	60 5 25	8 8	50 4 40	40 2 35	100	0
D_2	10 7	10 25	50 6 35	40 2 $\boxed{40}$ 4	100	2
D_3	50 5 50	50 4 $\boxed{50}$ 8	50 4 4	8 2	100	0
b_j	75	75	75	75	300	
v_j	5	8	4	2		

Toto řešení je již optimální. Není to ovšem jediné optimální řešení. Další optimální řešení je možno dostat obsazením políček $\overline{D_1S_2}$ nebo $\overline{D_3S_3}$.

Poznámka: Podobným způsobem lze řešit též zobecněný distribuční model s proměnnými omezenými shora.

10.3 CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

Metody řešení úloh lineárního programování, s nimiž jsme se dosud seznámili, předpokládají, že proměnné (tj. úrovně procesů) se mohou měnit spojitě. U většiny úloh však tomu tak není. V mnoha případech mají proměnné reálný smysl jedině tehdy, nabývají-li hodnot celočíselných (výroba kusů, řezání tyčí aj.), v jiných případech jsou přípustné jen určité diskrétní veličiny (např. některé zboží se prodává jen v určitých partiích, kapacity se projektují jen v určitých velikostech). Prakticky se všechny výrobky vyrábějí a expedují pouze v určitých celých jednotkách (pytle, tuny, vagóny aj.). Předpokládejme, že v úloze lineárního programování mohou proměnné nabýt jen celočíselných hodnot. Tato podmínka tvoří vlastně další omezení úlohy. Řešíme-li úlohu třeba simplexovou metodou a dostaneme-li optimální řešení neceločíselné, pak je takové řešení nepřípustné. Na první pohled by se zdálo, že je možno výsledek zaokrouhlit na nejbližší celé číslo. I když však tento postup v praxi někdy vyhovuje, v zásadě je nepřípustný. Zaokrouhlený výsledek se totiž nemusí shodovat s celočíselným optimem a u složitých úloh může být odchylka od optima značná.

Ozřejmíme problematiku celočíselného programování na zjednodušeném příkladě.

Příklad 10.6. Podnik vyrábí určitý kusový výrobek ve dvou provedeních. Spotřeba úzkoprofilových surovin na jednotku výrobku i zisk na 1 kus výrobku jsou uvedeny v tab. 10.6.

Tabulka 10.6

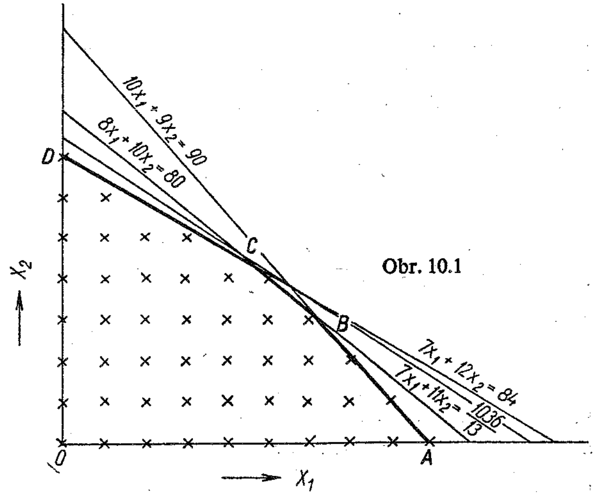
Surovina	Spotřeba surovin na 1 kus provedení		K dispozici surovin
	I	II	
S_1 S_2 S_3	10 8 7	9 10 12	90 80 84
Zisk na 1 kus v 1 000 Kčs	7	11	

Jde zde o nalezení maxima lineární formy

$$7x_1 + 11x_2$$

na množině řešení soustavy

$$\begin{aligned} 10x_1 + 9x_2 &\leqq 90 \\ 8x_1 + 10x_2 &\leqq 80 \\ 7x_1 + 12x_2 &\leqq 84 \\ x_1 \geqq 0 \quad \text{a} \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$



Obr. 10.1

Přitom x_1 a x_2 jsou celá čísla.

Protože jde o dvourozměrný problém, lze jej řešit graficky. Pokud nepřihlížíme k poslední podmínce, tj. k celočíselnosti, je tu množina řešení znázorněna pětiúhelníkem *OABCD* (obr. 10.1) a optimální řešení je v bodě *C* o souřadnicích $x_1 = 4\,^8/_{13}$, $x_2 = 4\,^4/_{13}$. V dané konkrétní úloze je to ovšem řešení nepřípustné. Chceme-li výsledek zaokrouhlovat, musíme si uvědomit, že bez grafického znázornění množiny řešení (vícerozměrné úlohy nelze graficky znázornit) nelze snadno určit, jaké zaokrouhlení je přípustné. Konkrétně u úloh toho typu, jako je naše, kde jde o spotřebu omezených zdrojů na výrobu, je zřejmé jedině to, že lze zaokrouhlovat směrem dolů. Zaokrouhlíme-li v našem příkladě na $x_1 = 4$ a $x_2 = 4$, nebude to, jak je vidět z obrázku, optimální celočíselné řešení. Optimálním celočíselným řešením je podle obrázku $x_1 = 5$, $x_2 = 4$. U jiných úloh, zvláště u vícerozměrných, může ovšem optimální celočíselné řešení být mnohem dále od zaokrouhlených hodnot než v našem příkladě.

Množina řešení při podmínce celočíselnosti už není konvexní, je to množina diskrétních bodů (na obrázku jsou body množiny řešení označeny křížkem).

Algoritmus řešení celočíselných úloh, navržený Gomorym, vychází z myšlenky, že k řešení celočíselných úloh lze použít běžných metod lineárního programování (třeba metody simplexové), jestliže se podaří přidáním vhodných dalších omezení zúžit původní množinu řešení (neceločíselné úlohy) tak, aby žádný celočíselný bod nebyl z množiny vyloučen a aby vrcholy nové množiny řešení (třeba jen některé) byly celočíselné. Podstata Gomoryho algoritmu záleží v těchto krocích:

1. Najde se optimální řešení úlohy (pomocí simplexové metody) bez přihlédnutí k podmínce celočíselnosti. Je-li řešení celočíselné, je výpočet ukončen. Není-li celočíselné, přejde se k druhému kroku.
2. Na základě původních omezení se odvozuje další omezení, jež zužuje původní množinu řešení, aniž z ní vyloučí celočíselný bod.
3. U takto rozšířené úlohy se najde opět optimální řešení bez ohledu na podmínky celočíselnosti. Není-li ani nové optimální řešení celočíselné, opakují se kroky 2 a 3.

Jádro problému tkví zřejmě v konstrukci dodatečných omezení vedoucích nakonec k optimálnímu celočíselnému řešení. Předpokládejme pro určitost, že máme tuto úlohu lineárního programování:
Na množině řešení soustavy omezení

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \text{ celočíselný vektor} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned} \tag{10.18}$$

určit maximum lineární formy

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Předpokládejme dále, že jsme řešili úlohu bez ohledu na celočíselnost a že optimální bázi tvoří přitom prvních m vektorů matice **A**. Poslední část simplexové tabulky má pak tento tvar:

Tabulka 10.7

	x_{m+1}	...	x_n	
x_1	$\alpha_{1,m+1}$	...	α_{1n}	α_{10}
x_2	$\alpha_{2,m+1}$	...	α_{2n}	α_{20}
.	...	...	...	...
x_m	$\alpha_{m,m+1}$	...	α_{mn}	α_{m0}
z	$\alpha_{0,m+1}$	...	α_{0n}	α_{00}

Zde

$$\alpha_{i0} \geqq 0, \qquad \alpha_{0j} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = m + 1,\ m + 2, \ldots, n)$$

To znamená, že soustavu vlastních omezení a účelovou funkci můžeme psát ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \alpha_{10} \\ x_2 + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \alpha_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \alpha_{m0} \\ z + \alpha_{0,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{0n}x_n &= \alpha_{00} \end{aligned} \tag{10.19}$$

V optimálním řešení musíme ovšem za nezákladní proměnné $x_{m+1}, \ldots, x_n$ dosadit nuly. Jsou-li přitom náhodou α_{i0} čísla celá pro $(i = 1, 2, \ldots, m)$, je úloha vyřešena. Předpokládejme, že tomu tak není a pro určitost předpokládejme, že např. α_{l0} není celé číslo. Všechny koeficienty rovnice

$$x_l + \alpha_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{ln}x_n = \alpha_{l0} \tag{10.20}$$

můžeme pak rozdělit na dvě části: na část celočíselnou a na nezáporný zbytek. Můžeme tedy obecně psát

$$\alpha_{lj} = [\alpha_{lj}] + r_{lj},$$

kde $[\alpha_{lj}]$ je největší celé číslo obsažené v α_{lj} a
$0 \leqq r_{lj} < 1$ (r_{ij} je nula, jestliže α_j je celé číslo, jinak je to pravý zlomek).

l-té omezení (10.20) lze tedy napsat ve tvaru

$$x_l + [\alpha_{l,m+1}]\, x_{m+1} + \ldots + [\alpha_{ln}]\, x_n + r_{l,m+1}x_{m+1} + \ldots + r_{ln}x_n = [\alpha_{l0}] + r_{l0} \tag{10.21}$$

Má-li úloha celočíselné řešení, pak s ohledem na to, že $[\alpha_{lj}]$ jsou podle definice celá čísla, musí pro každé celočíselné řešení podle (10.21) platit, že výraz

$$r_{l,m+1}x_{m+1} + \dots + r_{ln}x_n - r_{l0} \tag{10.22}$$

je rovněž celé číslo. Navíc, protože všechna čísla v (10.22) jsou nezáporná a $r_{l0} < 1$, musí to být číslo celé a nezáporné. Rozšíříme nyní úlohu tak, že zavedeme novou nezápornou proměnnou s_1, definovanou rovnicí (omezením)

$$s_1 = r_{l,m+1}x_{m+1} + \dots + r_{ln}x_n - r_{l0} \tag{10.23}$$

Zkoumejme, jaký je vztah mezi původní úlohou a takto rozšířenou úlohou.

Každému nezápornému řešení rozšířené úlohy odpovídá nezáporné řešení původní úlohy. Vždyť stačí škrtnout v řešení rozšířené úlohy hodnotu s_1, abychom dostali řešení původní úlohy. Neplatí však opak; nezápornému řešení původní úlohy nemusí odpovídat nezáporné řešení rozšířené úlohy. Tak např. vidíme, že optimálnímu řešení původní úlohy, jsou-li nezákladní proměnné rovny nule, odpovídá $s_1 = -r_{l0}$, tedy řešení nepřípustné. To znamená, že připojením nového omezení se množina řešení zúžila.

To je pochopitelné, neboť přidáním dalšího omezení se může množina řešení buď zúžit, nebo zůstane nezměněna, je-li nové omezení přebytečné.

Z druhé strany jsme však viděli, že pro každé nezáporné celočíselné řešení původní úlohy je s_1 rovněž celé nezáporné číslo. To znamená, že každé nezáporné celočíselné řešení původní úlohy je zároveň nezáporným celočíselným řešením rozšířené úlohy. Geometricky nové omezení znamená další nadrovinu (na obr. 10.2 na str. 340 je to přímka s_1), která odsekne od množiny řešení část; ta však neobsahuje ani jedno celočíselné řešení.

To znamená, že jde-li jenom o celočíselná řešení, můžeme místo původní úlohy řešit úlohu rozšířenou.

Máme-li již optimální řešení (neceločíselné) původní úlohy, můžeme nové omezení připojit rovnou k soustavě (10.19), resp. k tab. 10.7 ve tvaru

$$s_1 - r_{l,m+1}x_{m+1} - \dots - r_{ln}x_n = -r_{l0}$$

Připojením nového omezení přestává být původní optimální řešení přípustným. (V připojeném omezení je záporný absolutní člen.) Optimální řešení rozšířené úlohy se najde nejvhodněji pomocí duálně simplexové metody; vyžaduje obvykle jenom několik málo dalších kroků (nejčastěji jeden nebo dva).

Není-li ani optimální řešení rozšířené úlohy celočíselné, připojíme obdobným způsobem jako předtím další omezení a další proměnnou a najdeme optimální řešení pro další rozšířenou úlohu.

Protože každým připojením nového omezení se některá řešení vylučují z množiny řešení, aniž se vylučují celočíselná řešení, dá se očekávat, že po konečném počtu takových kroků dospějeme k optimálnímu celočíselnému řešení, popř. k výsledku, který ukazuje, že úloha nemá vůbec celočíselné řešení. Okolnost, že neexistuje celočíselné řešení, se projeví buď tak, že po určitém počtu kroků nemá rozšířená úloha přípustné (nezáporné) řešení, nebo tak, že všechny koeficienty jsou již celočíselné, kromě některých koeficientů posledního sloupce (absolutních členů), viz příklad 10.7.

Důkaz uvedených tvrzení zde neuvádíme.

Všimněme si ještě konstrukce dodatečných omezení typu (10.23). Omezení (10.23) jsme odvodili z l-té řádky tab. 10.7. Jeho koeficienty získáme tak, že z příslušného koeficientu l-té řádky odečteme největší celé číslo v něm obsažené a rozdíl (který je vždy pravým zlomkem nebo nulou) opatříme záporným znaménkem. Jsou tedy všechny koeficienty dodatečného omezení buď nuly, nebo záporné pravé zlomky.

Ze způsobu odvození dodatečného omezení (10.23) je zřejmé, že toto omezení lze odvodit z kterékoli neceločíselné řádky (tab. 10.7), i z poslední řádky, popř. z libovolné lineární kombinace těchto řádků.

Při řešení celočíselných úloh je sice v zásadě lhostejné, z čeho odvozujeme dodatečné omezení (10.23), je však účelné dodatečné omezení volit tak, aby řešení co nejrychleji konvergovalo k celočíselnému. U úloh maximalizačních to znamená volit dodatečnou proměnnou tak, aby optimální hodnota účelové funkce klesla zařazením nového omezení co nejvíce.*) Prakticky je však obtížné předem určit, jak poklesne hodnota účelové funkce při tom či onom dodatečném omezení. Proto se spokojujeme s jednodušším kritériem, obdobně jako při volbě klíčového sloupce u simplexové metody, a to tak, aby absolutní hodnota pravé strany nového omezení (tj. v našem případě r_{l0}) byla co možno největší.

Ilustrujme metodu na uvedeném příkladě 10.6. Nebereme-li v úvahu podmínky celočíselnosti, dostaneme po dvou krocích řešení v tab. 10.8a až c.

Tabulka 10.8a

	x_1	x_2	
x_1' x_2' x_3'	10 8 7	9 10 $\boxed{12}$	90 80 84
z	—7	—11	0

---

*) Je totiž zřejmé, že celočíselné optimum nemůže mít hodnotu větší než optimum bez podmínky celočíselnosti. Čím rychleji klesá hodnota účelové funkce při hledání celočíselného optima, tím rychleji dospějeme k celočíselnému optimu.

Tabulka 10.8b

	x_1	x'_3	
x'_1	57/12	—9/12	27
x'_2	$\boxed{26/12}$	—10/12	10
x_2	7/12	1/12	7
z	—7/12	11/12	77

Tabulka 10.8c

	x'_2	x'_3	
x'_1	—57/26	14/13	66/13
x_1	6/13	—5/13	60/13
x_2	—7/26	4/13	56/13
z	7/26	9/13	79 9/13

Řešení obsažené v tabulce 10.8c je optimální, s ohledem na požadavek celočíselnosti je však nepřípustné. Sestrojme nové omezení na základě druhé řádky:

$$s_1 - 6/13x'_2 - 8/13x'_3 = -8/13$$

Koeficienty této rovnice jsme dostali takto:

$$-6/13 = [6/13] - 6/13 = 0 - 6/13$$
$$-8/13 = [-5/13] - (-5/13) = -1 + 5/13$$
$$-8/13 = [60/13] - 60/13 \quad = 4 - 4\,{}^{8}/_{13}$$

Tabulka 10.8d

	x'_2	x'_3	
x'_1	—57/26	14/13	66/13
x_1	6/13	—5/13	60/13
x_2	—7/26	4/13	56/13
z	7/26	9/13	79 9/13
s_1	$\boxed{—6/13}$	—8/13	—8/13

Připojíme-li koeficienty nového omezení jako další řádku k poslední tabulce, stane se řešení nepřípustným (pro $s_1 < 0$) a můžeme pomocí duálně simplexové metody hledat nové optimální řešení (tab. 10.8d a e).

Ani toto řešení není celočíselné. V tabulce 10.8e jsme proto připojili další řádku (omezení), odvozenou od řádky třetí a definující další proměnnou s_2.

Tabulka 10.8e

	s_1	x_3	
x'_1	—57/12	4	8
x_1	1	—1	4
x_2	—7/12	2/3	14/3
z	7/12	1/3	79 1/3
x'_2	—13/6	4/3	4/3
s_2	—5/12	$\boxed{—2/3}$	—2/3

Opětovným použitím duálně simplexové metody dostaneme tab. 10.8f, která již obsahuje optimální celočíselné řešení:

Tabulka 10.8f

	s_1	s_2	
x'_1	—29/4	6	4
x_1	13/8	—3/2	5
x_2	—1	1	4
z	3/8	1/2	79
x'_2	—3	2	0
x'_3	5/8	—3/2	1

Optimálním celočíselným řešením je tedy vyrábět pět kusů v provedení I a čtyři kusy v provedení II, což dává maximální zisk 79 000 Kčs.

Abychom mohli nová omezení znázornit také geometricky, vyjádříme nové proměnné s_1, s_2 pomocí původních proměnných x_1 a x_2.

Nové proměnné se podle definicí (10.23) rovnají

$$s_1 = 6/13x'_2 + 8/13x'_3 - 8/13$$
$$s_2 = 5/12s_1 + 2/3x'_3 - 2/3$$

Přitom x'_2 a x'_3 jsou přídatné proměnné v druhém a třetím omezení, tj.

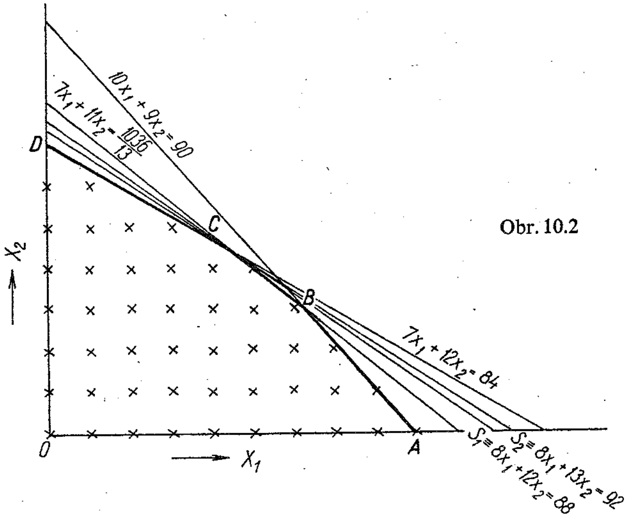
$$x'_2 = -8x_1 - 10x_2 + 80$$
$$x'_3 = -7x_1 - 12x_2 + 84$$

Dosadíme-li do s_1 a s_2, dostaneme po úpravě

$$s_1 = -8x_1 - 12x_2 + 88$$
$$s_2 = -8x_1 - 13x_2 + 92$$

To znamená, že dodatečná omezení jsou ekvivalentní těmto nerovnostem v původních proměnných:

$8x_1 + 12x_2 \leqq 88$ (na obr. 10.2 označeno s_1)
$8x_1 + 13x_2 \leqq 92$ (na obr. 10.2 označeno s_2)



Obr. 10.2

Příklad 10.7: Je třeba minimalizovat lineární formu

$$z = 6x_1 + 8x_3$$

při podmínkách

$$5x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq 16$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$
$$x_j \geqq 0, \quad \text{celé}$$

Tabulka 10.9a

	x_1'	x_3	
x_2	2/3	—1	3/2
x_1	—1/3	1	2
z	—2	—2	12

Po dvou krocích simplexové metody dostaneme tab. 10.9a, jež obsahuje neceločíselné minimum.

Optimálním neceločíselným řešením je tedy $x_1 = 2$, $x_2 = 1,5$ $x_3 = 0$, minimální hodnota účelové funkce $z = 12$. Pokračujeme-li dále Gomoryho algoritmem (v tab. 10.9b až e), dostaneme tyto další kroky:

Tabulka 10.9b

	x_1'	x_3	
x_2	2/3	—1	3/2
x_1	—1/3	1	2
z	—2	—2	12
s_1	$\boxed{-2/3}$	0	—1/2

Tabulka 10.9c

	s_1	x_3	
x_2	1	—1	1
x_1	—1/2	1	9/4
z	—3	—2	13,5
x_1'	—3/2	0	3/4
s_2	$\boxed{-1/2}$	0	—3/4

Výsledek, který jsme obdrželi, je stále ještě neceločíselný, pokračovat v algoritmu však není možno, protože všechny koeficienty u proměnných jsou celá čísla. Nelze tedy odvodit další dodatečné omezení. Úloha nemá vůbec celočíselné řešení, což je v daném případě zřejmé přímo z formulace úlohy. Rovnici

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \quad .$$

nelze totiž splnit celými čísly (kdyby x_1, x_2 a x_3 byla celá čísla, bylo by na levé straně celé sudé číslo, 11 je ovšem číslo liché). Z příkladu 10.6 je zřejmé, že geometricky jsou nová omezení obecně nadroviny, které „usekávají“ část množiny řešení.

Existuje i modifikace algoritmu „sečných nadrovin“, odvozená rovněž Gomorym, v níž není třeba předem vypočíst neceločíselné optimum a v níž klíčovým prvkem je vždy -1 (což je výhodné pro výpočty). Tomuto druhému algoritmu dáváme přednost, máme-li výchozí řešení primárně nepřípustné, avšak duálně přípustné, s koeficienty vesměs celočíselnými; je mnohem vhodnější pro strojové zpracování.

Tabulka 10.9d

	s_2	x_3	
x_2	2	—1	—0,5
x_1	—1	1	3
z	—6	—2	18
x_1'	—3	0	3
s_1	—2	0	1,5

Tabulka 10.9e

	s_2	x_2	
x_3	—2	—1	0,5
x_1	1	1	2,5
z	—10	—2	19
x_1'	—3	0	3
s_1	—2	0	1,5

Předpokládejme tedy, že v (10.19) máme primárně nepřípustné, avšak duálně přípustné řešení. Nechť je tedy $\alpha_{0,m+j} \geqq 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, n - m$ (předpokládáme úlohu maximalizační) a aspoň jeden z koeficientů α_{i0} je záporný. Z i-té rovnice soustavy, tj. z rovnice

$$x_i + \alpha_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{in}x_n = \\ = \alpha_{i0},$$

lze pak odvodit nové omezení (geometricky to bude opět sečná nadrovina) tímto postupem: dělíme obě strany rovnice číslem $\lambda > 0$ a rozložíme opět takto dělené koeficienty na část celou a nezáporný zbytek, tj. dosadíme

$$\frac{\alpha_{ik}}{\lambda} = \left[\frac{\alpha_{ik}}{\lambda}\right] + r_{ik},$$

kde $0 \leqq r_{ik} < 1$

Po nepatrné úpravě dostaneme

$$\frac{x_i}{\lambda} + r_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + r_{in}x_n = \left(-\left[\frac{\alpha_{i,m+1}}{\lambda}\right]x_{m+1} - \ldots - \left[\frac{\alpha_{in}}{\lambda}\right]x_n + \left[\frac{\alpha_{i0}}{\lambda}\right]\right) + r_{i0}$$

Na levé straně této rovnice jsou jenom nezáporná čísla. To znamená, že součet levé strany musí být nezáporný. Musí tedy být i pravá strana nezáporná. Na pravé straně máme však jednak výraz v závorce, který podle předpokladů úlohy musí být celým číslem (neboť koeficienty jsou vesměs celá čísla a neznámé musí být podle podmínek úlohy též celočíselné), a nezáporné číslo $r_{i0} < 1$.

Má-li tedy pravá strana být nezáporná, musí i výraz v závorce být celý a nezáporný. Rovnicí

$$s_1 + \left[\frac{\alpha_{i,m+1}}{\lambda}\right]x_{m+1} + \ldots + \left[\frac{\alpha_{in}}{\lambda}\right]x_n = \left[\frac{\alpha_{i0}}{\lambda}\right]$$

definujeme tak novou nezápornou a celočíselnou proměnnou. Přidáme-li tuto novou rovnici jako další omezení k soustavě (10.19), zúžíme tím opět množinu řešení, avšak neodstraníme ani jedno celočíselné řešení úlohy. To je zřejmé z toho, že nové omezení, a hlavně nezápornost s_1 plyne přímo z požadavku celočíselnosti řešení soustavy (10.19).

V simplexové tabulce připojíme nové omezení jako další řádku a volíme ji za řádku klíčovou. Přitom volíme λ tak, aby klíčový prvek se rovnal -1. Abychom to zajistili, postupujeme takto:

Za klíčový sloupec lze volit jen ten sloupec, v němž koeficient α_{ij} je záporný. Volíme ten sloupec, v němž koeficient α_{0j} v účelové funkci je nejmenší. Za klíčový sloupec volíme tedy j-tý, jestliže

$$\alpha_{0j} = \min_{\alpha_{ik} < 0} \alpha_{0k} \qquad (k = m + 1, m + 2, \ldots, n)$$

Dále je nutno provést volbu tak, aby $\left[\frac{\alpha_{ij}}{\lambda}\right] = -1$ a nové řešení bylo duálně přípustné, tj. aby platilo $\alpha_{0k} : \left(-\left[\frac{\alpha_{ik}}{\lambda}\right]\right) \geqq \alpha_{0j}$ pro všechna k, pro něž $\alpha_{ik} < 0$. Za tím účelem určíme pro všechny sloupce, v nichž $\alpha_{ik} < 0$, nejmenší celé číslo μ_k takové, že $\frac{\alpha_{0k}}{\mu_k} \geqq \alpha_{0j}$ a vypočteme $\lambda_k = -\frac{\alpha_{ik}}{\mu_k}$. Stačí pak za λ dosadit $\max_k \lambda_k$ (nebo číslo větší).

Příklad 10.8. Mějme např. řešit v celých číslech maximalizační úlohu uvedenou hned v simplexové tab. 10.10 (bez jednotkových vektorů):

Tabulka 10.10

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	2	3	—4	—1	—5
x_2	—2	4	—2	—5	—2
x_3	2	—2	1	2	5
z	5	4	2	8	80

Řešení, které je uvedeno v tabulce, je duálně přípustné, avšak primárně nepřípustné. Nepřípustnost je v první a druhé řádce. Odvódíme nové omezení z první řádky. Za klíčový sloupec volíme sloupec proměnné x_6 (koeficient v účelové funkci je tam nejmenší). Abychom vypočetli λ, určíme nejdříve μ_6 a μ_7 (jenom v těchto dvou sloupcích jsou v první řádce záporné koeficienty), a to $\mu_6 = 1$ a $\mu_7 = 4$ $\left(\text{neboť } \frac{2}{1} \geqq 2 \text{ a } \frac{8}{4} \geqq 2\right)$. Z nich pak určíme $\lambda_6 = \frac{4}{1}$, $\lambda_7 = \frac{1}{4}$. Volíme tedy $\lambda = 4$ a nové omezení bude mít tvar

$$s_1 + \left[\frac{2}{4}\right] x_4 + \left[\frac{3}{4}\right] x_5 + \left[\frac{-4}{4}\right] x_6 + \left[\frac{-1}{4}\right] x_7 = \left[\frac{-5}{4}\right],$$

tj.

$$s_1 \qquad\qquad\qquad\qquad -x_6 \qquad -x_7 = -2$$

Rozšířená simplexová tabulka bude mít tvar (tab. 10.11):

Tabulka 10.11

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	2	3	−4	−1	−5
x_2	−2	4	−2	−5	−2
x_3	2	−2	1	2	5
s_1	0	0	$\boxed{-1}$	−1	−2
z	5	4	2	8	80

Provedeme-li simplexový krok s klíčovým prvkem vyznačeným v tabulce, dostaneme tab. 10.12,

Tabulka 10.12

	x_4	x_5	s_1	x_7	
x_1	2	3	−4	3	3
x_2	−2	4	−2	−3	2
x_3	2	−2	1	1	3
x_6	0	0	−1	1	2
z	5	4	2	6	76

která již obsahuje celočíselné optimální řešení. V daném případě byl tedy algoritmus velmi efektivní.

Metodu „sečných nadrovin" lze upravit i k řešení úloh, v nichž jenom některé proměnné musí být celočíselné.

Postup je podobný jako u prvního celočíselného algoritmu. To znamená, že nejdříve řešíme úlohu bez ohledu na požadavek celočíselnosti.

Předpokládejme tedy, že v úloze lineárního programování některé proměnné mohou podle daných podmínek nabýt jen celočíselných hodnot. Označme symbolem I množinu indexů j, pro které platí, že x_j musí být celé. Dejme tomu opět, že tabulka 10.7, a tedy i soustava (10.19) obsahuje optimální řešení nesplňující požadavek celočíselnosti, tj. $\alpha_{i0} \geqq 0$ a $\alpha_{0j} \geqq 0$, ale některá α_{i0} pro $i \in I$ nejsou celá.

Koeficienty proměnných, které mají být celá čísla, můžeme opět rozdělit na dvě části, na část celou a na nezáporný zbytek. Pak i-tou rovnici (10.19) lze psát ve tvaru

$$x_i = \sum_{j \in I} [\alpha_{ij}]\, x_j + \sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I} \alpha_{ij} x_j = [\alpha_{i0}] + r_{i0},$$

anebo

$$\sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} = [\alpha_{i0}] - x_i - \sum_{j \in I} [\alpha_{ij}]\, x_j$$

Pravá strana této rovnice obsahuje jen celočíselné výrazy, je to tedy celé číslo. Může být buď a) nezáporné, anebo b) záporné (to vzhledem k celočíselnosti ne větší než − 1).

V případě a) platí

$$\sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \geqq 0$$

Tato nerovnost bude platit tím spíše, vynecháme-li v druhém součtu záporné sčítance, tj. platí

$$\sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I \; \alpha_{ij} \geqq 0} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \geqq 0$$

v případě b) platí

$$\sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \leqq -1$$

Tato nerovnost platí tím spíše, vynecháme-li na levé straně všechny kladné sčítance, tj. platí

$$\sum_{j \in I \; \alpha_{ij} < 0} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \leqq -1,$$

což po úpravě dává

$$-\sum_{j \in I \; \alpha_{ij} < 0} \alpha_{ij} x_j - (1 - r_{i0}) \geqq 0,$$

resp. po násobení zlomkem $\dfrac{r_{i0}}{1 - r_{i0}}$

$$-\frac{r_{i0}}{1 - r_{i0}} \sum_{j \in I \; \alpha_{ij} < 0} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \geqq 0$$

V každém případě tedy platí

$$\sum_{j \in I} r_{ij} x_j + \sum_{j \notin I \; \alpha_{ij} \geqq 0} \alpha_{ij} x_j - \frac{r_{i0}}{1 - r_{i0}} \sum_{j \in I \; \alpha_{ij} < 0} \alpha_{ij} x_j - r_{i0} \geqq 0$$

Nezápornost výrazu na levé straně plyne z (10.19) a z celočíselnosti x_j pro $j \in I$. Hořejší nerovnost musí být tedy splněna pro každé řešení soustavy (10.19), které splňuje též podmínky celočíselnosti. Přidáme-li soustavě (10.19) novou rovnici

$$s_1 - \sum_{j \in I} r_{ij} x_j - \sum_{j \notin I \; \alpha_{ij} \geqq 0} \alpha_{ij} \, x_j + \frac{r_{i0}}{1 - r_{i0}} \sum_{j \in I \; \alpha_{ij} < 0} \alpha_{ij} \, x_j = - r_{i0},$$

definující novou proměnnou $s_1 \geqq 0$, zúží se tím sice množina řešení soustavy (10.19), neodpadne však ani jedno řešení splňující požadavky celočíselnosti.

Všimněme si, že v novém omezení jsou všechny koeficienty záporné. Koeficienty u proměnných, které mají být celočíselné, se odvozují z původního omezení stejně jako u prvního algoritmu $(-r_{ij})$. Koeficienty u ostatních proměnných změní jenom znaménko, pokud jsou kladné, nebo se násobí zlomkem $\dfrac{r_{i0}}{1 - r_{i0}}$, jsou-li záporné.

Pro ilustraci vyřešíme předchozí příklad s tou změnou, že x_1 a x_2 mají být celá čísla. Vyřešíme jej nejdříve bez ohledu na podmínky celočíselnosti (tab. 10.13 a tab. 10.14).

Příklad 10.9.

Tabulka 10.13

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	2	3	$\boxed{-4}$	−1	−5
x_2	−2	4	−2	−5	−2
x_3	2	−2	1	2	5
z	5	4	2	8	80

Tabulka 10.14

	x_4	x_5	x_1	x_7	
x_6	−1/2	−3/4	−1/4	1/4	5/4
x_2	−3	5/2	−1/2	−9/2	1/2
x_3	5/2	−5/4	1/4	7/4	15/4
z	6	11/2	1/2	15/2	155/2

Protože ze základních proměnných je pouze proměnná x_2 vázána podmínkou celočíselnosti, odvodíme nové omezení z druhé řádky.

Jestliže $r_{20} = \dfrac{1}{2}$, pak $\dfrac{r_{20}}{1 - r_{20}} = 1$.

Dodatečné omezení má tedy tvar

$$s_1 - 3x_4 - 5/2x_5 - 1/2x_1 - 9/2x_7 = -1/2;$$

toto omezení připojíme k tab. 10.14 a řešíme (tab. 10.15 a tab. 10.16).

Tabulka 10.15

	x_4	x_5	x_1	x_7	
x_6	−1/2	−3/4	−1/4	1/4	5/4
x_2	−3	5/2	−1/2	−9/2	1/2
x_3	5/2	−5/4	1/4	7/4	15/4
z	6	11/2	1/2	15/2	155/2
s_1	−3	−5/2	−1/2	−9/2	−1/2

Tabulka 10.16

	x_4	x_5	s_1	x_7	
x_6	1	1/2	−1/2	5/2	3/2
x_2	0	5	−1	0	1
x_3	1	5/2	1/2	−1/2	7/2
z	3	3	1	3	77
x_1	6	5	−2	9	1

Řešení, které máme v poslední tabulce, již odpovídá podmínkám úlohy.

Dosud jsme uvažovali o případech, kdy proměnné mohou nabýt jakýchkoli celočíselných hodnot. Jak jsme uvedli na začátku kapitoly, v praktických problémech se často setkáváme s proměnnými, které mohou nabýt jen zcela určitých hodnot. Tak např. je-li jednou z proměnných kapacita budovaného závodu, musíme vycházet z existujících projektových variant, které se připravují jen pro určité velikosti kapacity (přiměřené daným standardům strojů a zařízení).

Úlohy, v nichž proměnné mohou nabýt jen určitých hodnot, lze převést na standardní celočíselné úlohy tak, že danou proměnnou nahrazujeme tolika proměnnými, kolika různých hodnot může nabýt, přičemž nové proměnné připouštějí pouze alternativu nula – jednotka.

Dejme tomu, že proměnná x_1 může nabýt pouze r různých hodnot $L_1, L_2, \ldots, L_r$. Pak proměnnou x_1 nahradíme r proměnnými $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ podle rovnice

$$x_1 = \delta_1 L_1 + \delta_2 L_2 + \ldots + \delta_r L_r$$

Aby přitom bylo zaručeno, že x_1 nabude pouze jedné z hodnot $L_1, L_2, \ldots, L_r$, klademe na nové proměnné tato omezení:

$$\begin{aligned} &\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r = 1 \\ &\delta_i \geqq 0 \\ &\delta_i \text{ celé číslo} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}$$

Takovéto úlohy s bivalentními proměnnými (tj. s proměnnými, které mohou nabývat jenom dvou hodnot) se v praktických aplikacích vyskytují velmi často. Gomoryho algoritmus, přestože zásadně použitelný, je u těchto úloh prakticky nevhodný. Bylo proto navrženo několik speciálních metod k řešení bivalentních úloh. V dalším výkladu se budeme v podstatě řídit metodou navrženou Balasem a dále propracovanou Bertierem a Nghiemem, která stejně jako ostatní speciální metody se hodí jen k řešení čistě bivalentních úloh.

Jsou-li v lineární optimalizační úloze všechny proměnné bivalentní, lze ji převést na tento standardní tvar:

Na množině řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{10.24}$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.25}$$

nalézt minimum lineární formy

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{10.26}$$

$$c_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

To znamená, že můžeme v každé úloze s bivalentními proměnnými předpokládat nezáporné koeficienty v účelové funkci. Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby v původní formulaci platilo pro některý index k $c_k < 0$, stačí provést substituci $x_k = 1 - x_k'$, tj. uvažovat v úloze místo proměnné x_k její doplněk k jednotce, x_k', který je rovněž bivalentní.

Omezení (10.24) bude často vhodnější psát v jiném tvaru, a to

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n \\ y_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n \\ y_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m); \end{aligned} \tag{10.24a}$$

y_i jsou zde zřejmě přídatné proměnné.

Protože každá z proměnných úlohy (10.24) až (10.26) může nabýt jen 2 hodnoty, je 2^n různých možných kombinací hodnot proměnných. V zásadě by tedy bylo možno postupovat tak, že by se z 2^n možných kombinací vyloučily kombinace nepřípustné, tj. ty, které nesplňují omezení (10.24) a mezi zbývajícími by se pak našla kombinace s minimální hodnotou z. Pro velká n je to však zřejmě cesta neschůdná (např. již pro $n = 20$ je přes milión kombinací). U všech algoritmů pro programování s bivalentními proměnnými jde o to zavést určitý systém do hledání řešení a vyloučit ze zkoumání maximální počet uvedených kombinací.

V dalším výkladu budeme pro stručnost mluvit pouze o kombinacích. Určitou kombinaci nazveme přípustnou, splňuje-li podmínky (10.24). Jinak ji nazveme nepřípustnou. Každá přípustná kombinace je tedy řešením úlohy.

Každou kombinaci ohodnotíme tak, že ji přiřadíme hodnotu účelové funkce příslušného řešení $z = \sum c_j x_j$, jestliže jde o kombinaci přípustnou, a $z = \infty$, jde-li o kombinaci nepřípustnou.

Postupujeme nyní tak, že podle jistého pravidla přisuzujeme jednotlivým proměnným hodnoty 0 nebo 1. Rozdělme množinu všech indexů $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ na dvě podmnožiny označené $\bar{J}$ a $(N - \bar{J})$ a předpokládejme, že proměnné x_j pro $j \in \bar{J}$ mají již určené hodnoty x_j, kdežto hodnoty ostatních proměnných se mají teprve určit.

Podobně budeme používat označení $X_{\bar{J}}$ pro množinu proměnných x_j, pro něž $j \in \bar{J}$.

Vzniká zde přirozeně otázka, zda má smysl v daném směru pokračovat, tj. určovat postupně hodnoty dalších proměnných. Další postup je zřejmě zbytečný, není-li naděje, že najdeme kombinaci s nižším ohodnocením z, než jsme dosud měli.

Uvažujeme za tím účelem množinu přípustných kombinací R, v nichž $x_j = x_j^0$ pro $j \in \bar{J}$, tj. množinu přípustných kombinací (řešení úlohy), v nichž hodnoty x_j pro $j \in \bar{J}$ již byly pevně určeny. Uvažujme tyto tři případy:

a) Do R patří kombinace s $x_j = x_j^0$ pro $j \in \bar{J}$ a $x_j = 0$ pro $j \in (N - \bar{J})$, která má ohodnocení $z = z^0$ (jinými slovy, přisoudíme-li všem dosud neurčeným proměnným hodnoty nulové, dostaneme přípustnou kombinaci). Pak ale s ohledem na podmínky $c_j \geqq 0$ nemůže být v R přípustná kombinace s ohodnocením nižším než z^0.

b) Množina R je prázdná, tj. neexistuje přípustná kombinace s $x_j = x_j^0$ pro $j \in \bar{J}$.

c) Odhad dolní meze ohodnocení z pro prvky množiny R je větší než ohodnocení některé již nalezené přípustné kombinace.

Nastane-li jeden z případů a), b), c), nemá smysl v ohodnocení proměnných dále pokračovat. Buď je možno se vracet tak, že změníme hodnotu jedné z proměnných v $X_{\bar{J}}$, nebyly-li už předtím vyčerpány všechny ostatní kombinace v $X_{\bar{J}}$, anebo je nutno výpočty vůbec zastavit, byly-li již všechny kombinace v $X_{\bar{J}}$ vyčerpány. V tomto případě máme buď optimální řešení [případy a) a c)], anebo výsledek, který ukazuje, že optimální řešení neexistuje (případ b).

Nenastane-li ani jeden z případů a), b), c), je možno množinu $\bar{J}$ rozšířit tak, že do ní přibereme podle určitého pravidla další prvek z $(N - \bar{J})$, tj. že ohodnotíme některou další proměnnou nepatřící do $X_{\bar{J}}$.

Ad a) Okolnost, že $x_j = x_j^0$ pro $j \in \bar{J}$ a $x_j = 0$ pro $j \in (N - \bar{J})$ je přípustnou kombinací, poznáme snadno, a to podle toho, že jsou splněny podmínky (10.24a), tj.

$$b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Ad b) Abychom snadno zjistili, že množina R je prázdná, rozdělme množinu $(N - \bar{J})$ na dvě části: na $(N - \bar{J})_i^-$, do níž patří indexy j, jimž v i-tém omezení odpovídá koeficient $a_{ij} < 0$, a $(N - \bar{J})_i^+$, do níž patří ostatní indexy z $(N - \bar{J})$. Platí-li

$$b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 - \sum_{j \in (N - \bar{J})_i^-} a_{ij} < 0$$

aspoň pro jedno i, pak je množina R určitě prázdná, neboť proměnná y_i zůstane zápornou, ať dosadíme jakékoli hodnoty za x_j pro $j \in (N - \bar{J})$.

Poněkud složitější je případ c). Není-li $x_j = x_j^0$ pro $j \in \bar{J}$ a $x_j = 0$ pro $j \in (N - \bar{J})$ přípustnou kombinací, tj. platí-li pro některé i

$$b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 < 0$$

a chceme-li „nepřípustnost odstranit“, musíme zřejmě dosadit jednotky za některá x_j, kde $j \in (N - \bar{J})_i^-$. Snahou přitom musí být, aby hodnota z rostla co nejméně. Dosadíme-li za x_j jednotku, vzroste účelová funkce o c_j a pro $j \in (N - \bar{J})_i^-$ se zároveň sníží nepřípustnost v i-tém omezení, tj. vzroste y_i o $| a_{ij} |$. Je tedy účelné dosadit jednotky především za ta x_j $[j \in (N - \bar{J})_i^-]$, pro která podíl $r_{ij} = \dfrac{c_j}{| a_{ij} |}$ má nejmenší hodnotu. Seřaďme indexy j z $(N - \bar{J})_i^-$ podle rostoucích hodnot r_{ij}, tj.

$$j_1, j_2, \ldots,$$

jestliže

$$r_{ij_1} \leqq r_{ij_2} \leqq \ldots.$$

Pak dosazujeme-li postupně jednotky za $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$, roste postupně hodnota proměnné y_i, až po určitém kroku se stane nezápornou (tj. nepřípustnost v i-tém omezení vymizí). Předpokládejme, že se tak stane při indexu j_p, tj. že platí

$$b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 + \sum_{q=1}^{p-1} | a_{ij_q} | < 0 \leqq b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 + \sum_{q=1}^{p} | a_{ij_q} |$$

Kdybychom připustili u proměnných i kladné hodnoty menší než 1, stačilo by za x_{j_p} dosadit

$$x_{j_p} = \frac{1}{a_{ij_p}} \Bigl(b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 + \sum_{q=1}^{p-1} | a_{ij_q} |\Bigr) \leqq 1,$$

aby y_i vzrostla na nulu (tj. aby se nepřípustnost v i-tém omezení odstranila). Zde x_{j_p} může být i menší než jednotka.

Při tomto „řešení“ by hodnota účelové funkce činila

$$z_i = \sum_{j \in \bar{J}} c_j x_j^0 + \sum_{q=1}^{p-1} c_{j_q} - r_{ij_p}\Bigl(b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 + \sum_{q=1}^{p-1} a_{ij_q}\Bigr)$$

Hodnota „přírůstku“ účelové funkce

$$t_i = \sum_{q=1}^{p-1} c_{j_q} - r_{ij_q}\Bigl(b_i - \sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} x_j^0 - \sum_{q=1}^{p-1} a_{ij_q}\Bigr)$$

není ovšem pro každé omezení stejná. Je však jisté, že žádný prvek množiny R nemůže mít ohodnocení menší než

$$z_{\bar{J}} = \sum_{j \in \bar{J}} c_j x_j^0 + \max_i t_i$$

V dalším použijeme $z_{\bar{J}}$ jako odhadu dolní meze ohodnocení přípustných kombinací množiny R.

Je-li $z_{\bar{J}}$ větší než některé z dříve nalezených ohodnocení přípustných kombinací (nebo je mu rovno), nepokračujeme v ohodnocování proměnných [případ c)]. Je-li $z_{\bar{J}}$ menší než nejmenší z dosud nalezených ohodnocení, přibereme do množiny $\bar{J}$ další index. Vhodný postup je ten, že v omezení, v němž t_i nabyl maxima, ohodnotíme nejdříve proměnnou x_{j_p} (tj. poslední proměnnou ve výše uvedeném pořadí), jíž bylo třeba přisoudit kladnou hodnotu ($\leqq 1$), aby nepřípustnost v i-tém omezení vymizela. U rozšířené množiny $\bar{J}$ zkoumáme opět, zda nenastal některý z případů a), b), c), atd.

Tím ale máme dán algoritmus pro řešení úloh s bivalentními proměnnými, neboť jako výchozí krok můžeme uvažovat množinu $\bar{J}$ prázdnou.

Pro ilustraci vyřešíme tento příklad:

Příklad 10.10. Na množině řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \qquad - 2x_6 &\leqq 0 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad + 2x_4 + x_5 - x_6 &\leqq -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 2x_6 &\leqq 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 - 2x_5 + 3x_6 &\leqq 4 \\ x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, 5) \end{aligned}$$

určit minimum lineární formy

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 + 2x_6$$

Je vhodné předem určit vzestupné řady r_{ij}.

$$r_{16} = \frac{2}{2} = 1 \qquad r_{12} = \frac{6}{3} = 2 \qquad r_{14} = \frac{8}{1} = 8$$

$$r_{26} = \frac{2}{1} = 2 \qquad r_{22} = \frac{6}{2} = 3$$

$$r_{35} = \frac{3}{3} = 1 \qquad r_{33} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad r_{31} = \frac{5}{1} = 5$$

$$r_{45} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad r_{44} = \frac{8}{1} = 8$$

Začneme nyní s prázdnou množinou indexů $\bar{J}_0$.

1. $\bar{J}_0 = \emptyset$. Protože dosazením nul za všechny proměnné je porušeno pouze druhé omezení, pak $t_1 = t_3 = t_4 = 0$ a pouze t_2 je kladné; $t_2 = 2$ při $x_6 = 1$.

Rozšiřme tedy množinu $\bar{J}_0$ o index 6 a uvažujme množinu $\bar{J}_1$.

2. $\bar{J}_1 = \{6\}$. Dosaďme nejdříve $x_6 = 0$. Pak opět $t_1 = t_3 = t_4 = 0$, avšak $t_2 = 1{,}5$ při $x_2 = \frac{1}{2}$.

Rozšiřme tedy $\bar{J}_1$ o index 2 na $\bar{J}_2$.

3. $\bar{J}_2 = \{2{,}6\}$. Při $x_6 = 0$ nelze dosadit $x_2 = 0$, neboť pak $y_2 < 0$ při jakýchkoli hodnotách ostatních proměnných (tj. $R = \emptyset$). Dosaďme tedy $x_2 = 1$, $x_6 = 0$. Potom

$$t_1 = t_2 = 0$$

$$t_3 = 1 \quad \text{při} \quad x_5 = 1/3$$

a

$$t_4 = 1{,}5 \quad \text{při} \quad x_5 = 1/2$$

Rozšíříme tedy množinu $\bar{J}_2$ o index 5 na $\bar{J}_3$.

4. $\bar{J}_3 = \{2, 5, 6\}$. Dosadíme-li při $x_2 = 1$, $x_6 = 0$ za novou proměnnou $x_5 = 0$, zjistíme snadno během dalšího kroku, že je nutno dosadit $x_4 = 1$, abychom mohli splnit čtvrté omezení. Tím se ale stává třetí omezení nesplnitelným. To znamená, že pro $x_2 = 1$, $x_6 = 0$, $x_5 = 0$ je $R = \emptyset$. Zkusíme tedy alternativu $x_2 = 1$, $x_6 = 0$, $x_5 = 1$. Dostáváme $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$. To znamená, že dosadíme-li nuly za ostatní proměnné, dostaneme přípustnou kombinaci a není třeba v daném směru dále pokračovat (případ a). Dostali jsme řešení $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$, $x_2 = x_5 = 1$ s hodnotou účelové funkce $z_3 = 9$.

Zbývá ještě zkoumat, zda nelze dostat lepší řešení, vyjde-li se z druhé alternativy množiny $\bar{J}_1 = \{6\}$. Uvažujme tedy

5. $\bar{J}_4 = \{5, 6\}$ a dosaďme nejdříve $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, pak $t_1 = t_2 = t_4 = 0$ a $t_3 = 3{,}5$ při $x_3 = \frac{1}{2}$.

Postupujeme dále na

6. $\bar{J}_5 = \{3, 5, 6\}$ a dosaďme nejdříve $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Potom ale v dalším kroku zbývá pro splnění třetího omezení pouze možnost $x_1 = 1$, ale při $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, $x_6 = 1$ rovněž $R = \emptyset$, neboť nelze splnit čtvrté omezení. Musíme se tedy vrátit k $\bar{J}_4$ a zkusit další alternativu.

7. $\bar{J}_4 = \{5, 6\}$; $x_5 = 1, x_6 = 1$. Zde $t_1 = t_3 = t_4 = 0$ a $t_2 = 3$ při $x_2 = \frac{1}{2}$.

Dosadíme-li $x_2 = 0$, bude $R = \emptyset$, neboť druhé omezení pak nelze splnit. Dosadíme-li $x_2 = 1$, pak už bude $z \geqq 7 + 3 + 2 = 12 > z_4$. Nemá tedy význam ani v tomto směru dále pokračovat. (Konečně tu platí také $R = \emptyset$, neboť čtvrté omezení se stává nesplnitelným.)

Tím jsme ale vyčerpali všechny možnosti a řešení sub 4.: řešení $x_2 = 1$, $x_5 = 1$, $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$, $z = 9$ je řešení optimální.

Poznámka: Jak jsme již uvedli, každou lineární bivalentní úlohu lze převést na tvar (10.24) až (10.26). Na tento tvar je však v zásadě možno převést i jiné složitější úlohy.

Především je možno na tvar (10.24) až (10.26) převést každou lineární celočíselnou optimalizační úlohu, jsou-li proměnné omezeny shora, tj. $x_j \leqq L_j$. Za těchto podmínek je totiž možno proměnné x_j vyjádřit v binární soustavě, ve tvaru

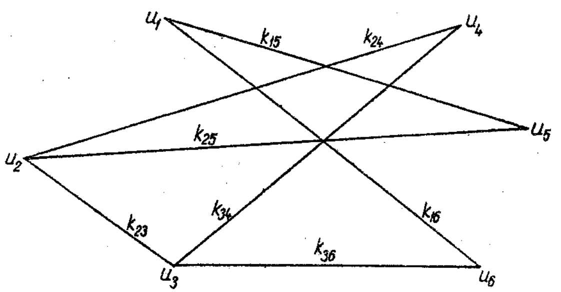
$$x_j = y_{j0} + 2y_{j1} + \dots + 2^p y_{jp},$$

kde $2^{p-1} \leqq L_j \leqq 2^p$ a y_{jk} mohou nabýt jenom hodnot 0 nebo 1.

Pomocí složitějších transformací je možno na uvedený tvar převést i obecnější úlohy.

10.4 NĚKTERÉ APLIKACE TEORIE SÍTÍ

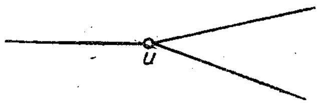
V různých praktických úlohách se setkáváme s komunikačními sítěmi. Taková síť se v podstatě skládá z uzlů u (bodů, stanic) spojených vzájemně komunikacemi (silnicemi, kolejemi, potrubím, drátovým vedením) o určité kapacitě k (propustnost, průtočnost atd.). Graficky je taková síť znázorněna na obr. 10.3.



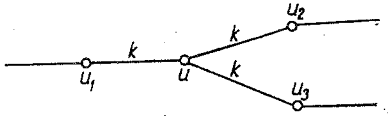
Obr. 10.3

Kapacity mohou být přitom v obou směrech stejné nebo i různé (např. je-li úsek cesty jednosměrný, je kapacita v jednom směru nulová). Na grafu to bylo možno vyznačit tak, že každé úsečce spojující dva uzly, u_i a u_j, přiřadíme dvě čísla, a to číslo k_{ij}, udávající kapacitu ve směru od u_i do u_j a k_{ji}, udávající kapacitu ve směru od u_j do u_i. Kapacita může být v obou směrech nulová, není-li např. přímé spojení mezi oběma uzly. V mnoha případech je možno kapacitu úseku považovat prakticky za neomezenou ($k_{ij} = \infty$).

U praktických komunikačních sítí bývá kapacita uzlů také omezena (např. stanicí může projet jen omezené množství vlaků). V teoretických úvahách lze však tento případ obejít tak, že místo jednoho uzlu s omezenou kapacitou uvažujeme o několika uzlech s neomezenou kapacitou, spojených úseky s omezenou kapacitou. Např. uzel u na obr. 10.4 má omezenou kapacitu k. Je-li proudění možné ve všech směrech, stačí jej nahradit čtyřmi uzly (jako na obr. 10.5) s neomezenými kapacitami. Omezení kapacity fiktivních úseků zřejmě zamezují, aby uzlem u proudilo více než k jednotek.



Obr. 10.4



Obr. 10.5

V takové komunikační síti může proudit nějaký substrát (vagóny, lodě, kapalina, plyn, elektřina) a vzniká zde řada zajímavých, ekonomicky závažných úloh, jako kolik substrátu může maximálně proudit mezi dvěma uzly, jak optimálně řídit pohyb v síti (např. v případě, že průtok různými úseky sítě je spojen s různými náklady), popř. jaká minimální síť stačí k přepravě daného objemu substrátu.

Řada jiných úloh, které nemají se skutečnou přepravou nic společného, se dá pomocí podobných sítí modelovat. Je proto účelné pojem sítě zobecnit a zkoumat některé její formální vlastnosti.

V teorii grafů se síť definuje formálně takto:

Je dána konečná množina $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$; její prvky u_i nazveme uzly. Uspořádanou dvojici uzlů (u_i, u_j) nazveme hranou. Přiřadíme-li ke každé hraně (u_i, u_j) nezáporné celé číslo k_{ij} (její kapacitu), pak nazýváme tuto množinu **sítí.**

Jestliže je kapacita v obou směrech stejná, pak pochopitelně $k_{ij} = k_{ji}$.

Proudí-li sítí nějaký substrát, pak průtok určitou hranou nemůže být větší než kapacita této hrany. Přitom protože obecně připouštíme proudění v obou směrech, považujeme průtok v jednom směru za záporný, průtok v opačném směru za kladný. Abstraktně lze tedy průtok sítí definovat tak, že přiřazujeme každé hraně (u_i, u_j) celé číslo x_{ij}, které splňuje podmínky

$$x_{ij} = -x_{ji} \tag{10.27}$$

$$x_{ij} \leqq k_{ij} \tag{10.28}$$

Je-li průtok hranou menší než její kapacita, tj. $x_{ij} < k_{ij}$, říkáme, že **hrana je nenasycena.** Rozdíl $k_{ij} - x_{ij}$ nazýváme **zbytkovou kapacitou** nebo stručně zbytkem.

Předpokládejme, že máme konkrétní úlohu, totiž dopravit určité množství nějakého substrátu z nějaké počáteční stanice (od uzlu u_0) do konečné stanice (uzel u_t) přes dopravní síť, jejíž ostatní uzly považujeme pouze za tranzitní. Určíme-li příslušný průtok sítí x_{ij}, jímž se tato přeprava realizuje, pak musí jistě platit, že

$$\sum_j x_{0j} > 0,$$

tj. celkový průtok směřující od uzlu u_0 je kladný, a že

$$\sum_j x_{tj} < 0,$$

tj. úhrnný průtok od konečného uzlu u_t je záporný (úhrnný průtok ke konečnému uzlu je kladný),

$$\sum_j x_{ij} = 0 \qquad (i \neq 0,\ i \neq t),$$

tj. úhrnný průtok ostatními uzly se rovná nule, přičemž

$$\sum_j x_{0j} = \sum_j x_{jt}$$

Jestliže je dán průtok x_{ij}, pak uzel u_0, pro nějž platí $\sum_j x_{0j} > 0$, se nazývá vstupem (zdrojem) průtoku, uzel u_t, pro nějž platí $\sum_j x_{tj} < 0$, se nazývá výstupem průtoku.

Vstup budeme značit též symbolem $\oplus$ a výstup symbolem $\ominus$.

V dalším výkladu budeme vždy předpokládat jediný vstup a jediný výstup.

První otázka, kterou budeme řešit, je otázka maximálního průtoku, tj. jaký je za daných kapacitních omezení v síti maximální průtok od vstupu k výstupu, tedy jaká je maximální hodnota $\sum_j x_{0j}$, resp. $\sum_j x_{jt}$. Je to zřejmě úloha lineárního programování, již lze formulovat takto:

Maximalizovat

$$\sum_j x_{0j}$$

při podmínkách

$$x_{ij} \leqq k_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = 0 \qquad (i \neq 0,\ j \neq t)$$

K řešení této úlohy odvodíme zvláštní metodu, která bude užitečná i při řešení jiných úloh.

10.5 MAXIMÁLNÍ PRŮTOK – MINIMÁLNÍ ŘEZ

Aby existoval vůbec kladný průtok od vstupu k výstupu, musí existovat aspoň jedna posloupnost hran, tzv. **řetěz,** vedoucí od vstupu k výstupu. Hrany řetězu mohou mít různou kapacitu; jedna z nich má kapacitu minimální. Je zřejmé, že maximální průtok takovým řetězem se rovná právě této minimální kapacitě. Jestliže je průtok řetězem menší než kapacita kterékoli hrany řetězu, jinými slovy, jsou-li všechny hrany řetězu nenasyceny, říkáme, že **řetěz je nenasycen.**

Od vstupu k výstupu vede obvykle mnoho takových řetězů. Vybereme nyní z hran sítě takový soubor, aby každý řetěz od vstupu k výstupu obsahoval aspoň jednu jeho hranu. Takový soubor hran se nazývá řezem a součet kapacit všech hran řezu se nazývá kapacitou řezu. Protože každá jednotka substrátu jdoucího od vstupu k výstupu musí projít aspoň jednou hranou řezu, je zřejmé, že žádný průtok od vstupu k výstupu nemůže být větší než kapacita kteréhokoli řezu. Najdeme-li tedy takový průtok, který se rovná kapacitě některého řezu, pak zřejmě máme maximální průtok a zároveň minimální řez.

Věta o **maximálním průtoku a minimálním řezu: Hodnota maximálního průtoku sítí se rovná kapacitě minimálního řezu.***)

Abychom uvedenou větu dokázali, stačí dokázat, že maximální průtok sítí se rovná kapacitě některého řezu:

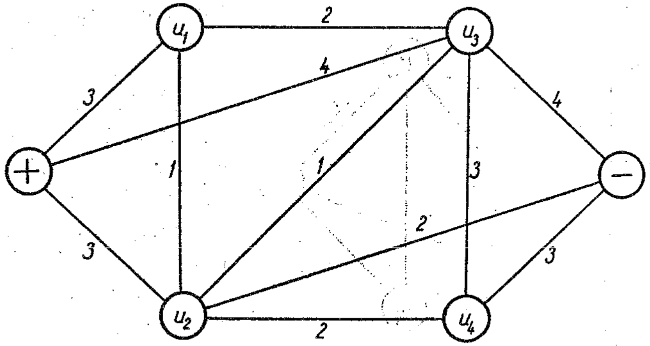
Dejme tomu, že máme maximální průtok. Z předpokladu celočíselnosti plyne, že maximální průtok existuje vždy. Rozdělme množinu uzlů sítě do dvou podmnožin U_1 a U_2 tak, že do první podmnožiny U_1 zařadíme vstup (u_0) a všechny uzly, které jsou dosažitelné od U_0 nenasyceným řetězem. Do U_2 pak dáme všechny ostatní uzly sítě. Je zřejmé, že výstup u_t musí být v U_2, jinak by totiž byl u_t dosažitelný z u_0 nenasyceným řetězem a mohli bychom tedy průtok zvýšit v rozporu s předpokladem, že máme maximální průtok.

Soubor všech hran spojujících uzly z U_1 s uzly z U_2 tvoří zřejmě řez. Kapacita tohoto řezu se musí rovnat maximálnímu průtoku. Připouštíme-li totiž, že kapacita řezu je větší než průtok, musí aspoň jedna hrana řezu zůstat nenasycena. Dejme tomu, že je to hrana (u_i, u_j), kde $u_i \in U_1$ a $u_j \in U_2$, a že platí

$$x_{ij} < k_{ij} \tag{10.29}$$

Podle definice je ale u_i dosažitelný z u_0 nenasyceným řetězem. Podle (10.29) je tedy také u_j dosažitelný z u_0 nenasyceným řetězem. To je však v rozporu s předpokladem, že u_j není prvkem U_1. Předpoklad, že kapacita řezu je větší než maximální průtok, vede tedy ke sporu, což dokazuje naši větu.

Důkaz, který jsme vedli jenom verbálně, nám dává prostředek, jak nalézt maximální průtok v síti. Začneme s libovolným průtokem, třeba s nulovým, nemůžeme-li nalézt hned lepší. Určíme pak množinu U_1 všech uzlů dosažitelných z u_0 nenasyceným řetězem. Je-li výstup u_t prvkem U_1, pak u_t je dosažitelný z u_0 nenasyceným řetězem a průtok sítí můžeme zvýšit. Není-li u_t prvkem U_1, pak již máme maximální průtok a zároveň minimální řez.



Obr. 10.6

Vezměme jednoduchý příklad znázorněný na obr. 10.6. Síť na obraze má kromě vstupu ⊕ a výstupu ⊖ další čtyři uzly a celkem 11 hran, jejichž kapacity jsou vyznačeny na obraze. Pro jednoduchost předpokládáme, že kapacita hran je v obou směrech stejná (postup sám, jak poznáme, na tomto předpokladu nezávisí).

---

*) Je zřejmé, že hodnota průtoku a kapacita řezu jsou obdobné hodnotě účelových funkcí dvojice sdružených úloh lineárního programování. Větu o maximálním průtoku a minimálním řezu lze snadno odvodit také z vět o dualitě. Zde však dokážeme větu jiným způsobem, který umožní maximální průtok určit.

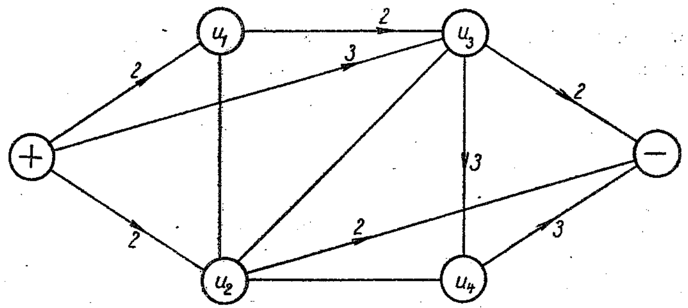
Při hledání maximálního průtoku je na první pohled zřejmé, že je možno postupovat těmito řetězy:

a) poslat 2 jednotky po cestě $\oplus$, u_1, u_3, $\ominus$,

b) poslat 3 jednotky po cestě $\oplus$, u_3, u_4, $\ominus$,

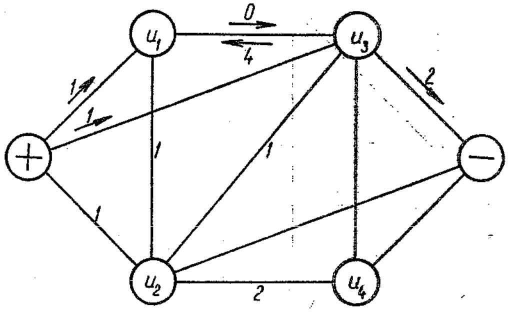
c) poslat 2 jednotky po cestě $\oplus$, u_2, $\ominus$;

ak je to znázorněno na obr. 10.7.



Obr. 10.7

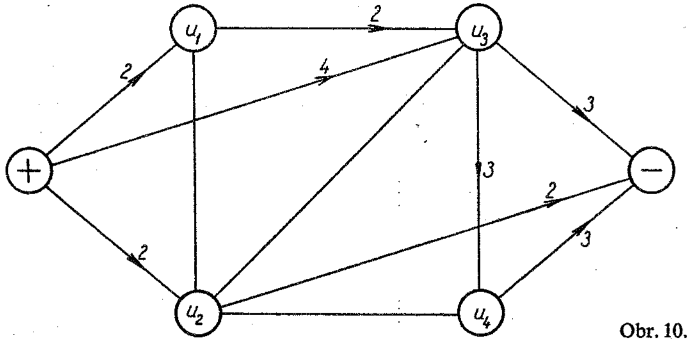
To dává celkový průtok sedmi jednotek od vstupu k výstupu. Abychom zjistili, zda jde o maximální průtok, hledáme posloupnosti nenasycených hran vedoucích od vstupu $\oplus$. V praxi to můžeme udělat tak, že odečteme průtoky (obr. 10.7) od kapacit jednotlivých hran. Dostaneme tak síť, ve které budou u každé hrany vyznačeny zbytkové kapacity, jak je uvedeno v obr. 10.8.



Obr. 10.8

Obraz se ovšem stává komplikovaným, neboť zbytkové kapacity nejsou již v obou směrech stejné a správně by bylo třeba u všech hran vyznačit zbytkové kapacity v obou směrech. Na obraze je to pro přehlednost provedeno pouze u hrany (u_1, u_3). Hranou jsme pustili průtok dvou jednotek; tím je kapacita hrany (u_1, u_3) vyčerpána. Ovšem kapacita v opačném směru, tj. kapacita hrany (u_3, u_1), tím vzrostla o dvě jednotky, jak vyplývá z (10.27) a (10.28). Tomu je třeba rozumět tak, že z u_3 do u_1 je možno nyní poslat celkem čtyři jednotky, a to tak, že jednak zrušíme opačný průtok dvou jednotek (tj. z u_1 do u_3), jednak můžeme další dvě jednotky z u_3 do u_1 skutečně poslat s ohledem na kapacitu této hrany.

Z obrázku 10.8 je zatím zřejmé, že průtok uvedený v obr. 10.7 není maximální. Po řetěze $\oplus$, u_3, $\ominus$ můžeme poslat ještě jednu jednotku. Tím celkový průtok vzroste na osm jednotek, jak je vyznačeno na obr. 10.9.

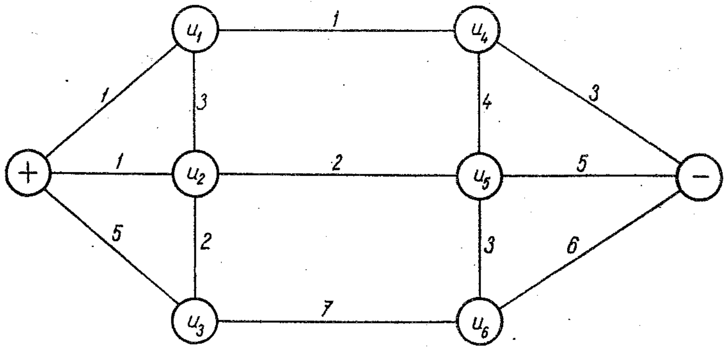


Obr. 10.9

Ani tento průtok není maximální. Snadno zjistíme, že je ještě jeden nenasycený řetěz z $\oplus$ do $\ominus$, třeba řetěz $\oplus$, u_2, u_3, $\ominus$, po kterém je možno poslat další jednotku, a tím zvýšit průtok na devět jednotek. To je už průtok maximální, což je v daném případě zřejmé již z toho, že úhrnná kapacita tří hran vedoucích do $\ominus$ je devět.

10.6 TABULKOVÉ URČENÍ MAXIMÁLNÍHO PRŮTOKU

Grafická metoda určení maximálního průtoku se stává u větších sítí nepřehlednou a je účelnější celý postup tabelovat. Postup ukážeme na jiném příkladě. Mějme síť znázorněnou na obr. 10.10.



Obr. 10.10

Údaje této sítě můžeme sestavit do tabulky, do tzv. matice kapacit (tab. 10.17).

Tabulka 10.17

	⊕	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	⊖
⊕		7	1	5				
u_1	7		3		1			
u_2	1	3		2		2		
u_3	5		2				7	
u_4		1				4		3
u_5			2		4		3	5
u_6				7		3		6
⊖					3	5	6	
				(5, ⊕)			(5, u_3)	(5, u_6)

Tabulka 10.18

	⊕	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	⊖
⊕				5				
u_1								
u_2								
u_3	—5						5	
u_4								
u_5								
u_6				—5				5
⊖							—5	

Konstrukce tabulky je jednoduchá; v každém políčku je prostě uvedena kapacita hrany vedoucí z uzlu vyznačeného v legendě tabulky do uzlu uvedeného v hlavičce. V tabulce je hned vyznačen jeden možný průtok z ⊕ do ⊖. Postup byl takový: Nejdříve jsme označili uzly dosažitelné z ⊕ .V tabulce 10.17 jsme pro přehlednost označili pouze jeden uzel, a to u_3, značkou (5, ⊕). To znamená, že je možnost poslat pět jednotek z ⊕ do u_3. Dále hledáme uzly dosažitelné z u_3. Takovým uzlem je u_6. Hrana (u_3, u_6) má sice kapacitu sedm, ale do u_3 můžeme z ⊕ dostat pouze pět jednotek, a tedy z u_3 do u_6 je možno poslat také jen pět jednotek. Proto je u uzlu u_6 značka (5, u_3). Stejný význam má značka (5, u_6) v posledním sloupci, tj. u uzlu ⊖. Dostaneme tak průtok pěti jednotek, který můžeme rovněž vyznačit v tabulce (viz tab. 10.18).

V tabulce 10.18 je v políčku (⊕, u_3) vyznačeno, že z ⊕ do u_3 jde pět jednotek. Zároveň to znamená, že v opačném směru proudí -5 jednotek, což je vyznačeno v políčku (u_3, ⊕). Takový je smysl i ostatních údajů v tabulce. Součet jednotlivých sloupců v tab. 10.18 udává, kolik jednotek přitéká do daného uzlu. U všech vnitřních sloupců to musí být pochopitelně nula; u prvního sloupce (vstup) veličina záporná a u posledního sloupce (výstup) absolutně stejná veličina kladná. Obdobné platí též o řádkách.

Odečteme-li matici průtoku v tab. 10.18 od matice kapacit v tab. 10.17, dostaneme matici zbytkových kapacit uvedenou v tab. 10.19.

Tabulka 10.19

	⊕	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	⊖
⊕		7	1					
u_1	7		3		1			
u_2	1	3		2		2		
u_3	10		2				2	
u_4		1				4		3
u_5			2		4		3	5
u_6				12		3		1
⊖					3	5	11	
		(7, ⊕)	(3, u_1)	(1, u_2)	(1, u_1)	(2, u_2)	(1, u_3)	(1, u_4) (2, u_5) (1, u_6)

Tabulka 10.20

	$\oplus$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$\ominus$
$\oplus$		3	1					
u_1	11							
u_2	1	6		1				
u_3	10		3				1	
u_4		2				4		2
u_5			4		4		3	3
u_6				13		3		
$\ominus$					4	7	12	
			$(1, \oplus)$	$(1, u_2)$		$(1, u_6)$	$(1, u_3)$	$(1, u_5)$

Tabulka 10.21

	$\oplus$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$\ominus$
$\oplus$		3						
u_1	11							
u_2	2	6						
u_3	10		4					
u_4		2				4		2
u_5			4		4		4	2
u_6				14		2		
$\ominus$					4	8	12	
		$(3, \oplus)$						

V tab. 10.20 jsme vyznačili hned tři nenasycené řetězy vedoucí z $\oplus$ do $\ominus$, a to:

řetěz $\oplus, u_1, u_4, \ominus$, po němž lze poslat 1 jednotku,

řetěz $\oplus, u_1, u_2, u_3, u_6, \ominus$, po němž lze poslat 1 jednotku

a řetěz $\oplus, u_1, u_2, u_5, \ominus$, po němž lze poslat 2 jednotky.

Tyto průtoky nebudeme již samostatně vyznačovat a odečteme je přímo z matice 10.17; dostaneme zbytkové kapacity uvedené v tab. 10.20.

V tab. 10.20 jsme našli ještě jeden nenasycený řetěz, a to $\oplus, u_2, u_3, u_6, u_5, \ominus$, po němž je možno poslat další jednotku. Odečteme-li příslušný průtok z matice 10.17, dostaneme matici zbytkových kapacit v tab. 10.21.

Tabulka 10.22

	$\oplus$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$\ominus$
$\oplus$		4	1	5				
u_1	—4		3		1			
u_2	—1	—3		2		2		
u_3	—5		—2				7	
u_4		—1						1
u_5			—2				—1	3
u_6				—7		1		6
$\ominus$					—1	—3	—6	

V tab. 10.21 můžeme se dostat nenasycenou hranou z $\oplus$ pouze do u_1. To znamená, že další průtok z $\oplus$ do $\ominus$ už není možný. To znamená, že jsme dosáhli maximálního průtoku $5 + 1 + 1 + 2 + 1 = 10$ jednotek. Protože z $\oplus$ lze dosáhnout nenasycenou hranou pouze uzlu u_1, znamená to zároveň, že souhrn hran vedoucích z $\oplus$ a u_1

k ostatním uzlům, tj. hrany

$$(\oplus, u_2) \text{ o kapacitě } 1,$$
$$(\oplus, u_3) \text{ o kapacitě } 5,$$
$$(u_1, u_2) \text{ o kapacitě } 3,$$
$$(u_1, u_4) \text{ o kapacitě } 1,$$

dávají minimální řez o kapacitě 10. Tabulku celkového průtoku dostaneme, odečteme-li zbytkové kapacity v tab. 10.21 od původních kapacit v tab. 10.17 (viz tab. 10.22).

Celkový průtok je dán součtem první řádky, resp. posledního sloupce. Stejně jako v tab. 10.18 musí i zde součet vnitřních řádků, resp. vnitřních sloupců dávat nulu.

10.7 PŘIŘAZOVÁNÍ

Pro určitost předpokládejme tento problém: Je m pracovníků, z nichž každý je kvalifikován pro některá z n různých povolání. Je otázka, zda lze každého pracovníka přiřadit k určitému povolání tak, aby žádné povolání nebylo obsazeno více než jednou.

Údaje sestavíme do tzv. kvalifikační matice $[a_{ij}]$, kde řádky odpovídají pracovníkům, sloupce povoláním. Prvky matice jsou jednotky nebo nuly, a to $a_{ij} = 1$, je-li i-tá osoba kvalifikována pro j-té povolání; jinak $a_{ij} = 0$. V tab. 10.23 je uveden příklad kvalifikační matice pro $m = 8$ osob a $n = 10$ povolání.

Naši otázku je možno nyní formulovat takto: Za jakých podmínek je možno v každé řádce vybrat jednotku tak, aby v každém sloupci byla nejvýše jedna vybraná jednotka?

Má-li být uvedené přiřazení vůbec možné, je třeba, aby $m \leqq n$, tj. aby různých povolání, pro něž jsou daní pracovníci kvalifikovaní, bylo aspoň tolik, kolik je osob. To platí zřejmě nejenom pro celou množinu m pracovníků, ale i pro každou její podmnožinu. To znamená, že vybereme-li kterékoli m_1 pracovníků $(m_1 < m)$, pak množina různých povolání, pro něž jsou kvalifikováni, musí obsahovat aspoň m_1 prvků. Jinak zřejmě není možno všechny pracovníky přiřadit jinému povolání. V dalším dokážeme, že tato podmínka je i postačující:

Má-li se přiřadit m pracovníků n různým povoláním tak, aby každý pracovník byl přiřazen a každé povolání bylo obsazeno nejvýše jednou, k tomu je třeba a postačuje, aby počet různých povolání s, pro něž je kvalifikováno kterýchkoli r osob vybraných z daných m $(r \leqq m)$, nebyl menší než r (tj. $s \geqq r$).

Že je to podmínka nutná, to jsme již vysvětlili, a že je to také podmínka postačující, dokážeme pomocí věty o maximálním průtoku. Zkonstruujeme za tím účelem síť

Tabulka 10.23

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	
P_1			$\boxed{1}$		1			1		1	
P_2	1			$\boxed{1}$		1	1				
P_3				1							
P_4	1					$\boxed{1}$					
P_5				1		1	1				$(1, \oplus)$
P_6	$\boxed{1}$			1		1	1				
P_7		$\boxed{1}$	1	1			1	1	1	1	
P_8	1				1	1	$\boxed{1}$	1	1		$(1, K_7)$
							$(1, P_5)$	$(1, P_8)$			

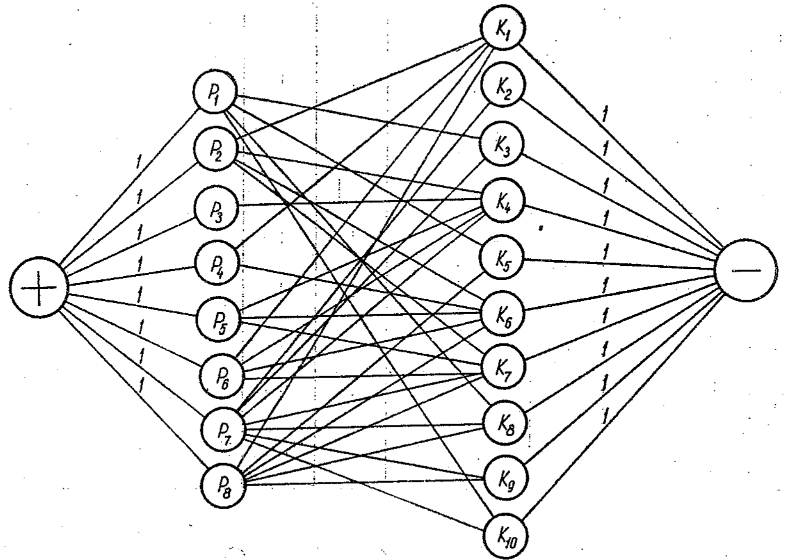
o $m + n + 2$ uzlech, kde kromě vstupu $\oplus$ a výstupu $\ominus$ je m uzlů $P_1, P_2, \ldots, P_m$, odpovídajících pracovníkům, a n uzlů $K_1, K_2, \ldots, K_n$, odpovídajících kvalifikacím. Od vstupu $\oplus$ vedou k jednotlivým uzlům P_i hrany o jednotkové kapacitě; podobně od všech uzlů K_j vedou rovněž hrany o jednotkové kapacitě k výstupu $\ominus$. Hrana (P_i, K_j) má kapacitu ∞, jestliže je P_i kvalifikován pro povolání K_j. V opačném případě má hrana (P_i, K_j) kapacitu nulovou (tj. neexistuje). Na obr. 10.11 je znázorněna síť odpovídající tab. 10.23.

Kapacity hran (P_i, K_j) nejsou na obrázku napsány; jsou vesměs ∞. Je zřejmé, že maximální průtok takovou sítí se rovná právě maximálnímu počtu pracovníků, které je možno přiřadit různým povoláním.

Předpokládejme nyní, že nelze všech m pracovníků přiřadit, tj. maximální průtok a minimální řez v příslušné síti je menší než m. Dejme tomu, že máme maximální průtok zkonstruován; nechť je

$$\{\oplus, P_1, P_2, \ldots, P_r, K_1, K_2, \ldots, K_s\}$$

množina uzlů dosažitelných z $\oplus$ po nenasycených hranách. Pak souhrn hran vedoucích z těchto uzlů k zbývajícím tvoří minimální řez. Je zřejmé, že tento minimální řez nemůže obsahovat hranu typu (P_i, K_j) (to by řez měl kapacitu ∞). To znamená, že žádná z osob P_i při $i \leqq r$ nemůže být kvalifikována pro povolání K_j při $j > s$. Jinými slovy, r osob $P_1, \dots, P_r$ je kvalifikováno nejvýše pro s různých povolání. Minimální řez se tedy skládá z $m - r$ hran vedoucích z $\oplus$ do uzlů P_i $(i = r + 1, r + 2, \dots, m)$ a z s hran $(K_j, \ominus)$ $(j = 1, 2, \dots, s)$. Celkem se tedy minimální řez skládá z $m - r + s$ hran o jednotkové kapacitě, a má kapacitu $m - r + s$. Podle předpokladu je kapacita minimálního řezu menší než m, tj.



Obr. 10.11

$$m - r + s < m,$$

čili

$$s < r$$

To znamená, že nelze-li všech m pracovníků přiřadit, musí existovat aspoň jedna skupina r osob kvalifikovaných pouze pro $s < r$ různých povolání. To naši větu dokazuje.

Způsob důkazu nám dává hned metodu, jak přiřazení prakticky provést. Můžeme k tomu použít matice průtoků stejné konstrukce jako v předchozím odstavci. Matice průtoků by ovšem obsahovala $m + n + 2$ řádků a stejný počet sloupců. Zde však stačí pracovat s maticí 10.23 a stačí předpokládat, že z nějakého zdroje vede ke každé řádce hrana o jednotkové kapacitě, dále že každé políčko obsazené jednotkou je hrana o kapacitě ∞, vedoucí od příslušného P_i ke K_j, a konečně že ode všech sloupců vede hrana o jednotkové kapacitě k výstupu.

V tabulce 10.23 je vyznačen zarámováním jeden možný průtok (volený celkem namátkově). Podle něho můžeme přiřadit šest osob k různým povoláním. Je otázka, zda to je maximální průtok. Abychom to zjistili, hledejme posloupnosti nenasycených hran vedených od $\oplus$. K tomu účelu není třeba psát ani matici zbytkových kapacit. Stačí pamatovat, že nezarámovaná jednotka v políčku P_iK_j znamená kapacitu ∞ ve směru od P_i ke K_j. Zarámovaná jednotka znamená jednotkovou kapacitu v opačném směru, od K_j k P_i (jde vlastně o možnost zrušení jednotkového průtoku z P_i do K_j).

Tak v tabulce 10.23 vede nenasycená hrana o jednotkové kapacitě z $\oplus$ do P_5, což je vyznačeno na okraji tabulky v řádce 5 značkou $(1, \oplus)$. Dále z P_5 je možno poslat jednotku do K_7 [vyznačeno pod sloupcem 7 značkou $(1, P_5)$]. Z K_7 je možno poslat zpět jednotku do P_8 (vyznačenou na okraji řádky 8) a z P_8 do K_8 (vyznačeno pod sloupcem 8). K_8 je však dosud neobsazený sloupec, tzn. že je možno poslat ještě jednotku po řetězu $\oplus$, P_5, K_7, P_8, K_8, $\ominus$. Jinými slovy, je možno přiřadit ještě jednoho pracovníka tak, že přiřadíme P_5 ke K_7, zrušíme přiřazení P_8 ke K_7, a pracovníka P_8 přiřadíme ke K_8.

Nové přiřazení je provedeno v tab. 10.24.

Tabulka 10.24

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	
P_1			$\boxed{1}$		1			1		1	
P_2	1			$\boxed{1}$		1	1				$(1, K_4)$
P_3				1							$(1, \oplus)$
P_4	1					$\boxed{1}$					$(1, K_6)$
P_5				1		1	$\boxed{1}$				$(1, K_7)$
P_6	$\boxed{1}$			1		1	1				$(1, K_1)$
P_7		$\boxed{1}$	1	1			1	1	1	1	
P_8	1				1	1	1	$\boxed{1}$	1		
	$(1, P_2)$			$(1, P_3)$		$(1, P_6)$	$(1, P_5)$				

V tabulce 10.24 je již přiřazeno 7 pracovníků. Nepřiřazen zůstává P_3. Jak je z tabulky zřejmé, je možno se z P_3 dostat nenasycenými hranami do uzlů K_4, P_2, K_1, P_6, K_6, P_4, K_7, P_5 (není mezi nimi ani jedno volné K_j). To znamená, že pět osob,

P_2, P_3, P_4, P_5 a P_6, má kvalifikaci pouze pro čtyři různá povolání, K_1, K_4, K_6 a K_7. Jedna z osob musí tedy zůstat nepřiřazena. Není tedy možno v našem příkladě přiřadit více než 7 osob.

10.8 PROBLÉM OPTIMÁLNÍHO PŘIŘAZOVÁNÍ

V přiřazovacím problému jde o to maximalizovat (popř. minimalizovat)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{10.30}$$

při podmínkách

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \tag{10.31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \tag{10.32}$$

$$x_{ij} \geqq 0, \text{ celé} \tag{10.33}$$

Předpokládejme např., že pět osob, jejichž kvalifikace pro pět různých míst, která se mají obsadit, byla vyzkoušena a obodována takto:

Tabulka 10.25

Osoby Povolání	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
P_1	60	62	75	58	100
P_2	50	48	60	60	85
P_3	56	60	60	70	80
P_4	62	72	70	70	90
P_5	60	64	74	60	92

Vyšší počet bodů znamená lepší kvalifikaci. Při optimálním přiřazení pracovníků k povoláním půjde zřejmě o to maximalizovat celkový počet bodů, tedy maximalizovat (10.30) při podmínkách (10.31), (10.32), (10.33).

Jak je známo (viz čl. 8.9), můžeme matici sazeb redukovat tak, že odečteme od sazeb v jednotlivých řádkách a sloupcích libovolné konstanty. Redukujeme-li v našem příkladě sazby tak, aby v některých políčkách byly nuly a ve zbývajících čísla záporná (nezapomeňme, že jde o maximalizaci), a obsadíme-li jenom políčka s nulovou sazbou, dostaneme optimální řešení. Na tom je založena následující metoda:

1. Provedeme redukci sazeb (libovolným způsobem) tak, aby některé sazby byly nulové, ostatní záporné.

2. Matici takto zredukovanou považujeme za kvalifikační matici ve smyslu čl. 10.7, přičemž pracovníka P_i považujeme za kvalifikovaného pro místo K_j tehdy, a jen tehdy, jestliže $c_{ij} = 0$.

3. V této matici přiřazujeme maximální počet pracovníků jednotlivým povoláním podle metody čl. 10.7. Podaří-li se přitom přiřadit všechny pracovníky, máme optimální řešení.

4. Nelze-li všechny osoby přiřadit, provedeme další redukci sazeb způsobem, který vyložíme níže.

Proveďme z počátku uvedené kroky na našem příkladě. Ve skutečnosti nebudeme při tom sazby skutečně redukovat, ale redukci pouze naznačíme, a to tak, že přiřadíme jednotlivým řádkám čísla u_i (která se mají od sazeb v řádkách odečíst) a jednotlivým sloupcům čísla v_j (která se mají odečíst od sazeb ve sloupcích) tak, aby $u_i + v_j \geqq c_{ij}$, přitom má být aspoň v některých políčkách $u_i + v_j = c_{ij}$.

Tabulka 10.26

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	u_i
P_1	60	62	75	58	$\underline{100}$	100
P_2	50	48	60	60	$\underline{85}$	85
P_3	$\underline{56}$	60	60	$\underline{70}$	$\underline{80}$	80
P_4	62	$\underline{72}$	70	70	$\underline{90}$	90
P_5	60	64	$\underline{74}$	60	$\underline{92}$	92
v_j	—24	—18	—18	—10	0	

V našem příkladě (tab. 10.26) jsme dosadili za u_i největší čísla v příslušné řádce a za v_j taková čísla, aby v každém sloupci bylo aspoň jedno políčko, kde $u_i + v_j = c_{ij}$ (pro přehlednost jsou v tabulce tyto sazby podtrženy); přitom obecně

$$u_i + v_j \geqq c_{ij}$$

Provedeme-li nyní přiřazení podle bodu 3, zjistíme, že lze přiřadit maximálně čtyři osoby, např. tak, jak je naznačeno zarámováním v tab. 10.27.

Tabulka 10.27

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	u_i	
P_1	60	62	75	58	$\boxed{100}$	100	$(1, K_5)$
P_2	50	48	60	60	$\underline{85}$	85	$(1, \oplus)$
P_3	$\boxed{56}$	60	60	$\underline{70}$	$\underline{80}$	80	
P_4	62	$\boxed{72}$	70	70	$\underline{90}$	90	
P_5	60	64	$\boxed{74}$	60	$\underline{92}$	92	
v_j	—24	—18	—18	—10	0		
					$(1, P_2)$		

V tabulce 10.27 jsou rovněž označeny uzly (stejnou metodou jako v čl. 10.7), dosažitelné po nenasycených hranách. Z toho vyplývá, že v dané kvalifikační tabulce není další přiřazení možné, protože dva pracovníci, P_1 a P_2, jsou kvalifikováni pouze pro jedno povolání K_5. Proto je třeba provést úpravy řádkových čísel v řádcích 1 a 2 tak, abychom v těchto řádkách získali další políčka s $u_i + v_j = c_{ij}$.

Za tím účelem zjistíme minimum výrazů $u_i + v_j - c_{ij}$ v políčkách ležících v označených řádkách a neoznačených sloupcích. V našem případě je to 7 (a to 100 − 18 − 75 v políčku $\overline{P_1K_3}$ a 85 − 18 − 60 v políčku $\overline{P_2K_3}$). Snížíme-li o tuto hodnotu řádková čísla v prvních dvou řádkách (v označených řádkách), dostaneme v těchto řádkách další nuly (u nás dvě). Ovšem v označených sloupcích (u nás v posledním) tím porušíme podmínku $u_i + v_j \geqq c_{ij}$. Zvyšujeme proto v označených sloupcích sloupcová čísla v_j o tutéž hodnotu.

Jak bude vypadat náš příklad po této redukci, ukazuje tab. 10.28.

Ani po této redukci sazeb nebylo možno přiřadit více než čtyři pracovníky. Označíme-li opět uzly (řádky a sloupce), které jsou od ⊕ dosažitelny nenasycenými hranami, zjistíme, že příčina tkví v tom, že tři pracovníci, P_1, P_2, P_5, jsou kvalifikováni pouze pro dvě různá povolání, K_3 a K_5. Najdeme proto v políčkách ležících v označených řádkách a neoznačených sloupcích minimální hodnotu $u_i + v_j - c_{ij}$. V našem případě je to hodnota čtyři (78 − 24 − 50 = 4 v prvním políčku druhé řádky).

Tabulka 10.28

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	u_i	
P_1	60	62	$\underline{75}$	58	$\boxed{100}$	93	$(1, K_5)$
P_2	50	48	$\underline{60}$	60	$\underline{85}$	78	$(1, \oplus)$
P_3	$\boxed{56}$	60	60	$\underline{70}$	80	80	
P_4	62	$\boxed{72}$	70	70	90	90	
P_5	60	64	$\boxed{74}$	60	92	92	$(1, K_3)$
v_j	—24	—18	—18	—10	7		
			$(1, P_1)$		$(1, P_2)$		

Hodnotu u_i snížíme v označených řádkách o čtyři a zároveň zvýšíme o čtyři hodnoty v_j v označených sloupcích. Dostaneme redukovanou matici 10.29, v níž je už možno provést přiřazení všech pěti osob. Je to ovšem optimální přiřazení (tab. 10.29).

Tabulka 10.29

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	u_i
P_1	60	62	$\underline{75}$	58	$\boxed{100}$	89
P_2	$\boxed{50}$	48	$\underline{60}$	60	$\underline{85}$	74
P_3	$\underline{56}$	60	60	$\boxed{70}$	80	80
P_4	62	$\boxed{72}$	70	70	90	90
P_5	60	64	$\boxed{74}$	60	92	88
v_j	—24	—18	—14	—10	11	

Dříve než uzavřeme tento odstavec, zformulujme ještě obecně bod 4. našeho postupu:

Nelze-li v kvalifikační matici získané redukcí sazeb přiřadit všechny osoby, provedeme další redukci sazeb tímto způsobem:

4a) Označíme všechny uzly, tj. všechny řádky a sloupce, k nimž lze dospět nenasycenými hranami z $\oplus$. Toto označení může být jednodušší, než jak jsme je dříve používali. Označíme nejdříve nepřiřazenou řádku, tj. řádku bez obsazeného políčka. V této řádce najdeme políčka s $u_i + v_j = c_{ij}$ (u nás podtržená) a označíme sloupce, v nichž tato políčka leží. V označených sloupcích najdeme obsazená políčka a označíme řádky, v nichž leží. V posledně označených řádkách hledáme další políčka s $u_i + v_j = c_{ij}$ (tj. s podtrženým c_{ij}), taková, aby v jejich sloupci bylo obsazené políčko. Najdeme-li takové políčko, označíme i příslušný sloupec a pokračujeme dále naznačeným způsobem. Nenajdeme-li, pak označení řádků a sloupců ukončíme. Jinými slovy, začneme s řádkou bez obsazeného políčka a táhneme maximální lomenou čáru, v jejíchž vrcholech jsou políčka s $u_i + v_j = c_{ij}$ střídavě neobsazená a obsazená. Všechny řady, jimiž prochází tato čára, označujeme.

4b) V políčkách ležících v označených řádkách a neoznačených sloupcích určíme $\min (u_i + v_j - c_{ij}) = \alpha$.

4c) Odečteme α od řádkových čísel označených řádků a připočteme je k sloupcovým číslům označených sloupců a v takto upravené tabulce provedeme přiřazení podle 3.

Vyložená metoda řešení přiřazovacího problému se v podstatě shoduje s maďarskou metodou, která je však založena na větě Königově. Pro názornost vyřešíme další jednoduchý příklad paralelně metodou průtokovou a metodou maďarskou.

Ze čtyř garáží, P_1, P_2, P_3, P_4, je třeba vyslat po jednom nákladním voze na čtyři místa určení, K_1, K_2, K_3, K_4. Vzdálenosti jsou uvedeny v tab. 10.30.

Tabulka 10.30

	K_1	K_2	K_3	K_4
P_1	22	16	25	20
P_2	20	15	20	16
P_3	18	15	16	20
P_4	25	20	22	21

Přiřazení je třeba provést tak, aby celkový počet ujetých km byl minimální.

Rozdíl proti předchozímu příkladu je tu jedině v tom, že namísto maximalizace tu jde o minimalizaci. Při řešení se to projeví ve volbě u_i a v_j, od které se vyžaduje, aby $u_i + v_j \leqq c_{ij}$, s tím, že α se bude v řádkách přičítat a ve sloupcích odečítat.

Tabulka 10.31

Metoda průtoková

a

	K_1	K_2	K_3	K_4	u_i
P_1	22	$\boxed{16}$	25	20	16 →
P_2	20	$\underline{15}$	20	$\boxed{16}$	15 →
P_3	$\boxed{18}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	20	15
P_4	25	$\underline{20}$	22	$\underline{21}$	20 →
v_j	3	0 ↓	1	1 ↓	

Metoda maďarská

b

	K_1	K_2	K_3	K_4	u_i
P_1	22	$\boxed{16}$	25	20	16
P_2	20	$\underline{15}$	20	$\boxed{16}$	15
P_3	$\boxed{18}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	20	15
P_4	25	$\underline{20}$	22	$\underline{21}$	20
v_j	3	0	1	1	

Tabulka 10.32

a

	K_1	K_2	K_3	K_4	u_i
P_1	22	$\boxed{16}$	25	20	17
P_2	20	$\underline{15}$	20	$\boxed{16}$	16
P_3	$\boxed{18}$	15	$\underline{16}$	20	15
P_4	25	$\underline{20}$	$\boxed{22}$	$\underline{21}$	21
v_j	3	—1	1	0	

b

	K_1	K_2	K_3	K_4	u_i
P_1	22	$\boxed{16}$	25	20	17
P_2	20	$\underline{15}$	20	$\boxed{16}$	16
P_3	$\boxed{18}$	15	$\underline{16}$	20	15
P_4	25	20	$\boxed{22}$	$\underline{21}$	21
v_j	3	—1	1	0	

10.9 DOPRAVNÍ PROBLÉM

Průtoková metoda, jíž jsme použili k řešení přiřazovacího problému, se podobně jako maďarská metoda dá snadno zobecnit na dopravní úlohu (i na některé podobné úlohy). Mějme dopravní úlohu s m dodavateli D_i o kapacitách a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, s n spotřebiteli S_j o požadavcích b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, přičemž $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, a s maticí sazeb $[c_{ij}]$. Můžeme podobně jako v předchozím odstavci zredukovat sazby tak, aby v každé řadě byla aspoň jedna sazba nulová a v ostatních zůstaly nezáporné. Stejně jako v předchozím odstavci stačí ovšem tuto redukci naznačit pomocí čísel u_i a v_j.

Takto zredukované úloze přiřadíme síť o $m + n + 2$ uzlech, kde od vstupu ⊕ vedou k m uzlům D_i hrany o kapacitě a_i, od n uzlů S_j vedou k výstupu ⊖ hrany o kapacitě b_j, a konečně od uzlu D_i k uzlu S_j vede hrana o kapacitě ∞, jestliže $u_i + v_j = c_{ij}$, a o kapacitě nulové, jestliže $u_i + v_j < c_{ij}$.

Maximální průtok v této síti sestrojíme obdobným postupem jako u problému přiřazovacího. Rovná-li se maximální průtok $\sum_i a_i$, máme řešení dopravní úlohy, které je ihned optimální. Jestliže je maximální průtok menší než $\sum_i a_i$ (větší být nemůže pro omezenost kapacit hran vycházejících z ⊕), označíme podobným způsobem jako v předchozím odstavci uzly (tj. řádky a sloupce), k nimž lze z ⊕ dospět nenasycenými hranami. Další redukci provedeme jako v předchozím odstavci atd. Podrobnosti postupu vysvitnou z příkladu:

Mějme dopravní úlohu o matici sazeb, kapacitách a požadavcích uvedených v tab. 10.33.

Tabulka 10.33

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i
D_1	12	15	14	16	18	120
D_2	17	14	15	16	17	130
D_3	18	20	16	17	15	50
D_4	19	21	18	19	20	200
b_j	100	100	100	100	100	

Přiřadíme řádkám čísla u_i a sloupcům čísla v_j jako v předchozím odstavci a zkonstruujeme maximální průtok, tj. obsadíme políčka, v nichž $u_i + v_j = c_{ij}$ (v tabulce políčka s podtrženými sazbami), maximálním počtem jednotek, jak je uvedeno v tab. 10.34.

Maximální průtok v tab. 10.34 je 450, nemáme tedy ještě řešení. Z ⊕ je možno se dostat nenasycenou hranou do D_1 a D_2 (příslušné řádky označme šipkami). Z D_1 je možno se dostat jenom do S_1 a z D_2 jenom do S_2 (sloupce S_1 a S_2 jsou rovněž označeny). Tím je označení řádků a sloupců ukončeno. Minimum $c_{ij} - u_i - v_j$ v políčkách ležících v označených řádkách a neoznačených sloupcích je jednotka ($15 - 14 - 0$ v $\overline{D_2S_3}$ a $16 - 14 - 1$ v $\overline{D_2S_4}$). Přičteme proto jednotku k u_1 a u_2 a odečteme od v_1 a v_2. V nové síti zkonstruujeme opět maximální průtok (viz tab. 10.35).

Tabulka 10.34

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i	
D_1	$\underline{12}$ 100	15	14	16	18	120	12	→
D_2	17	$\underline{14}$ 100	15	16	17	130	14	→
D_3	18	20	16	17	$\underline{15}$ 50	50	15	
D_4	19	21	$\underline{18}$ 100	$\underline{19}$ 100	20	200	18	
b_j	100	100	100	100	100			
v_j	0	0	0	1	0			
	↓	↓						

Tabulka 10.35

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i	
D_1	$\underline{12}$ 100	15	14	16	18	120	13	→
D_2	17	$\underline{14}$ 100	$\underline{15}$	$\underline{16}$	17	130	15	→
D_3	18	20	16	17	$\underline{15}$ 50	50	15	
D_4	19	21	$\underline{18}$ 100	$\underline{19}$ 100	20	200	18	→
b_j	100	100	100	100	100			
v_j	—1	—1	0	1	0			
	↓	↓	↓	↓				

V nové síti se nepodařilo průtok zvětšit. V tab. 10.35 jsou označeny všechny řady kromě posledního sloupce a třetí řádky (z D_2 je totiž možno se dostat do S_2, S_3, S_4 a z posledních dvou do D_4). Minimum $c_{ij} - u_i - v_j$ v označených řádkách a neoznačeném sloupci je nyní dvojka ($20 - 18 - 0$ v $\overline{D_4S_5}$). Přičteme proto dvě k u_1, u_2 a u_3 a odečteme od v_1, v_2, v_3 a v_4. V nové tabulce je už možno zvýšit průtok na 480, viz tab. 10.36. Po dalším kroku dostaneme optimální řešení.

Tabulka 10.36

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i	u_i
D_1	$\underline{12}$ 100	15	14	16	18	120	15
D_2	17	$\underline{14}$ 100	$\underline{15}$	$\underline{16}$	$\underline{17}$ 30	130	17
D_3	18	20	16	17	$\underline{15}$ 50	50	15
D_4	19	21	$\underline{18}$ 100	$\underline{19}$ 100	$\underline{20}$	200	20
b_j	100	100	100	100	100		
v_j	—3	—3	—2	—1	0		

Poznámka: Metody odvozené na základě teorie sítí pro celočíselné úlohy platí obecně i pro úlohy neceločíselné. Tyto metody jsou založeny na větě o maximálním průtoku a minimálním řezu. Důkaz této věty je ovšem třeba pro obecný případ doplnit důkazem o existenci maximálního průtoku.

10.10 CVIČENÍ

1. V úloze 8 z čl. 5.12 došlo k těmto zásadním změnám ve výrobních úkolech: Zvýšily se požadavky spotřebitelů na druhou složku o 180 kg a na třetí složku o 262 kg. Současně bylo prověřeno, že lze zpracovat nanejvýše 6 t první směsi, 4 t druhé a třetí směsi, 1 t páté a šesté směsi.

Navrhněte výrobní program, který umožní dosažení minimálních nákladů.

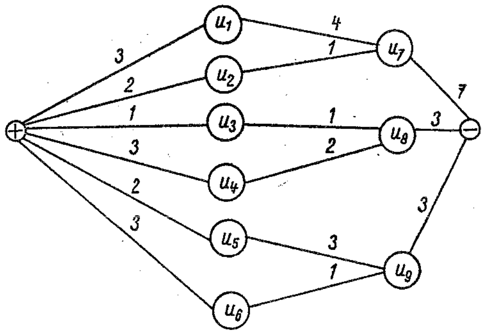
2. Navrhněte plán rozvozu dovolující dosažení minimálních dopravních nákladů v této úloze: V tab. 10.37 jsou uvedeny sazby v Kčs za dopravu 1 kusu výrobků od i-tého výrobce (V) k j-tému spotřebiteli (S) (vpravo), kapacity výrobců (a_i) v ks; požadavky spotřebitelů (b_j) v ks. Kromě toho v některých políčkách (vlevo) jsou uvedena i omezení v propustnosti tratí od i-tého výrobce k j-tému spotřebiteli.

Tabulka 10.37

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	a_i
V_1	$\boxed{125}$ 42	$\boxed{410}$ 46	60	63	$\boxed{950}$ 46	$\boxed{25}$ 28	$\boxed{135}$ 35	$\boxed{90}$ 46	765
V_2	53	55	$\boxed{720}$ 50	71	49	39	62	52	2 480
V_3	$\boxed{550}$ 40	48	61	$\boxed{55}$ 63	$\boxed{310}$ 36	$\boxed{150}$ 26	48	43	1 360
b_j	675	530	1 200	650	850	175	430	95	4 605

3. Vyřešte v této úloze graficky maximální průtok a ověřte jej tabulkovým propočtem (obr. 10.12).

4. Zjistěte, kolik aut nanejvýše může projet za 1 minutu z místa ⊕ do místa ⊖ přes body 1. až 9., jestliže kapacity silnic z místa ⊕ do bodu 1. až 4. činí 45 aut za minutu; z 1. do 5. a 6. bodu také 45 aut, z 1. do 7. bodu 50 aut; z 2. do 6. a 7. bodu 50 aut, z 2. do 8. a 9. bodu 55 aut; ze 3. do 7. bodu 55 aut, do 8. a 9. bodu 45 aut; ze 4. do 5. bodu 45 aut, do 7. a 9. bodu 50 aut a do 8. bodu 55 aut; z 5. a 8. bodu do ⊖ 50 aut, ze 6. bodu do ⊖ 55 aut a ze 7. a 9. bodu do ⊖ 45 aut. (Před výpočtem výsledek odhadněte.)



Obr. 10.12

5. Závod potřebuje zařadit 18 víceúčelových strojů po 3 do 6 výrobních linek, přičemž v každé lince má stroj sloužit jiné výrobní operaci. Výkony (hodnoceno bodově), kterých lze na strojích dosáhnout v jednotlivých linkách, jsou odlišné (viz tab. 10.38).

Tabulka 10.38

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
S_1	890	780	690	590	650	970
S_2	980	620	850	690	840	650
S_3	1 000	950	520	740	990	830
S_4	650	480	740	870	350	920
S_5	520	690	880	940	820	940
S_6	780	580	720	540	690	550

Zařaďte stroje tak, aby celkový počet dosažených bodů byl maximální.

KAPITOLA 11 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE HER

11.1 OPTIMALIZACE A KONFLIKTNÍ SITUACE

Snaha po optimalizaci výsledků má v hospodářských úvahách rozhodující význam. Proto také optimalizační schémata, jimiž jsme se zabývali, mají široké uplatnění v různých oblastech hospodářského rozhodování. Všimněme si znovu zcela obecně, oč při této optimalizaci jde. Určitý subjekt má po ruce různé prostředky v omezeném množství a rozhoduje o tom, jak těchto prostředků použít (musí ovšem mít alternativní možnosti použití těchto prostředků), aby výsledek byl podle určitého, předem dohodnutého kritéria optimální. Mlčky se tu předpokládá bezkonfliktnost, tj. že subjekt, který rozhoduje, může jednat, aniž by narazil na protiakce jiného subjektu s protichůdnými zájmy, který by mohl výsledky jeho jednání mařit. Typickými příklady takových situací je minimalizace odpadu při stříhání, minimalizace dopravních nákladů, optimální přiřazení operací strojům apod.

Bezkonfliktní situace jsou sice charakteristické pro rozhodovací problémy v socialistickém hospodářství (v hospodářství bez konkurence), nicméně nejsou ani zde všeobecné. Často se setkáváme se situací, kdy na sebe narážejí protichůdné zájmy několika stran a výsledek jednání jedné strany závisí na tom, jaká opatření podnikne strana druhá. V takových případech mluvíme o situacích konfliktních.

Vezměme například otázku sortimentu výrobků, která u nás vskutku vedla často ke konfliktním situacím (např. sortiment hutních výrobků nebo konfekce a obuvi). Dvě strany – výrobce (podnik) a spotřebitel (zákazník) – mohou mít protichůdné zájmy v pojetí sortimentu. Z hlediska zvyšování produktivity práce, a tím i úspory společenské práce může mít výrobce zájem na určitém úzkém sortimentu zboží. Spotřebitel má naopak zájem na širokém sortimentu. Jednostranná snaha výrobce po maximální úspoře společenské práce pak může vyvolat taková jednání ze strany spotřebitele, která tuto snahu maří. Nebude-li totiž spotřebitel nabízený, jemu nevyhovující sortiment kupovat, nahromadí se v podniku ležáky a společenská práce přijde nazmar.

Je zřejmé, že v takových konfliktních situacích může jednostranná optimalizace vést k nežádoucím výsledkům. Při rozhodování v konfliktních situacích je proto nezbytné brát v úvahu i jednání druhé strany – „protivníka".*) Výsledkem správného rozboru takových situací nebude patrně doporučení jediného optimálního způsobu jednání (neboť takové jednání by mohlo být zmařeno jednáním protivníka), ale spíše doporučení rozumné „strategie chování", tj. doporučení vhodného postupu v situacích, které mohou nastat, které by při jakémkoli jednání protivníka zaručilo určitý dosažitelný výsledek.

Rozborem konfliktních situací a vypracováním vhodných doporučení se zabývá teorie her. Název teorie her pochází odtud, že tato teorie buduje svůj formální aparát na základě jednoduchých modelů konfliktních situací, jakými jsou různé společenské hry.**)

Ovšem skutečné konfliktní situace, ať už ekonomické nebo vojenské, jsou zpravidla příliš složité, složitější než kterákoli hra. Společenské hry, jako šachy a karetní hry, se liší od skutečných konfliktních situací už tím, že se řídí pevnými pravidly, mnohem ostřeji definovanými, než jsou omezení ve skutečných situacích. A zatím, třeba má teorie her již velmi bohatou literaturu, je otevřena otázka, zda poskytne adekvátní prostředky k řešení složitých konfliktních situací hospodářské skutečnosti. Nicméně již sám způsob, jak teorie her přistupuje k rozboru konfliktních situací a jak formuluje otázky, je při rozboru skutečných konfliktních situací velmi užitečný a pro některé jednoduché konfliktní situace může poskytnout teorie her již teď řešení.

Hry, které se zkoumají v teorii her, jsou velmi rozmanité. Jedním ze znaků, podle nichž se hry rozlišují, je počet subjektů, stran s protichůdnými zájmy, jež se hry účastní. V dalším výkladu se omezíme jen na tzv. **hry dvou osob**, tj. hry, jichž se účastní pouze dva subjekty s protichůdnými zájmy. Nemusí ovšem jít o osoby; mohou to být skupiny osob, organizace nebo státy. Důležité je, aby při hře vystupovaly jako jedna osoba s určitými zájmy.

11.2 ZÁKLADNÍ POJMY

Abychom mohli přistoupit abstraktně k teorii her, je nutno přesněji vymezit některé pojmy.

Každá hra se řídí určitými **pravidly**. Pravidla hry určují, jak mohou jednotliví hráči jednat (tj. jaké mají možné „**tahy**"), jaké mají k dispozici informace o situaci, jak se střídají tahy hráčů a jaký je výsledek hry.

Všimněme si některých důležitých momentů, kterými se hry mohou lišit.

---

*) Pro stručnost použijme v dalším výkladu termínu „protivník" nebo „soupeř" pro subjekt, jehož jednání, ať záměrné či nahodilé, může mařit jednání naše (resp. subjektu, jehož situaci analyzujeme).

**) Že takový přístup k rozboru reálných situací může být velmi plodný, o tom nás poučuje teorie pravděpodobnosti, pro niž byly objektem studia zpočátku hazardní hry.

Jednotlivé tahy ve hře mohou být **záměrné**, tj. plně ovládané hráčem, o nichž hráč sám rozhoduje, nebo **náhodové**. Tak např. šachy nebo dáma mají jen záměrné tahy. U většiny karetních her se střídají tahy náhodové (rozdávání karet, tažení karty) s tahy záměrnými (vynášení karty). U hry v kostky jsou všechny tahy náhodové. Posledně uvedená hra ovšem není předmětem teorie her. Teorie her se zabývá pouze takovými hrami, kde hráči mají možnost rozhodování. Nezabývá se tedy čistě hazardními hrami, jako jsou kostky, ruleta apod.

Různé hry se liší podstatně i tím, jaké informace mají hráči k dispozici. Šachy jsou např. hrou s **úplnou informací**. Oba hráči mají totiž úplnou informaci o všech tazích svých i protivníka. Skutečné konfliktní situace budou v tomto směru sotva kdy podobny hře v šachy. Právě neúplnost informací o jednání protivníka tvoří obvykle podstatný moment konfliktní situace. Většina karetních her jsou hry s **neúplnou informací**.

Výsledek hry se hodnotí rovněž různě. U mnoha her se výsledek vyjadřuje výhrou (nebo prohrou, což lze psát jako zápornou výhru) určité částky peněz, u jiných her bodováním, popř. jenom konstatováním, který hráč zvítězil, nebo že hra skončila nerozhodně. U skutečných konfliktních situací bývá ovšem hodnocení výsledků podstatně složitější; závisí především na kritériích, podle nichž posuzujeme výsledek.

U her, kde se výsledek vyjadřuje peněžitou výhrou, se obvykle výhra jednoho hráče rovná prohře (tj. záporné výhře) druhého hráče čili součet výher se rovná nule. Takové hry, a jen na takové se dále omezíme, se nazývají „**hry s nulovým součtem**". Řadu her, v nichž nejde o peněžitou výhru, lze formálně upravit na hry s nulovým součtem. Např. u šachů je možno výhru hodnotit +1, prohru −1 a remis 0. Ovšem ne všechny hry jsou hrami s nulovým součtem (např. je-li třeba za použití karet platit). Zejména pak skutečné konfliktní situace nelze zpravidla zahrnout do tohoto modelu (tak např. válečný konflikt nelze rozhodně modelovat hrou s nulovým součtem). Nicméně rozbor takových her může poskytnout zajímavé výsledky i pro orientaci ve skutečných konfliktních situacích.

Nejdůležitějším pojmem teorie her je pojem **strategie** (ryzí strategie). Strategií se v teorii her rozumí předpis, kterým je určeno chování hráče (to znamená, který tah má volit) v jakékoli situaci, která se může během hry vyskytnout. U jednodušších her je možno prakticky popsat jednotlivé možné strategie toho či onoho hráče. Hráč pak může zvolit zcela určitou strategii a té se během hry držet. Zvolil-li jednou hráč určitou strategii, jeho přítomnost ve hře není ani nutná. Samo provedení může svěřit třetí osobě (nebo stroji). U složitějších her (jako jsou např. šachy) zahrnuje každá strategie takové množství možných situací, že je prakticky popsat nelze a hráč musí až při nastalé situaci uvažovat o tom, jak má táhnout. Teoreticky ovšem musíme i zde možnost popisu jednotlivých strategií připustit.

11.3 KONEČNÉ HRY

Nejdříve uvedeme několik příkladů jednoduchých her.

Příklad 11.1

Pravidla hry: Na stole je hromádka šesti zápalek. Dva hráči, řekněme A a B, berou postupně z hromádky, a to vždy nejvýše polovinu počtu zápalek, které jsou na stole. Zbývá-li na stole jediná zápalka, sebere ji hráč, který je na řadě. Za každou zápalku sebranou v prvním tahu dostane hráč jeden bod, za zápalku sebranou v druhém tahu dva body a za zápalku sebranou v třetím tahu tři body. Kromě toho dostane hráč, který sebral poslední zápalku, jeden bod navíc. Má-li hráč, který bere naposledy, sudý počet bodů, vyhraje dvojnásobek rozdílu bodů (bez ohledu na to, kdo má více bodů). Jinak vyhraje ten, kdo má více bodů, a to tolik, kolik činí rozdíl bodů.

Určeme všechny možné strategie obou hráčů.

Hráč A, který je první na tahu, může při prvním tahu vzít jednu až tři zápalky. Bere-li tři, je tím už další průběh hry určen. To znamená, že hráč B už nemá žádnou další volbu. Jinými slovy, tím, že A bere v prvním tahu tři zápalky, je jedna jeho strategie určena. Označme ji strategie s_1. Bere-li A v prvním tahu dvě zápalky, má sice hráč B ještě volbu (může brát jednu nebo dvě zápalky), pro A v druhém tahu však už žádná volba nezbude (po tahu B zůstanou na stole tři nebo dvě zápalky, A z nich musí brát jednu). Tedy rozhodnutím, že A vezme v prvním tahu dvě zápalky, je pro něho rovněž určena jedna strategie. Označme ji strategie s_2.

Konečně bere-li A v prvním tahu jednu zápalku, může na to B odpovědět buď tím, že vezme rovněž jednu zápalku, nebo dvě. V prvním případě má A ještě volbu: ze zbývajících čtyř zápalek může sebrat v dalším tahu jednu nebo dvě. V druhém případě už volbu nemá. Má tedy A další dvě strategie, a to strategii s_3, která záleží v tom, že A bere v prvním tahu jednu zápalku, a odpoví-li na to B rovněž jednou zápalkou, v druhém tahu opět zápalku, a dále strategii s_4, která záleží v tom, že A bere v prvním tahu jednu zápalku, a bere-li B také jednu, bere v druhém tahu dvě zápalky.

Více než čtyři vyjmenované strategie A nemá. Pokud jde o hráče B, jeho strategické úvahy začnou zřejmě tím, jak odpovědět na první tah A. Tato úvaha je zřejmě bezpředmětná; použije-li A své první strategie, tj. bere-li tři zápalky, pak B nemá volbu.

Bere-li A dvě zápalky, může B v prvním tahu brát jednu nebo dvě zápalky, dále pak nebude mít volbu. Podobná je situace, bere-li A v prvním tahu jednu zápalku. Má tedy B rovněž čtyři možné strategie, a to

strategii t_1 – vzít v prvním tahu jednu zápalku bez ohledu na to, jak táhl A,
strategii t_2 – vzít v prvním tahu dvě zápalky, bral-li A rovněž dvě, jinak vzít jednu,
strategii t_3 – vzít v prvním tahu dvě zápalky, bral-li A jednu, jinak vzít jednu.
strategii t_4 – vzít v prvním tahu dvě zápalky, bral-li A jednu nebo dvě.

Rozhodnou-li se oba hráči hrát určitou svou strategii, je tím průběh hry, a tedy i její výsledek, tj. výhra, resp. prohra, úplně určen.

Protože výhra jednoho hráče je prohrou (zápornou výhrou) druhého, stačí v dalším výkladu uvažovat o výhře jednoho z hráčů, pro určitost řekněme hráče A.

Je-li dána dvojice strategií s a t, je tím určena i výhra. Je tedy výhra funkcí dvojice strategií. Pokud každý z hráčů má jen konečný počet strategií, jako v našem příkladě, je možno výhry tabelovat, resp. sestavit tzv. **výplatní matici.** Pro náš příklad bude mít výplatní matice (opakujeme, že jde vždy o výhru hráče A), jak snadno spočteme, tvar*) uvedený v tab. 11.1.

VÝPLATNÍ MATICE *Tabulka 11.1*

Strategie hráče A	Strategie hráče B			
	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	—2	—2	—2	—2
s_2	10	—1	10	—1
s_3	—1	—1	3	3
s_4	6	6	3	3

Největší výhra, které zde může A dosáhnout, je 10, a to zvolí-li svou druhou strategii. Uvažuje-li však A rozumně, musí předpokládat, že jeho protivník B musí hrát stejně dobře jako on (předpokladu, že jde o rozumně uvažující hráče, se budeme držet i nadále). V tom případě nebude strategii s_2 hrát, neboť ví, že by B na to odpověděl strategií t_2 nebo t_4, což by vedlo pro A k prohře. K této otázce se však vrátíme podrobněji v dalším textu.

---

*) Jako příklad uvedeme výpočet výhry při strategiích (s_2, t_2) a (s_2, t_3). V prvním případě bere A při prvním tahu dvě zápalky, tj. dostane dva body, B nato bere rovněž dvě zápalky, tj. dostane také dva body. V druhém tahu berou oba po jedné zápalce, tj. dostanou po dvou bodech.

Tím hra skončila. A má celkem čtyři body a B, protože bral poslední, má o jeden bod více, tj. pět bodů. Je to číslo liché, a proto rozhoduje prostá bodová převaha. B tedy vyhrává jednotku neboli A vyhrává — 1. V případě (s_2, t_3) bere A při prvním tahu dvě zápalky, B jenom jednu. Při druhém tahu berou oba po jedné. Třetí tah má pouze A, který bere poslední zápalku. A dostane tedy celkem

$$2 + 2 + 3 + 1 = 8 \text{ bodů},$$

B dostane

$$1 + 2 = 3 \text{ body}.$$

Protože A bral poslední a má sudý počet bodů, vyhrává dvojnásobek rozdílu, tj.

$$2 . 5 = 10 \text{ jednotek}.$$

Poznamenejme ještě, že naše hra je **konečná**, tj. každý hráč má jen konečný počet strategií. Přitom je to hra bez náhodných tahů a s úplnou informací. Je zřejmé, že hrát takovou hru nemá mnoho smyslu. Dovedou-li oba soupeři hrát, je výsledek předurčen.

Tabulka 11.2

Strategie hráče A	Strategie hráče B	
	t_1	t_2
s_1	-1	1
s_2	1	-1

Příklad 11.2 (sudý nebo lichý)

Hráč A bere do ruky určitý počet zrnek, hráč B hádá, zda je to počet sudý či lichý. Neuhodne-li, zaplatí hráči A 1 Kčs, uhodne-li, dostane od A 1 Kčs. Tato hra, jejíž struktura je jednodušší než předchozí, obsahuje nový prvek, neinformovanost. Hra je vlastně založena na tom, že B není informován o tahu A. Hráč A má zde zřejmě dvě možné strategie, s_1 a s_2, tj. brát do rukou sudý nebo lichý počet zrnek. Podobně B má dvě možné strategie, t_1 a t_2, tj. hádat sudý nebo lichý počet zrnek.

Výplatní matice je uvedena v tab. 11.2.

Příklad 11.3 (podle Galea)

Tři karty označené 1, 2, 3 se dobře zamíchají a pak se rozdává hráčům A a B po jedné kartě. Hráč A se podívá na svou kartu a hádá, co má v ruce B. Potom hádá B, co má v ruce A. Hráč, který uhodne kartu druhého, dostane od druhého peněžní jednotku.

První tah, tj. rozdávání karet, je v této hře náhodový. Strategie hráče A záleží zřejmě v tom, určit co má hádat, dostane-li tu či onu kartu. Každou strategii hráče A můžeme tedy popsat trojicí čísel $[a_1, a_2, a_3]$, což je rovnocenné slovní instrukci: hádej a_1, dostaneš-li jednotku, hádej a_2, dostaneš-li dvojku, a hádej a_3, dostaneš-li trojku.

Protože jak za a_1, tak i za a_2 a za a_3 můžeme dosadit kterékoli ze tří čísel 1, 2, 3,*) má A teoreticky $3^3 = 27$ možných strategií. Prakticky je však zbytečné o tolika strategiích uvažovat. Dostane-li např. A jednotku, je pro něj stejně pravděpodobné, že soupeř dostane dvojku nebo trojku a není důvodu považovat hádání dvojky nebo trojky za dvě různé strategie. Zbývají tedy v tomto případě jenom dvě odlišné možnosti – hádat jednotku, tj. blufovat, nebo neblufovat. Ale úvaha blufovat, nebo neblufovat zřejmě nezávisí na tom, jakou kartu A dostal. Můžeme tedy prakticky počet možných strategií A zredukovat na dvě:

strategie s_1 = blufovat,
strategie s_2 = neblufovat.

Pro B už blufování nepřichází v úvahu. Slyší-li, jak hádal A, přicházejí pro něj v úvahu dvě odlišné možnosti: hádat stejně, tj. nevěřit soupeři, předpokládat, že blufuje (tato možnost však nepřichází v úvahu, uhádl-li A správně kartu, kterou drží B v ruce), nebo hádat odlišně. Má tedy B prakticky rovněž dvě strategie, strategii t_1 – hádat stejně jako A, a strategii t_2 – hádat odlišně.

Protože v dané hře je i náhodný tah, nebude výsledek hry (výhra) při dané dvojici strategií vždy stejný. Otázka, jakou strategii volit, bude záviset patrně na tom, jaká výhra se dá v průměru očekávat **(matematická naděje výhry)**. Zkoumejme, jaký je očekávaný výsledek ve všech čtyřech možných případech:

Případ 1. Při dvojici (s_1, t_1), tj. hraje-li A strategii s_1 (blufuje) a B strategii t_1 (hádá stejně), vyhrává B, neboť uhodne přesně, co má A, tj. výhra A činí -1.

Případ 2. Při dvojici (s_1, t_2) nehádá žádný dobře, výhra je 0.

Případ 3. Dvojice (s_2, t_1) je poněkud složitá. Hráč A má stejnou pravděpodobnost uhodnout a neuhodnout, tj. v polovině případů uhodne, co drží B, a v polovině ne. Neuhodne-li A, co má B, neuhodne ani B, co má A (t_1 znamená totiž, že B hádá stejně jako A, ovšem jen v případě, že A neuhodl, co má v ruce), tj. v těchto případech nikdo nevyhrává. V případě, že A uhodl, co drží B, hádá ovšem B některou ze zbývajících dvou karet a s pravděpodobností 1/2 uhodne, co drží A. To znamená, že A vyhrává v průměru pouze ve čtvrtině všech případů. Jeho očekávaná výhra je tedy 1/4.

Tabulka 11.3

A B	t_1	t_2
s_1	-1	0
s_2	$1/4$	$-1/4$

Případ 4. Při dvojici (s_2, t_2), neuhodne-li A (polovina případů), uhodne s určitostí B. Uhodne-li A, má B stejnou pravděpodobnost uhodnout i neuhodnout. A tedy uhodne v průměru v 50 % případů, B v 75 %. Jinými slovy, očekávaná výhra A je $-1/4$.

VÝPLATNÍ MATICE *Tabulka 11.4*

A B	t_1	t_2	...	t_n
s_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
s_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
....	....	....	....	....
s_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Příklady, které jsme uvedli, jsou příklady konečných her, tj. her, v nichž každý hráč má jen konečný počet strategií. Po formální stránce (a jen ta nás bude v teorii her zajímat), je konečná hra dvou osob s nulovým sou-

---

*) Zdálo by se, že za a_i přicházejí v úvahu dvě čísla, odlišná od i, neboť hádá-li A tutéž kartu (i), kterou drží v ruce, hádá jistě špatně. Nesmíme však zapomenout, že po A má ještě tah B, pro nějž poskytuje výrok hráče A určitou informaci. Pro A přichází proto v úvahu i klamání soupeře (blufování). Uvidíme později, že takové blufování může být v daném případě účelné.

čtem úplně popsána, je-li známo, kolik strategií mají jednotliví hráči k dispozici, a je-li známo, jaká je očekávaná výhra hráče A (záporná výhra hráče B) při kterékoli dvojici strategií. Jinými slovy, stačí udat množinu strategií hráče A – označme ji $S = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, a hráče B – označme ji $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, a stanovit ke každé dvojici (s_i, t_j) výhru hráče A – označíme ji obecně a_{ij}. Očividně je možno každou takovou hru úplně popsat pomocí výplatní matice (tab. 11.4), jak jsme to dělali v příkladech již uvedených. Pro tuto vlastnost se konečné hry dvou osob s nulovým součtem nazývají **maticovými hrami.** V dalším výkladu budou pro nás dvě hry, které mají stejnou výplatní matici, ekvivalentní, ať už je jejich konkrétní náplň jakákoli.

11.4 OPTIMÁLNÍ STRATEGIE

Je-li účelem hry maximální výhra, vzniká otázka, a je to základní otázka při strategických úvahách, zda existuje nějaký rozumný způsob hry, tj. takový způsob hry, který poskytne oběma hráčům nejlepší možný zaručený výsledek.

Osvětlíme blíže tuto otázku na našich příkladech. V příkladě 11.1 může hráč A vyhrát nejvýše 10 Kčs, hraje-li strategii s_2. Rozumný hráč však tuto strategii hrát nebude, protože je zřejmě riskantní. Zahraje-li B na odpověď strategii t_2 nebo t_4, pak hráč A prohraje jednu korunu. Jinými slovy, za předpokladu, že B hraje dobře (a my počítáme stále s rozumnými protivníky), má A při strategii s_2 zaručeno pouze -1 Kčs (tedy prohru). Hraje-li naproti tomu A strategii s_4, má zřejmě zaručenou výhru 3 Kčs. A to je také, jak je z tabulky 11.1 zřejmé, největší zaručená výhra pro A, zaručená v tom smyslu, že B nemůže tuto výhru snížit, ať hraje kteroukoli ze svých strategií.

Úvahy hráče B budou podobné; jeho snahou je rovněž maximalizovat svou výhru, nebo (což je u her s nulovým součtem totéž) minimalizovat výhru soupeře. Zahraje-li strategii t_1 nebo t_3, může B prohrát 10 Kčs. Zahraje-li t_2, může prohrát maximálně 6 Kčs. Zahraje-li t_4, může prohrát nejvýše tři Kčs. To je také optimum, kterého může B zaručeně (tj. při sebelepší hře protivníka) dosáhnout.

V daném případě existuje tedy rozumný způsob hry. Strategie s_4 je pro A strategií v jistém smyslu optimální, zaručuje mu výhru 3 Kčs, již B nemůže nijak snížit (a bude-li přitom B hrát špatně, může být výhra i vyšší). Naopak také strategie t_4 je pro B optimální, zabraňuje, aby A vyhrál více než 3 Kčs (a bude-li A hrát špatně, může být výsledek pro B ještě lepší).

Příklad 11.2 už není v tomto směru tak jednoduchý. Hraje-li A trvale svou první strategii (s_1), hráč B to brzy vystihne a bude hrát t_1, takže A prohraje. Podobně je tomu, hraje-li A trvale strategii s_2. Jinými slovy, žádná z obou strategií nezaručuje A větší výhru než -1.

B má zde stejné strategie jako A a nemůže ani jednou ze svých strategií zabránit tomu, aby A vyhrál $+1$.

Vidíme, že zde optimální strategie ve smyslu prvního příkladu neexistuje. Tato hra je ovšem příliš jednoduchá a je zřejmé, že bude-li A nějakým náhodným způsobem střídat obě své strategie, bude asi v polovině případů vyhrávat, v polovině prohrávat. Jinými slovy, jeho očekávaná výhra bude nula.

V třetím příkladě je situace pro A složitější. Hraje-li s_1, může na to B odpovědět strategií t_1 a A vyhraje -1 (prohraje 1). Hraje-li s_2, může nato B hrát t_2 a A vyhraje v průměru $-1/4$. Je otázka, zda si A nemůže zaručit lepší výsledek. Touto otázkou se budeme zabývat ještě dále.

Zkoumejme nyní otázku obecně. Vyjděme přitom z tab. 11.4 na str. 385. Hraje-li A strategii s_i, musí počítat s tím, že B mu odpoví tou ze svých strategií, která zredukuje výhru A na minimum. Jinými slovy, hraje-li A strategii s_i, musí počítat s tím, že má zaručenu jenom minimální výhru dosažitelnou touto strategií, tj. má zaručeno

$$\min_j a_{ij}$$

Nechce-li hrát zbytečně riskantně (a to nesmí, uvědomuje-li si, že má rozumného soupeře), pak zřejmě zvolí takovou strategii, při které je toto minimum největší. Přitom bude mít zaručenu výhru rovnající se

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

Je to minimální výhra, kterou si může hráč A zaručit. Nazveme ji stručně **dolní cenou hry,** nebo prostě **maximinem,** a označme ji $\underline{v}$. Příslušnou strategii označíme někdy stručně také jako **strategii maximinovou.**

Úvaha hráče B je podobná. Chce rovněž vyhrát co nejvíce, nebo, což je v daném případě totéž, chce zredukovat výhru A na minimum. Hraje-li strategii t_j, má zaručeno, že A nevyhraje více než $\max_i a_{ij}$. Bude proto volit takovou strategii, při níž je toto maximum nejmenší. Při této tzv. **minimaxové strategii** má B zaručeno, že neprohraje více než

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

Je to nejlepší výsledek, jaký si může B zaručit. Jinými slovy je to maximální výhra A, jejímuž překročení může B zabránit. Nazveme ji proto **horní cenou hry** nebo prostě **minimaxem** a označíme ji $\bar{v}$. Intuitivně je zřejmé, že horní cena hry nemůže být menší než dolní. Pro důležitost tohoto tvrzení dokážeme tuto větu:

Máme-li matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, pak

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij} \tag{11.1}$$

Důkaz:

Pro dané i je $\min_j a_{ij} \leqq a_{ij}$, a tedy také

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \max_i a_{ij}$$

Protože levá strana poslední nerovnosti nezávisí na indexu j, platí též

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij}$$

Platí-li

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \tag{11.2}$$

nebo, což je totéž,

$$\underline{v} = \bar{v} = v,$$

tj. rovná-li se maximin minimaxu, pak při rozumné hře nezbývá hráči A nic jiného, než hrát svou maximinovou strategii; hráči B zbývá jen hrát strategii minimaxovou. Oba si tím zaručují optimální výsledek. Hráč A si zaručuje, že nevyhraje méně než v a hráč B si zaručuje, že nevyhraje méně než $-v$ (tj. že hráč A nevyhraje více než v). V takovém případě říkáme, že existují **optimální strategie.** Pro hráče A je optimální maximinová strategie, pro hráče B je optimální strategie minimaxová. Zaručenou výhru v nazýváme přitom **cenou hry.**

Má-li hra dvojici optimálních strategií, říkáme stručně, že má řešení, přesněji: řešení v oboru ryzích strategií (viz čl. 11.5). Hra je řešena, jsou-li určeny optimální strategie a cena hry. Hra se obvykle nazývá korektní, jestliže $v = 0$; jinak je nekorektní.

V našem příkladě (11.1) optimální strategie existují. Pro hráče A je optimální strategie s_4, pro hráče B strategie t_4. Cena hry je 3, tj. hráč A si může správnou volbou strategie zaručit minimálně výhru 3 Kčs a hráč B může správnou volbou strategie zabránit tomu, aby A vyhrál více.

Poznámka: Pro B je tato hra zřejmě nevýhodná. Dovede-li B dobře analyzovat své strategie, nebude takovou hru hrát (nebude-li k tomu nějak donucen).

Platí-li u nějaké hry rovnice (11.2), tj. má-li řešení, pak v případě, že optimální strategie jsou hráčům známy, nemá smysl takovou hru hrát. Výsledek hry je totiž předem určen a stačí, ohlásí-li hráč A svou optimální strategii a hráč B také svoji.

Obecně ovšem rovnice (11.2) neplatí, jak jsme to viděli u příkladů 2 a 3. Platí-li u nějaké maticové hry rovnice (11.2), tj. má-li hra řešení, pak ve výplatní matici musí být cena hry zároveň nejmenším prvkem ve své řádce a největším prvkem ve svém sloupci. Prvek matice, který je nejmenší ve své řádce a zároveň největší ve svém sloupci (tj. prvek a_{kl}, pro nějž platí zároveň $a_{kl} \leqq a_{kj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a $a_{kl} \geqq a_{il}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se nazývá sedlovým bodem matice. Stručně budeme také říkat, že hra má **sedlový bod,** má-li výplatní matice sedlový bod.

Dokážeme nyní, že má-li výplatní matice sedlový bod, platí rovnice (11.2) a hra má tedy řešení.

Předpokládejme tedy, že výplatní matice $\mathbf{A}$ typu $(m \, . \, n)$ má sedlový bod a_{kl}.

Pak podle definice platí, že

$$a_{il} \leqq a_{kl} \leqq a_{kj} \qquad \text{(pro všechna } i \text{ a } j\text{)}$$

a platí tedy také, že

$$\max_i a_{il} \leqq a_{kl} \leqq \min_j a_{kj} \tag{11.3}$$

Obecně však zřejmě platí

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqq \max_i a_{il} \tag{11.4}$$

a

$$\max_i \min_j a_{ij} \geqq \min_j a_{kj} \tag{11.5}$$

Podle (11.3) však

$$\max_i a_{il} \leqq \min_j a_{kj}$$

a podle (11.4) a (11.5) musí tedy v daném případě platit, že

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqq \max_i a_{il} \leqq \min_j a_{kj} \leqq \max_i \min_j a_{ij} \tag{11.6}$$

Podle (11.1) nemůže být levá strana nerovnosti (11.6) nikdy menší než pravá, to znamená, že u her se sedlovým bodem musí platit, že

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$$

Máme tedy dokázáno, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby maticová hra měla řešení (řešení v oboru ryzích strategií), je existence sedlového bodu ve výplatní matici. Zároveň je zřejmé, že číselná hodnota sedlového bodu je cenou hry.

Podle výše uvedeného se řešení maticových her může redukovat na hledání sedlového bodu.

Má-li hra sedlový bod a znají-li hráči své optimální strategie, je předem určeno, jakou průměrnou výhru mohou jednotliví hráči očekávat. Jde-li o hru bez náhodových tahů, je výsledek hry úplně předurčen. Je proto velmi účelné zkoumat, zda hra má sedlový bod, a určit jej. To je konečně důležité i při reálných konfliktních situacích.

Existuje-li v takové situaci sedlový bod a dovedou-li jej soupeři správně analyzovat, pak může konflikt skončit rozumnou dohodou.

Dá se dokázat, že každá **hra s úplnou informací má sedlový bod.**

Poznámka: Řada her, jako šachy, dáma apod., patří do výše uvedené skupiny her. Jsou to přitom hry bez náhodových tahů. Kdyby hráči znali u těchto her své optimální strategie, přestala by taková hra vlastně být hrou. Ovšem u některých her existuje tak velké množství strategií, že je prakticky nelze všechny určit (např. u šachů). U některých jednodušších her je možno optimální strategie snadno určit, a pokud se hry přece hrají, pak jedině z neznalosti.

11.5 SMÍŠENÁ STRATEGIE

Nyní se budeme zabývat otázkou, zda nelze pojmy optimální strategie, cena hry a řešení zobecnit. Většina her (i reálných konfliktních situací) nemá totiž sedlový bod, a nemá tedy řešení ve výše uvedeném smyslu. Už při povrchním rozboru příkladu 11.2 jsme viděli, že je mnohdy účelné střídat různé strategie. Pochopitelně střídání strategií nesmí být systematické (to by soupeř brzo poznal a využil ve svůj prospěch), ale náhodové, tj. řízené pomocí nějakého náhodového mechanismu.

Nemá-li hra sedlový bod, pak podle (11.1) platí

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

Výhra, kterou si může A volbou nejlepší své strategie (tzv. maximinové strategie) zaručit (neboli dolní cena hry $\underline{v}$), je tedy menší než horní cena hry $\bar{v}$, tj. než taková výhra hráče A, jejíž překročení může hráč B volbou své nejlepší strategie (minimaxové strategie) zabránit. Budou-li oba hrát své nejlepší strategie ve výše uvedeném smyslu pak bude výhra zřejmě mezi $\underline{v}$ a $\bar{v}$.

Nyní vyvstává otázka, zda si A nemůže vhodným střídáním strategií zaručit větší výhru než $\underline{v}$ a podobně, zda si B nemůže zaručit vhodným střídáním svých strategií menší prohru než $\bar{v}$. Abychom tuto otázku zodpověděli, zavedeme pojem smíšené strategie.

Říkáme, že hráč volí **smíšenou strategii**, volí-li svou strategii náhodově, a to pomocí mechanismu, který zaručuje, že při delším opakování hry se jednotlivé strategie vyskytnou s určitými relativními četnostmi. Přesněji říkáme, že hráč A hraje smíšenou strategii

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m], \quad \text{kde } x_i \geqq 0, \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

volí-li svou strategii pomocí náhodového mechanismu tak, že při mnohonásobném opakování hry bude se relativní četnost strategie s_i blížit (stochasticky) hodnotě x_i. Pravděpodobnost, se kterou bude hráč A hrát strategii s_i je tedy x_i. Podobně definujeme smíšenou strategii $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ hráče B.

Tak např. má-li hráč A dvě možné strategie, s_1 a s_2, pak pod smíšenou strategií [1/2, 1/2] budeme rozumět, že volí svou strategii náhodově tak, aby při delším opakování hry obě strategie měly stejnou relativní četnost. Vhodným náhodovým mechanismem pro tento účel je třeba házení mince nebo tahání kuličky z urny, ve které je stejný počet bílých a černých kuliček. Smíšená strategie [1/2, 1/2] se bude hodit oběma hráčům v příkladě 11.2.

Smíšená strategie je zřejmě zobecněním pojmu, tzv. ryzí strategie, který jsme zavedli dříve. Ryzí strategie je zvláštním případem smíšených strategií. Např. ryzí strategie je smíšená strategie s $x_i = 1$ a $x_j = 0$ pro $j \neq i$. Stručně tedy můžeme ryzí strategii s_i označit $\mathbf{e}_i$ (i-tý jednotkový vektor).

Podívejme se nyní, jaká je očekávaná výhra (hráče A) při smíšených strategiích. Mějme obecně hru s výplatní maticí jako v tab. 11.4. Hraje-li A smíšenou strategii $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ a B smíšenou strategii $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, pak pravděpodobnost výskytu dvojice strategií (s_i, t_j), spojené s výhrou a_{ij}, bude $x_i y_j$. To znamená, že očekávaná hodnota výhry, již označíme $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bude

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j, \tag{11.7}$$

nebo v maticové symbolice

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}\text{*)} \tag{11.8}$$

Zavedením pojmu smíšené strategie se počet strategií podstatně rozšířil. Hráč A má např. kromě m ryzích strategií nekonečně mnoho smíšených strategií.

Dříve zavedené pojmy sedlový bod, optimální strategie, řešení hry, cena, je možno nyní zobecnit i na hry rozšířené o smíšené strategie. Říkáme, že hra má **řešení v oboru smíšených strategií**, jestliže existuje taková dvojice smíšených strategií $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, že pro všechny strategie $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leqq E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leqq E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$.

Hra má řešení, existují-li $\max\limits_{\mathbf{x}} \min\limits_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a $\min\limits_{\mathbf{y}} \max\limits_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a platí-li $\max\limits_{\mathbf{x}} \min\limits_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\limits_{\mathbf{y}} \max\limits_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Tato společná hodnota očekávané výhry se pak nazývá cenou hry. Smíšená strategie, která zaručuje hráči A minimální výhru v, se nazývá jeho optimální strategií. Podobně se definuje optimální strategie hráče B.

Vraťme se nyní k příkladu 11.2 (sudý nebo lichý) a zkoumejme, zda má řešení ve smíšených strategiích. Ať volí A kteroukoli ze svých ryzích strategií, nemůže zaručit

---

*) Platí totiž

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \sum_i x_i \sum_j a_{ij} y_j$$

Avšak $\sum\limits_j a_{ij} y_j$ je skalárním součinem i-té řádky matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{y}$, tj. je i-tým prvkem vektoru $\mathbf{Ay}$. Výraz na pravé straně poslední rovnice je tedy skalárním součinem vektorů $\mathbf{x}^T$ a $\mathbf{Ay}$, tj. rovná se $\mathbf{x}^T\mathbf{Ay}$.

výhru větší než -1, tj. dolní cena hry je $v = \max_i \min_j a_{ij} = -1$. Podobně ze strategií B zjistíme, že horní cena hry je $\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = +1$.

Předpokládejme ale, že A hraje smíšenou strategii $[x, 1 - x]$, kde $0 < x < 1$ a že B hraje smíšenou strategii $[y, 1 - y]$, kde $0 < y < 1$. Pak očekávaná výhra se podle (11.7) bude rovnat $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -xy + x(1 - y) + (1 - x)\,y - (1 - x)(1 - y)$

$$= (2x - 1)(1 - 2y) \tag{11.9}$$

Rozhodne-li se A pro určitou smíšenou strategii $\mathbf{x}_0$, pak musí opět počítat s tím, že má zaručenu jen nejnižší výhru, která je při této strategii, tj. že má zaručeno jen

$$\min_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} (2x_0 - 1)(1 - 2y)$$

Proto bude volit takovou smíšenou strategii, při které toto minimum dosahuje maxima; přitom si zaručí výhru

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} (2x - 1)(1 - 2y)$$

V našem příkladě taková maximinová strategie skutečně existuje. Je to pro hráče A strategie $\mathbf{x}_0 = [1/2, 1/2]$. Dosadíme-li totiž $x = \frac{1}{2}$, bude očekávaná výhra podle (11.9) rovna nule. Při jakékoli jiné strategii však může A prohrát. Zahraje-li třeba A smíšenou strategii $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\left(\text{tj. } x = \frac{1}{4}\right)$, může na to B odpovědět svou druhou čistou strategií (tj. $y = 0$) a pak podle (11.9) dostaneme

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \,.\, 1 = -\frac{1}{2}$$

Opakujeme-li obdobnou úvahu pro B, zjistíme, že v oboru smíšených strategií existuje rovněž minimaxová strategie; je to opět strategie $\mathbf{y} = [1/2, 1/2]$, přičemž

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Příklad 11.2 má tedy řešení v oboru smíšených strategií, tj. existuje v něm dvojice optimálních strategií, a cena hry je nula.

Podívejme se ještě na příklad 11.3, který je sám o sobě zajímavý. Jak jsme viděli, je v ryzích strategiích dolní cenou hry $-\frac{1}{4}$ (když A neblufuje) a horní cenou je $+\frac{1}{4}$

(říká-li B totéž, co A). Hraje-li nyní A smíšenou strategii $\mathbf{x} = [x, 1 - x]$ a B smíšenou strategii $\mathbf{y} = [y, 1 - y]$, očekávaná výhra bude činit

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -xy + \frac{1}{4}(1 - x)\,y - \frac{1}{4}(1 - x)(1 - y) \tag{11.10}$$

$$= \frac{y}{2}(1 - 3x) + \frac{1}{4}(x - 1) = -\frac{1}{} - \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{6}\right)$$

Hraje-li A smíšenou strategii $\mathbf{x}_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, zajistí si výhru $-\frac{1}{6}$, bez ohledu na to, co bude hrát B. Dosadíme-li totiž $x = \frac{1}{3}$ do (11.10), dostaneme $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{6}$ při jakémkoli y. Volí-li A jakoukoli jinou strategii, bude jeho výhra menší (jeho prohra větší). Dosadíme-li do (11.10) $x > \frac{1}{3}$, pak B může zahrát svou první ryzí strategii ($y = 1$) a průměrná výhra bude

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - 3x}{2} + \frac{x - 1}{4} = \frac{1 - 5x}{4},$$

což je pro $x > \frac{1}{3}$ menší než $-\frac{1}{6}$. Podobně dosadíme-li $x < \frac{1}{3}$, pak B může hrát svou druhou ryzí strategii ($y = 0$) a střední výhra bude opět menší než $-\frac{1}{6}$. Je tedy strategie $\mathbf{x} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ maximinovou strategií A.

Podobně můžeme z (11.10) usuzovat, že pro B je nejlepší strategií $\mathbf{y} = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$, která zaručuje, že A nemůže vyhrát více než $-1/6$.

Má tedy tato hra opět řešení s cenou $-\frac{1}{6}$. Výsledek je, zejména pro A, velmi zajímavý. Optimální strategií pro A je blufovat v jedné třetině případů (přesněji s pravděpodobností 1/3). V ostatních dvou třetinách případů musí hádat ze zbývajících dvou karet. Může to zařídit třeba tímto způsobem: Pořídí si výpomocně stejnou trojici karet, s jakou se hraje. Jakmile dostane kartu, vytáhne jednu kartu náhodově z pomocného balíčku. Vytáhne-li stejnou kartu, jakou má v ruce, bude blufovat, tj. řekne kartu, kterou má v ruce (resp. kterou vytáhl). Vytáhne-li jinou, bude hádat tu, kterou vytáhl. Jinými slovy, hádá pokaždé to, co si náhodně vytáhne z pomocného balíčku. To je však úplně nezávislé na tom, kterou kartu dostal. Jinými slovy, pro jeho hru nemá význam, jakou kartu má v ruce. Informace, kterou mu rozdaná karta poskytuje, není mu užitečná. Využívá-li informaci, kterou tato karta poskytuje, poskytuje tím zároveň informace také protivníkovi.

Řekli jsme, že hry mají řešení v ryzích strategiích pouze výjimečně. Na našich příkladech jsme však viděli, že mají řešení ve smíšených strategiích. Nyní se naskýtá otázka, zda to platí obecně pro všechny maticové hry. Ukazuje se, že ano. Platí totiž tato věta **(základní věta teorie her)**:

Každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích.*)

V každé maticové hře existují smíšené strategie $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{y}_0$, které mají tu vlastnost, že

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leqq E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leqq E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \tag{11.11}$$

$\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{y}_0$ jsou pak optimální strategie pro A, resp. B (dvojice smíšených strategií $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ je sedlovým bodem hry rozšířené o smíšené strategie).

Slovy to znamená, že v každé maticové hře existuje pro hráče A smíšená strategie $\mathbf{x}_0$, taková, že jeho střední výhra nebude menší než cena hry $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = v$, ať hraje B kteroukoli ze svých strategií (ryzých či smíšených). Podobně pro B existuje smíšená strategie $\mathbf{y}_0$, taková, že zahraje-li ji B, nemůže střední výhra A činit více než $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, ať hraje A kteroukoli ze svých strategií.

Tabulka 11.5

Strategie hráče A	Strategie hráče B			
	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	5	4	6	8
s_2	3	5	5	6
s_3	8	4	8	3

Předpokládejme například, že máme hru s touto výplatní maticí (tab. 11.5).

Matice nemá sedlový bod. Horní cena hry se rovná pěti (při strategii t_2) a dolní cena čtyřem (při strategii s_1).

Optimální smíšenou strategií pro A je [0, 2/3, 1/3], tj. hrát s_2 s pravděpodobností 2/3 a s_3 s pravděpodobností 1/3 (nehrát vůbec strategii s_1). Při této strategii má A zaručenu střední výhru 14/3 (cena hry), což je více než dolní cena hry. Strategie s_2 a s_3, které mají v optimální strategii A kladné pravděpodobnosti, nazýváme jeho **aktivními (účinnými) strategiemi.**

Pro hráče B je optimální smíšená strategie [1/6, 5/6, 0,0]. Tato strategie mu zaručuje, že jeho střední prohra nebude větší než 14/3 (je to méně než horní cena hry). Strategie t_1 a t_2, které mají v optimální strategii hráče B kladné pravděpodobnosti, jsou aktivními strategiemi hráče B.

Nyní předpokládejme, že A hraje svou optimální strategii [0, 2/3, 1/3]. Odpovídá-li na to B svou optimální strategií, bude se výhra A rovnat přesně ceně hry $\left(\frac{14}{3}\right)$. Odchýlí-li se B od své optimální strategie, pak výhra A nemůže být podle předchozí věty menší než 14/3, může být jedině větší. Všimněme si přesněji, že odpoví-li B kteroukoli ze svých aktivních strategií (t_1, resp. t_2) nebo jejich libovolnou (konvexní) kombinací, bude výhra stále 14/3. Odpoví-li B kteroukoli jinou strategií (ryzí nebo smíšenou), bude výhra A (tj. prohra B) větší. Tak např. odpoví-li B strategií t_3, bude výhra A $\frac{2}{3}5 + \frac{1}{3}8 = \frac{18}{3}$.

---

*) Důkaz této věty zatím neuvádíme. Vyplyne z ekvivalence maticové hry s určitým problémem lineárního programování v příštím odstavci.

Podobně můžeme zjistit, že odpoví-li A na optimální strategii B kteroukoli ze svých aktivních strategií nebo jejich kombinací, výhra se bude stále rovnat ceně hry. Odpoví-li A jinou než aktivní strategií, bude výhra menší než cena hry. Odpoví-li např. A na optimální strategii B, tj. na strategii [1/6, 5/6, 0,0] svou strategií s_1, vyhraje pouze $\frac{1}{6}5 + \frac{5}{6}4 = \frac{25}{6} < \frac{14}{3}$.

Výsledky tohoto příkladu je možno zobecnit. Strategie hráče A (B), které mají v kterékoli z jeho optimálních strategií kladné pravděpodobnosti, nazýváme jeho aktivními strategiemi.

Hraje-li jeden z hráčů svou optimální strategii, pak, odpoví-li na to druhý hráč kteroukoli ze svých aktivních strategií, zůstává výhra stejná a bude se rovnat ceně hry. Odpoví-li druhý hráč jinou než aktivní strategií, změní se výsledek v jeho neprospěch.

Mějme hru s výplatní maticí

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a předpokládejme pro určitost, že aktivními strategiemi hráče A je jeho prvních k strategií a jeho optimální strategie je $\mathbf{x}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0]$, kde $x_i > 0$, $\sum x_i = 1$. Podobně nechť aktivními strategiemi hráče B je jeho prvních r strategií a jeho optimální strategií je $\mathbf{y}_0 = [y_1, y_2, \dots, y_r, 0, \dots, 0]$. Cena hry v se tedy rovná

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_i y_j, \tag{11.12}$$

což lze psát ve tvaru

$$v = y_1 \sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i + y_2 \sum_{i=1}^{k} a_{i2} x_i + \dots + y_r \sum_{i=1}^{k} a_{ir} x_i \tag{11.13}$$

nebo ve tvaru

$$v = x_1 \sum_{j=1}^{r} a_{1j} y_j + x_2 \sum_{j=1}^{r} a_{2j} y_j + \dots + x_k \sum_{j=1}^{r} a_{kj} y_j \tag{11.14}$$

Z rovnice (11.12) je ale zřejmé, že musí platit

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i = \sum_{i=1}^{k} a_{i2} x_i = \dots = \sum_{i=1}^{k} a_{ir} x_i = v$$

Kdyby totiž uvedené součty si nebyly rovny, pak jeden z nich je nejmenší. Dejme tomu, že právě

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i \leqq \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i$$

Zvolí-li v tomto případě B svou strategii $[1, 0, \ldots, 0]$, tj. svou první ryzí strategii, bude střední výhra A činit při jeho optimální strategii $\mathbf{x}_0$

$$1 . \sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i = [y_1 + y_2 + \ldots + y_r] \sum_{i=1}^{k} a_{i1} x_i < v$$

Výhra při jeho optimální strategii by tedy klesla pod cenu hry, což je v rozporu s pojmem optimální strategie.

Stejně plyne z (11.14), že

$$\sum_{j=1}^{r} a_{1j} y_j = \sum_{j=1}^{r} a_{2j} y_j = \ldots = \sum_{j=1}^{r} a_{kj} y_j = v$$

Tím je první část našeho tvrzení dokázána. Předpokládáme-li, že $\mathbf{y}_0$ je jediná optimální strategie B, snadno dokážeme také druhou část tvrzení, tj. že

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i > v \quad \text{pro} \quad j > r$$

11.6 ŘEŠENÍ MATICOVÝCH HER

Základní věta teorie her uvedená v předchozím odstavci tvrdí, že každá maticová hra má řešení, nedává však prostředky k řešení těchto her. Velmi jednoduché je nalézt řešení her, jejichž výplatní matice obsahuje sedlový bod. To jsou však případy výjimečné.

Obecně lze maticovou hru řešit tak, že ji převedeme na problém lineárního programování s počtem omezení rovnajícím se počtu řádků nebo sloupců výplatní matice, jak dokážeme níže. Je tedy řešení maticových her obecně pracné. Proto je účelné, dříve než přistoupíme k řešení hry, zjednodušit výplatní matici.

Vezměme nejdříve příklad. Dejme tomu, že máme hru s výplatní maticí (tab. 11.6).

Tabulka 11.6

Strategie hráče A	Strategie hráče B					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
s_1	2	—1	—4	5	3	6
s_2	4	2	—1	1	—1	3
s_3	6	5	4	—2	—5	1
s_4	4	5	4	—2	—5	1
s_5	2	—2	—4	4	2	4
s_6	4	2	—1	1	—1	3

Podíváme-li se zde blíže na strategie A, zjistíme snadno, že strategie s_6 je stejná jako s_2. Je tedy možno jednu z nich, třeba s_6, vynechat. Dále vidíme, že strategie s_4 nedává pro A v žádném případě (tj. při žádné hře B) výsledek lepší než strategie s_3. Je totiž $a_{41} < a_{31}$ a $a_{4j} = a_{3j}$ pro $j > 1$. Strategie s_4 je tedy pro A nevýhodná a při rozumné hře ji A hrát nebude. Můžeme tedy strategii s_4 z tabulky vůbec vynechat. Podobně zjistíme, že je pro A naprosto nevýhodná strategie s_5, neboť v žádném případě nedává pro A lepší výsledek než s_1. Vyškrtneme-li tedy strategii s_4, s_5 a s_6, dostaneme zjednodušenou výplatní matici

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & -4 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & -2 & -5 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Podle stejné úvahy můžeme nyní přistoupit k redukci počtu strategií B. Strategie t_1 je pro B nevýhodná, protože dává pro B při jakékoli ze zbývajících strategií A horší výsledky (větší prohru) než strategie t_2. Podobně je pro B nevýhodná strategie t_2 v porovnání s t_3 a strategie t_4 a t_6 jsou nevýhodné v porovnání se strategií t_5. Vynecháme-li nevýhodné strategie t_1, t_2, t_4 a t_6, zjednodušuje se výplatní matice takto:

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_3 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} -4 & 3 \\ -1 & -1 \\ 4 & -5 \end{array} \right] \end{array}$$

Bližší zkoumání ukazuje, že ani strategie s_2 není pro A výhodná. Zahraje-li totiž A smíšenou strategii $x_1 = \dfrac{1}{2}$ a $x_3 = \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{tj. strategii, v níž hraje obě čisté strategie } s_1 \text{ a } s_3 \text{ se stejnou pravděpodobností } \dfrac{1}{2}\right)$, pak jeho očekávaná výhra bude $\dfrac{-4 + 4}{2} = 0$, zahraje-li B strategii t_3, a $\dfrac{3 - 5}{2} = -1$, zahraje-li B strategii t_5. Při této smíšené strategii nebude pro A výsledek v žádném případě horší než při strategii s_2. Lze tedy výplatní matici zjednodušit ještě dále na

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_3 & t_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} -4 & 3 \\ 4 & -5 \end{array} \right] \end{array}$$

Tím se nám podařilo zredukovat výplatní matici na typ (2.2).

Obecně, je-li některá řádka výplatní matice, např. k-tá, taková, že žádný její prvek není větší než příslušný prvek jiné řádky, třeba l-té, tj. platí-li $a_{kj} \leqq a_{lj}$ (pro všechna *j*), pak říkáme, že *k*-tá strategie hráče *A* je dominována jeho *l*-tou strategií. Podobně říkáme, že *k*-tá strategie je dominována některou smíšenou strategií $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, jestliže $a_{kj} \leqq \sum_i a_{ij}x_i$ pro všechna *j*. Při výpočtu optimálních strategií je zřejmě možno všechny dominované strategie vynechat.

Podobně platí-li pro *r*-tý sloupec výplatní matice $a_{ir} \geqq a_{is}$ pro všechna *i*, říkáme, že *r*-tá strategie hráče *B* je dominována jeho *s*-tou strategií. Je-li $a_{ir} \geqq \sum_j a_{ij}y_j$, pak říkáme, že *r*-tá strategie je dominována smíšenou strategií $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Podaří-li se vynecháním dominovaných strategií zredukovat výplatní matici na typ (2.2), je řešení hry dále již jednoduché. Nemá-li totiž hra o výplatní matici typu (2.2) sedlový bod, pak zřejmě musí být obě strategie aktivní. Máme-li tedy matici

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

bez sedlového bodu, bude pro *A* optimální strategie $[x, 1 - x]$, kde $0 < x < 1$, která vyhovuje podmínce

$$a_{11}x + a_{21}(1 - x) = a_{12}x + a_{22}(1 - x)$$

V našem příkladě vypočteme snadno, že optimální strategií *A* je [9/16, 7/16], optimální strategií *B* je $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a cena hry je $-\frac{1}{2}$.

Na základě podobné úvahy se dají určit optimální strategie v každém případě, kdy výplatní matici lze redukovat na typ (2 . *n*) nebo (*m* . 2). Konečně takové hry lze snadno řešit i graficky.

Nyní ukážeme, že je možno obecně každou maticovou hru řešit jako problém lineárního programování.

Mějme tedy hru s výplatní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že cena hry (je to zatím veličina neznámá) je kladná, tj. $v > 0$.*) Pak optimální strategie hráče *A* $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$ musí splnit tyto podmínky:

---

*) Tento předpoklad nenarušuje obecnost našich úvah. Podmínky $v > 0$ je možno dosáhnout vždy např. tím, že ke všem prvkům matice přičteme dosti velké kladné číslo, tak aby všechny prvky byly kladné. Změní se tím jenom cena hry, nikoli optimální řešení.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m &\geqq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m &\geqq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m &\geqq v \end{aligned} \qquad (11.15)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \qquad (11.16)$$
$$x_i \geqq 0$$

Dělíme-li obě strany nerovností (11.15) číslem *v* a označíme-li $\frac{x_i}{v} = u_i$, dostaneme s ohledem na $v > 0$

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m &\geqq 1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m &\geqq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m &\geqq 1 \end{aligned} \qquad (11.17)$$

$$u_i \geqq 0 \qquad (11.18)$$

a z (11.16)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \frac{1}{v} \qquad (11.19)$$

Hráč *A* chce maximalizovat svou výhru, nebo, což je totéž, minimalizovat $\frac{1}{v}$. Abychom našli optimální strategie pro hráče *A*, stačí na množině řešení soustav nerovností (11.17) a (11.18) nalézt minimum funkce (11.19). To je ale běžný problém lineárního programování. Známe-li optimální hodnoty u_i, najdeme snadno cenu hry

$$v = \frac{1}{\sum_i u_i}$$

i optimální strategie hráče *A*.

Je zřejmé, že hledání optimálních strategií hráče *B* vede k úloze duální.

Všimněme si ještě, že jsou-li prvky matice **A** vesměs nezáporné (a toho můžeme úpravou hry vždy dosáhnout), má úloha lineárního programování s účelovou funkcí (11.19) a s omezeními (11.17) a (11.18), i úloha k ní duální, přípustné řešení. To znamená, že obě úlohy mají optimální řešení se společnou hodnotou účelové funkce. Z toho však základní věta teorie her bezprostředně plyne, neboť řešení jedné úlohy – minimalizační, jak čtenář snadno odvodí, dává

$$\frac{1}{\max\limits_{\mathbf{x}} \min\limits_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

a řešení druhé dává

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

Z vět o dualitě pak plyne, že obě tyto veličiny existují a mají stejnou hodnotu.

Ukázali jsme, že každé hře lze přiřadit určitou úlohu lineárního programování. V teorii her se dokazuje také opak, a to že každé úloze lineárního programování lze přiřadit určitou maticovou hru.

KAPITOLA 12 NELINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

12.1 PŘÍKLADY ÚLOH VEDOUCÍCH NA NELINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

V dosavadním výkladu jsme pojednávali o modelech, ve kterých se neznámé vyskytovaly pouze v první mocnině, a to jak v účelové funkci, tak i v omezeních. Takový model téměř vždy zjednodušuje skutečnost. Toto zjednodušení používáme buď proto, že pro vybudování přesnějšího modelu nemáme dostatečné podklady, nebo proto, že zavedením nelinearit se značně zkomplikují a prodraží výpočty. Ve většině případů je takové zjednodušení zcela na místě a výsledky získané tímto způsobem jsou dostatečně přesné. Mohou se však vyskytnout situace, kdy předpoklad linearity by silně znehodnotil výsledky, v krajním případě natolik, že by výpočet ztratil význam vůbec.

Protože připuštěním nelinearit se také matematická stránka věci stává složitější, omezíme se jen na stručný přehled nelineárního programování – disciplíny, která se zmíněnými nelineárními případy zabývá.

Nejdříve uvedeme několik příkladů, které ukazují, jak můžeme v praxi dospět k nelineárním modelům. Prvním nelineárním modelem, který byl získán jako zobecnění modelu lineárního, je následující dopravní problém s nelineární účelovou funkcí. Uvažování „ceny" v účelové funkci jakožto veličiny závislé na příslušné neznámé je právě příčinou nelinearity modelu. To je velmi častý způsob přechodu od lineárních modelů k nelineárním.

Příklad 12.1. Dopravní problém při nekonstantních sazbách

Lineární dopravní problém se zabývá úkolem minimalizovat dopravní náklady při přepravě mezi m výrobci a n spotřebiteli, přičemž náklady na přepravu jednotky zboží jsou konstanty c_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Předpokládejme, že i-tý ($i = 1, 2, \ldots, m$) výrobce vyrábí a_i jednotek zboží a že j-tý ($j = 1, 2, \ldots, n$) spotřebitel požaduje b_j jednotek zboží a označme x_{ij} počet jednotek zboží přepravovaného od i-tého výrobce k j-tému spotřebiteli. Chceme najít taková x_{ij}, která minimalizují funkci

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

při omezeních

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

a

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Při tomto dopravním problému se tedy předpokládá, že náklady na dopravu rostou lineárně s přepravovaným množstvím. Ve skutečnosti tomu tak přesně nebývá, neboť při větších zásilkách mohou být náklady na jednotku přepravovaného množství menší než při zásilkách malých. V jiných případech, kdy jde o přetížení určité tratě, mohou náklady na dopravu růst rychleji než lineárně. Abychom tuto závislost zachytili a nezkomplikovali model natolik, že by nebylo možno jej numericky zvládnout, předpokládejme, že náklady na dopravu jednotky zboží od i-tého výrobce k j-tému spotřebiteli závisí lineárně na x_{ij} a mají tvar

$$c_{ij} = k_{ij} + a_{ij}x_{ij};$$

zde a_{ij} je kladná nebo záporná konstanta, podle toho, jde-li o penalizaci nebo slevu při větších dopravovaných množstvích, a k_{ij} je nezáporná konstanta. Kvadratickou funkci

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (k_{ij} + a_{ij}x_{ij})\, x_{ij} \tag{12.1}$$

minimalizujeme potom při stejných omezeních jako v lineárním případě.

Vezměme následující příklad, v němž se předpokládá, že dopravní náklady na jednotku klesají, roste-li velikost zásilky.

Pro jednoduchost mějme pouze dva výrobce a dva spotřebitele. Výrobci nechť vyrábějí po 30 t výrobku, první spotřebitel nechť požaduje 20 t výrobku, druhý 40 t.

Dopravní náklady byly evidovány jednak pro zásilky o velikosti 10 t a jednak pro zásilky o velikosti 30 t; jinak je však možno zasílat libovolná množství zboží. Byly získány údaje, které uvádí tab. 12.1.

Lineární závislost dopravních nákladů na velikosti zásilky získáme tak, že proložíme dvěma naměřenými hodnotami přímku. Přejdeme pro jednoduchost od obvyklého dvojitého indexování k jednoduchému, podle čísel cest v tab. 12.1.

Tabulka 12.1

Odkud — kam	Označení cesty	Dopravované množství t	Náklady na tunu Kčs
1. výrobce — 1. spotřebitel	1	10	150
		30	120
1. výrobce — 2. spotřebitel	2	10	90
		30	70
2. výrobce — 1. spotřebitel	3	10	100
		30	90
2. výrobce — 2. spotřebitel	4	10	200
		30	160

Tvar dopravních nákladů vztahujících se např. na cestu od 1. výrobce k 1. spotřebiteli vypočteme z rovnic

$$150 = k_1 + a_1 10,$$
$$120 = k_1 + a_1 30,$$

kde k_1 a a_1 jsou neznámé, pro které

$$c_1 = k_1 + a_1 x_1$$

Obdobně postupujeme při ostatních nákladech:

$$c_1 = 165 - 1{,}5x_1,$$
$$c_2 = 100 - x_2,$$
$$c_3 = 105 - 0{,}5x_3,$$
$$c_4 = 220 - 2x_4,$$

kde tedy c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ jsou nyní dopravní náklady na 1 t a x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ jsou zatím neznámá dopravovaná množství.

Kvadratická funkce, která se má minimalizovat, je potom

$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i = (165 - 1{,}5x_1)\, x_1 + (100 - x_2)\, x_2 + (105 - 0{,}5x_3)x_3 + (220 - 2x_4)\, x_4 =$$
$$= 165x_1 - 1{,}5x_1^2 + 100x_2 - x_2^2 + 105x_3 - 0{,}5x_3^2 + 220x_4 - 2x_4^2$$

Omezení příkladu jsou

$$x_1 + x_2 = 30$$
$$x_3 + x_4 = 30$$
$$x_1 + x_3 = 20$$
$$x_2 + x_4 = 40$$

$x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

Případy, kdy s rostoucím přepravovaným množstvím rostou i dopravní náklady na jednotku, můžeme vyšetřovat zcela obdobným postupem.

Příklad 12.2. Zajištění úzkoprofilových surovin

Chce-li určitá ekonomická jednotka uskutečnit program rozvoje nějakého odvětví svého hospodářství v trvání několika let (např. pětiletý plán), narazí patrně na nedostatek některých surovin (materiálů, zařízení). Vyvstává otázka, jakou část nedostatkových surovin krýt dovozem a jakou využitím (popř. vybudováním) vlastních kapacit, aby požadavky byly kryty s nejmenšími možnými náklady.

Pro jednoduchost nechť jde o jednu nedostatkovou surovinu a pětiletý plán rozvoje. Požadavky na tuto surovinu v jednotlivých letech plánu nechť jsou $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_5$ jednotek. Zatím neznámá množství surovin, která budou vyráběna v domácí produkci v jednotlivých letech, označme $x_1, x_2, \ldots, x_5$, množství opatřovaná dovozem $x'_1, x'_2, \ldots, x'_5$.

Dále zvolme tuto situaci:

1. Hospodářská jednotka nechť má pro výrobu suroviny vlastní kapacitu, jejíž roční výkon však při krajním vytížení nepřesáhne dané množství, např. 160 tis. tun.

2. Výrobní náklady na jednotku suroviny záleží na množství vyráběné suroviny. Nechť je možno tyto náklady na jednotku zhruba vyjádřit pomocí lineární závislosti

$$y = k + ax,$$

kde x je ročně vyráběné množství suroviny, k a a jsou konstanty. Tyto konstanty můžeme vypočítat obdobným postupem jako v předchozím příkladě, nebo máme-li závislost nákladů na výrobě propočtenu ve více bodech než dvou, získáme aproximaci závislosti proložením přímky těmito body např. metodou nejmenších čtverců.

3. Nechť očekávané ceny, za které budeme moci suroviny nakoupit v jednotlivých letech pětiletého plánu, jsou $c_1, c_2, \ldots, c_5$. To jsou tedy v našem případě dané konstanty. Očekáváme-li stabilní ceny, mohou si být některé z nich, popř. všechny rovny.

4. Nechť za nákup suroviny z dovozu nesmíme vydat během pěti let více než předepsanou částku A.

Máme rozhodnout, v kterém roce kolik vyrábět ve vlastní produkci a kolik nakoupit z vnějšku, aby celkové náklady na pořízení suroviny byly minimální (při plnění hořejších požadavků).

Sestavíme matematický model: V i-tém roce plánu zaplatíme za surovinu z vlastní produkce $(k + ax_i)x_i$ a za surovinu nakoupenou z vnějšku $c_i x'_i$.

Tedy celkem za pět let:

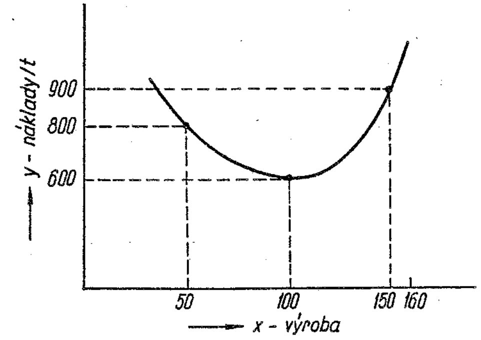
$$\sum_{i=1}^{5} [(k + ax_i)\, x_i + c_i x'_i] \tag{12.2}$$

Máme najít taková $x_1, x_2, \ldots, x_5, x'_1, x'_2, \ldots, x'_5$ (tj. určit vyráběná a nakupovaná množství v jednotlivých letech), aby funkce (12.2) byla minimální. Pro uvedená x musí platit:

$$\begin{aligned} & x_i + x'_i \geqq r_i && \text{(pokrytí požadavků),} \\ & x_i \leqq 160 && \text{(nepřekročení výrobních kapacit),} \\ & c_1 x'_1 + \ldots + c_5 x'_5 \leqq A && \text{(omezení nákupu z vnějšku)} \end{aligned}$$

a samozřejmě $x_i \geqq 0$, $x'_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Lineární závislost „cen“ na úrovních procesů se v nelineárním programování často předpokládá z důvodů jednoduchosti modelu. Může se ovšem stát, že i tato aproximace je příliš hrubá. Vezměme tento příklad: Nechť náklady na jednotku vyráběné suroviny jsou propočteny pro tři vyráběná množství, např. 50, 100 a 150 tis. tun, a nechť činí postupně 800, 600 a 900 Kčs/t. Takový průběh může být způsoben tím, že při nízké výrobě jsou náklady na jednotku zvyšovány nutností udržovat celé výrobní zařízení v chodu, při vysoké výrobě nutností nevyužívat zcela pomocných surovin, nakupovat je za nevýhodné ceny apod. Ostatní podmínky příkladu nechť jsou stejné.



Obr. 12.1

Dobré vyjádření výrobních nákladů jako funkce rozsahu výroby získáme proložením paraboly 2. stupně tvaru

$$y = ax^2 + bx + c$$

jejími třemi známými hodnotami

$$x = 50 \quad y = 800$$
$$x = 100 \quad y = 600$$
$$x = 150 \quad y = 900$$

(v grafu na obr. 12.1).

Konstanty a, b, c najdeme z lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 800 &= a\,.\,(50)^2 + b\,.\,50 + c \\ 600 &= a\,.\,(100)^2 + b\,.\,100 + c \\ 900 &= a\,.\,(150)^2 + b\,.\,150 + c \end{aligned}$$

Vychází

$$\begin{aligned} a &= 0{,}1 \\ b &= -19 \\ c &= 1\,500 \end{aligned}$$

Výrobní náklady na jednotku uvažované suroviny jsou tedy

$$y = 0{,}1x^2 - 19x + 1\,500 \qquad (\text{Kčs/t}),$$

kde x je vyráběné množství suroviny v tis. tun.

Účelová funkce pak bude

$$\sum_{i=1}^{5} [(0{,}1x_i^2 - 19x_i + 1\,500)x_i + c_i x_i'] \tag{12.3}$$

Ostatní omezení se nezmění.

Příklad 12.3. Rozmístění kooperujících závodů

Předpokládejme, že plánujeme výstavbu určité výrobní jednotky, skládající se z n kooperujících výrobních zařízení. Máme za úkol umístit těchto n výrobních zařízení na n předem vybraných míst tak, aby náklady na kooperaci byly minimální. Může jít o umístění n pobočných závodů jednoho kombinátu nebo n strojů v témž závodě, umístění výroby do již existujících zařízení apod. Dále mluvme pro konkrétnost o n kooperujících závodech.

Náklady na kooperaci nechť jsou tvořeny pro jednoduchost pouze dopravními náklady za přepravu polotovaru, surovin apod. mezi jednotlivými závody. Rozsah této přepravy nechť je dán maticí

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

jejíž prvky b_{ij} udávají předpokládaný objem přepravy v tunách od závodu i k závodu j; $i, j = 1, 2, \dots, n$ (předpokládáme totiž, že jsme závody předem pevně očíslovali). V matici **B** je $b_{ii} = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, jak vyplývá z ekonomické interpretace prvků matice **B**.

Dopravní sazby za přepravu jedné tuny zboží mezi závody budou záviset zřejmě na vzdálenostech mezi závody, přesněji na vzdálenostech mezi místy pro tyto závody vybranými. Dále opět předpokládejme, že jsme místa pro závody pevně očíslovali 1, 2, ..., n. Nechť dopravní sazby jsou udány v matici

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Prvky c_{kl} ($k, l = 1, 2, \dots, n$), udávají dopravní sazby za jednu tunu mezi místem k a l. Opět $c_{kk} = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$).

Máme rozhodnout, který závod umístit na které místo, aby dopravní náklady vyplývající z kooperace závodů byly minimální. Zaveďme n^2 proměnných x_{rs} ($r, s = 1, 2, \dots, n$), které mohou nabývat pouze dvou hodnot: $x_{rs} = 1$, jestliže závod číslo r bude umístěn na místě čísla s, a $x_{rs} = 0$, jestliže tomu bude jinak. Pomocí těchto proměnných můžeme pak náklady na dopravu mezi závody vyjádřit takto:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{ij} c_{kl} x_{ik} x_{jl} \tag{12.4}$$

Že výraz (12.4) udává skutečně zmíněné dopravní náklady, přesvědčíme se takto: k tomu, aby sazba za 1 tunu přepravy od závodu i k závodu j byla c_{kl}, musí závod i stát v místě k a současně závod j musí být v místě l. Je tomu tak tehdy, jestliže $x_{ik} = 1$ a $x_{jl} = 1$. V jiném případě $x_{ik}x_{jl} = 0$ a náklady za přepravu mezi závody i a j se do celkových nákladů nezapočtou.

Na proměnné x_{rs} musíme klást ještě omezení

$$\sum_{r=1}^{n} x_{rs} = 1 \qquad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{12.5}$$

$$\sum_{s=1}^{n} x_{rs} = 1 \qquad (r = 1, 2, \dots, n) \tag{12.6}$$

První omezení vyjadřuje, že každý závod musí být někde umístěn, a druhé omezení vyjadřuje, že každé místo musí být obsazeno právě jedním závodem.

Úlohu tedy vyřešíme, najdeme-li n^2 proměnných x_{rs} ($r, s = 1, 2, \dots, n$), jež minimalizují výraz (12.4) a splňují omezení (12.5), (12.6) a

$$0 \leqq x_{rs} \leqq 1, \qquad x_{rs} \quad \text{celočíselná}.$$

Tato úloha má několik variant. Jednou z nich je populární problém obchodního cestujícího: obchodní cestující (poštovní spoj, dodávkový vůz rozvážející zboží apod.) má navštívit n míst, jejichž vzdálenosti (popř. náklady na cestovné mezi místy) jsou známy a jsou udány maticí **C**. V jakém pořadí má cestující místa navštívit, aby všemi prošel, vrátil se do výchozího místa, a přitom urazil nejmenší možnou vzdálenost (utratil minimální sumu za cestovné)?

Místo závodů přiřazujeme „návštěvy“ číslované v pořádku, v jakém budou vykonány, místům, předem libovolně očíslovaným. Matici **B** zvolme ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Tato matice **B** zaručuje, že do účelové funkce budou započteny jen ty vzdálenosti, jimiž se skutečně projde, tj. vzdálenosti mezi místy, jimž budou přiřazena sousední čísla návštěv. Přiřaďme proměnným x_{rs} hodnotu rovnou 1 právě v případě, že návštěva číslo r bude v místě s, jinak $x_{rs} = 0$. Minimalizací výrazu (12.4) při omezeních stejných jako v předchozím případě získáme řešení úlohy obchodního cestujícího.

Příklad 12.4. Plány s malou variabilitou

K nelineárnímu programování často vedou maximalizační úlohy, v nichž se vyskytují náhodné veličiny. Dvě varianty jedné z těchto úloh uvedeme zde, další v příkladě 12.6.

Předpokládejme, že máme k dispozici 1 000 ha půdy přibližně stejné bonity a máme rozhodnout, jak tuto půdu osít n plodinami tak, abychom dosáhli maximální hrubé produkce měřené v korunách. Víme, že hektarové výnosy jsou v různých letech různé, podle počasí, osiva, péče věnované porostům apod.

Kdybychom plánovali produkci pouze podle špičkových výnosů bez přihlédnutí k závislosti na náhodných vlivech, mohlo by se stát, že bychom plán ani přibližně nesplnili. Nahlížejme proto na hektarové výnosy jako na náhodné veličiny*) a označme symbolem H_i náhodný výnos i-té plodiny. Průměr a rozptyl této veličiny můžeme odhadnout ze záznamu o hektarových výnosech v minulých letech. Označme tyto odhady

$$m_i \text{ (průměr) a } S_i^2 \text{ (rozptyl).}$$

Pro jednoduchost výkladu předpokládejme, že veličiny H_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ jsou statisticky nezávislé. Vedle maximalizace hrubé produkce máme tedy zájem také na tom, aby skutečně dosažená produkce nebyla příliš závislá na uvedených náhodných vlivech, a tuto skutečnost musíme zahrnout do omezení. Postupujeme takto: Označme x_i část osevní plochy, kterou osejeme i-tou plodinou. Celkový výnos v metrických centech u i-té plodiny bude $H_i x_i$, což je rovněž náhodná veličina. Je-li výkupní cena i-té plodiny c_i (Kčs), pak celková hrubá produkce v korunách je

$$c_1H_1x_1 + \dots + c_nH_nx_n = X$$

---

*) O náhodných veličinách viz čl. 13.6. Méně běžné matematické pojmy užívané v této kapitole jsou shrnuty v čl. 12.6.

Střední hodnota této náhodné veličiny – očekávaná hrubá produkce – je

$$c_1m_1x_1 + \dots + c_nm_nx_n = m$$

Rozptyl hrubé produkce pak bude

$$c_1^2S_1^2x_1^2 + \dots + c_n^2S_n^2x_n^2 = S^2$$

Nyní se musíme nějakým způsobem rozhodnout, jaké riziko jsme ochotni podstoupit při volbě osevního plánu. Je to konfliktní situace, kdy zvyšováním plánované produkce můžeme zvyšovat i riziko nesplnění tohoto plánu, a to takového nesplnění, že popř. nedosáhneme ani úrovně, jaké bychom dosáhli při opatrnějším postupu plánování. Nechť tedy plánující orgán rozhodne takto: Nesplnění plánu o částku větší než 50 000 Kčs by vyvolalo vážné potíže a takové nesplnění plánu bychom chtěli vyloučit.

Považujme, jak je obvyklé, náhodné veličiny H_i za normálně rozložené. Ze statistiky je známo, že pravděpodobnost náhodného jevu

$$m - X \geqq 1{,}64\, S$$

je pouze 0,05. Jinými slovy, přibližně pouze v pěti případech ze sta bude skutečná produkce tak nízká, že nesplnění plánu bude větší nebo rovno 1,64 S. Naším přáním je, aby takové nesplnění plánu nebylo větší než 50 000 Kčs, vyjádřeno vzorcem

$$1{,}64\, S \leqq 50\,000 \tag{12.7}$$

Chceme-li mít zajištěno plnění plánu (až na zmíněných 50 000) s větší či menší pravděpodobností než 0,95, stačí volit na levé straně poslední rovnice místo 1,64 jiné konstanty.

Maximalizujeme-li tedy funkci

$$c_1m_1x_1 + \dots + c_nm_nx_n$$

při omezeních

$$x_1 \geqq 0, \dots, x_n \geqq 0,$$

$$x_1 + \dots + x_n = 1\,000 \text{ (osetí celé plochy) a}$$

$$c_1^2S_1^2x_1^2 + \dots + c_n^2S_n^2x_n^2 \leqq (50\,000)^2 \,.\, (1{,}64)^{-2},$$

což je nerovnost (12.7), najdeme takový osevní plán, který zaručuje ze všech „reálně splnitelných“ plánů maximální produkci. Pod reálně splnitelným plánem rozumíme, podle předchozího, takový plán, který nebude splněn zhruba pouze v pěti případech ze sta, nepřihlížíme-li k „dovolenému“ nesplnění o částku menší než 50 000 Kčs.

Jak vidíme, do modelu lze zařadit i omezení, které předpisuje vypěstovat některé plodiny nejméně jisté dané množství, nebo osázet určitou plodinou aspoň předepsanou plochu. Rovněž je možno udat toleranci pro nesplnění plánu v procentech plánované produkce místo v apriorně dané částce. Konečně můžeme úlohu obměnit také takto:

Předpokládejme, že je plánem předepsána určitá hrubá produkce P, které musí být dosaženo. Chceme volit osevní postup takový, abychom dosáhli splnění tohoto plánu s co možno nejmenším rizikem, tj. chceme, aby hrubá produkce měla nejmenší možný rozptyl při zajištění určité úrovně výroby P.

Matematicky formulováno:

$$\text{minimalizovat } c_1^2 S_1^2 x_1^2 + \ldots + c_n^2 S_n^2 x_n^2$$

při omezeních

$$x_1 + \ldots + x_n = 1\,000$$

$$c_1 m_1 x_1 + \ldots + c_n m_n x_n \geqq P$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$$

12.2 OBECNÁ FORMULACE ÚLOHY NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

V předchozím odstavci jsme uvedli několik příkladů, jejichž věcná podstata je dosti různá. Z matematického hlediska se však dají všechny shrnout pod toto schéma: Najít extrém (účelové) funkce

$$g(x_1, \ldots, x_n) \tag{12.8}$$

o proměnných $x_1, \ldots, x_n$, při omezeních

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$$

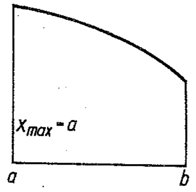
a

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0 \tag{12.9}$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$$

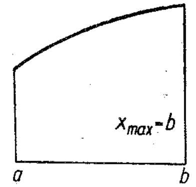
Vidíme, že jde o analogii s lineárním programováním, až na to, že zde netrváme na požadavku, aby účelová funkce (12.8) a omezující funkce (12.9) byly lineární. V příkladu 12.3 jsme ještě přidali požadavek, aby proměnné $x_1, \ldots, x_n$ byly celočíselné. To je opět analogie s celočíselným lineárním programováním. I když je formulace úlohy nelineárního programování na pohled stejně jednoduchá jako v případě lineárním, neexistuje metoda, kterou by bylo možno nalézt řešení ve všech případech funkcí $g, g_1, \ldots, g_m$, a která by tedy měla v nelineárním programování obdobné postavení jako simplexová metoda v lineárním programování. Metod na řešení různých úloh, které lze zahrnout pod hořejší schéma, je dnes řada, všechny však kladou poměrně značné omezující požadavky na tvar účelové funkce a na omezení. Rovněž složitost a pracnost v nelineárních případech je větší než ve stejně velkých případech lineárních.



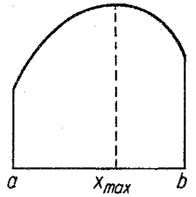
Obr. 12.2

Abychom nahlédli do problematiky nelineárního programování, zastavme se obecněji u vyhledávání extrémů funkcí jedné či více proměnných.

Budeme se stále zabývat úlohou vyhledávání maxima funkce $g(\mathbf{x})$.



Obr. 12.3



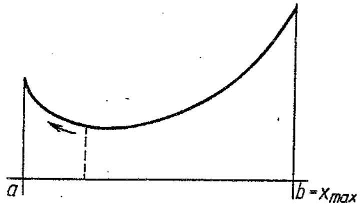
Obr. 12.4

Úvahy o minimu dostaneme tím, že vyšetřujeme místo funkce $g(\mathbf{x})$ funkci $-g(\mathbf{x})$ na téže množině. Funkce $g(\mathbf{x})$ má minimum ve stejném bodě jako funkce $-g(\mathbf{x})$ maximum, a to bez ohledu na to, zda $\mathbf{x}$ je jednorozměrná proměnná či vektor. Tento obrat je ostatně znám již z lineárního programování.

Vyšetřujeme nejdříve případ, kdy hledáme maximum funkce g jedné reálné proměnné x na nějakém intervalu (uzavřeném) $\langle a, b \rangle$. Je-li funkce v tomto intervalu konkávní, máme značně usnadněnou úlohu, neboť pro nalezení maxima stačí vyzkoušet oba krajní body, popř. stanovit, pro které x platí:

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

(viz obr. 12.2, 12.3, 12.4).

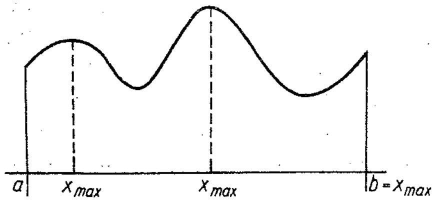


Obr. 12.5

Všimněme si, že v tomto případě můžeme dojít k maximu funkce tak, že zvolíme libovolný bod intervalu $\langle a, b \rangle$ a postupujeme tak dlouho ve směru rostoucí funkce g, dokud nenarazíme na hranici intervalu nebo dokud funkce nezačne klesat. V takovém případě jsme vždy v maximu.

Tento postup selhává ve všech ostatních případech: Hledáme-li maximum konvexní funkce na stejném intervalu $\langle a, b \rangle$, může se stát, že obdobným postupem dojdeme pouze k lokálnímu maximu, nikoli k absolutnímu, které hledáme (viz obr. 12.5).

Zde však ještě vystačíme pro určení maxima s vyzkoušením obou krajních bodů. Věc je složitější, není-li g ani konvexní, ani konkávní v uvažovaném intervalu. Pak může mít vyšetřovaná funkce několik lokálních maxim a z nich musíme vybírat absolutní (viz obr. 12.6).



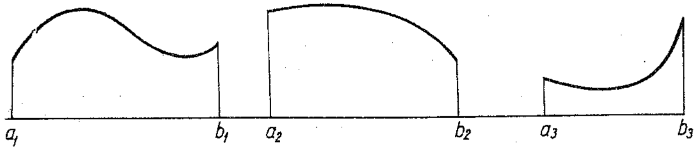
Obr. 12.6

Také tento případ lze početně zvládnout, není-li řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

příliš obtížné.

Komplikace nastávají, není-li množina, na které $g(x)$ vyšetřujeme, interval, ale nějaká nekonvexní množina, např. sjednocení intervalů (obr. 12.7).



Obr. 12.7

Pak musíme úvahy provádět pro každý interval zvlášť a porovnáváním výsledků určit absolutní maximum. Tím se objem výpočetních prací zvětšuje. Potíž je také v tom, že v praxi není množina, na které máme funkci vyšetřovat, udána explicitně, tj. jako sjednocení intervalů o daných koncových bodech, ale např. nerovností tvaru

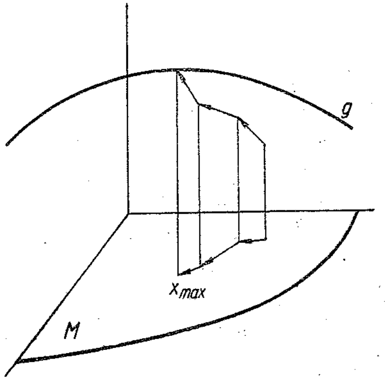
$$g_1(x) \geqq 0, \tag{12.10}$$

kde g_1 je nějaká daná funkce. Tak je tomu vždy v případech nelineárního programování. Jestliže je $g_1(x)$ třeba mnohočlen 6. stupně v x, pak už samo určení množiny oněch x, která nerovnost (12.10) splňují, je dosti pracná záležitost.

Obraťme se nyní k případu, kdy g je funkcí n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Při hledání maxima funkce více proměnných, které jsou vázány podmínkami tvaru (12.9), se ukázaly klasické metody, obdobné těm, jichž se užívá v jednorozměrném případě, jako nepoužitelné.

Je-li množina M, na které maximum funkce g hledáme, konvexní a je-li funkce g sama konkávní, pak můžeme maximum vyhledat postupem, který jsme naznačili u jednorozměrného případu: Zvolíme libovolný bod v M a postupujeme v množině M ve směru, ve kterém funkce vzrůstá. Jsme-li v bodě, ze kterého nemůžeme v žádném směru pokračovat v postupu, aniž bychom zmenšili hodnotu funkce nebo vybočili z M, nalezli jsme maximum, a to absolutní, neboť jiná maxima v tomto případě vyšetřovaná funkce nemá (viz obr. 12.8).

Kdybychom chtěli hledat maximum anulováním prvních derivací funkce, museli bychom v případě, že funkce nikde v M derivace rovné nule nemá (to se v nelineárním programování stává často), zkoušet hodnoty funkce na hranici množiny M, což není obecně jednoduchá záležitost. Proto je většina metod pro nalezení maxima funkce na konvexní množině založena na výše popsaném postupu ve směru rostoucí funkce, nebo aspoň rozhodující měrou závisí na tom, že jediné maximum, které konkávní funkce na konvexní množině má, je absolutní maximum.



Obr. 12.8

Ve všech ostatních případech, tj. v případě nekonkávní funkce nebo nekonvexní množiny přípustných řešení (množiny bodů, na které maximum hledáme), nejsou matematické prostředky v současné době natolik rozvinuté, aby umožňovaly najít v obecných případech větších rozměrů absolutní maximum zkoumané účelové funkce.

Metody založené na postupu ve směru rostoucí funkce vedou v obecném případě k vyhledání nějakého maxima, které nemusí být absolutní. I tak je možno jich použít, neboť můžeme získat vyšší hodnotu účelové funkce, než kterou jsme měli na počátku výpočtu. Jsme-li tedy postaveni před problém nalézt maximum funkce, která není konkávní, nebo kterou vyšetřujeme na nekonvexní množině, musíme se uchýlit buď k aproximacím, nebo k využívání nějakých dalších, z ekonomické interpretace vyplývajících informací o poloze maxima. Úspěch a pracnost našeho postupu budou ovšem různé případ od případu.

Připomeňme, že vyhledáváme-li místo maxima minimum účelové funkce, pak onen případ, z výpočetního hlediska příznivý, nastává, je-li účelová funkce konvexní (a je-li vyšetřována na konvexní množině). Potom totiž funkce vzatá s opačným znaménkem je konkávní.

Až dosud jsme v tomto odstavci předpokládali, že proměnné x, nebo $x_1, \ldots, x_n$, vystupující v účelové funkci a v omezeních, mohou nabývat všech reálných hodnot z M. Příklad 12.3 v předchozím odstavci však obsahuje omezení požadující, aby řešení bylo celočíselné. Snadno nahlédneme, že přípustná řešení této úlohy tvoří konečnou množinu s $n!$ prvky. Řešení bychom tedy mohli najít vypočtením hodnoty nákladů v každém bodě množiny přípustných řešení a vybráním toho bodu, ve kterém jsou náklady nejmenší. To ovšem není početně zvládnutelné ani za pomoci počítačů, vzhledem k tomu, že číslo $n!$ roste s n velmi rychle. Byly však nalezeny algoritmy, které umožňují najít aspoň přibližně řešení, aniž bychom museli zkoušet všechny $n!$ hodnoty.

Řešení obecné úlohy celočíselného lineárního programování je ještě obtížnější než pro neceločíselný případ a nebudeme se jím zde zabývat. Některé úlohy, které lze formulovat jako úlohy celočíselného nelineárního programování, se někdy do této disciplíny (jejíž vývoj není zdaleka ukončen) ani nezařazují, neboť matematické prostředky užívané k jejich řešení jsou odlišného charakteru než u úloh neceločíselných.

12.3 VĚTA O SEDLOVÉM BODĚ A PLÁNOVÁNÍ VÝROBY

Výsledek základního významu pro nelineární programování i pro další aplikace matematiky v ekonomii je věta, kterou v roce 1951 dokázali Kuhn a Tucker (viz [81]). Tato věta dovoluje, abychom místo extrémního bodu funkce (12.8) při omezeních (12.9) hledali extrémní bod jiné funkce pouze při omezeních nezápornosti.

Zaveďme si nejdříve některé pojmy a označení; především vektor nových proměnných $\mathbf{u}^T = [u_1, \ldots, u_m]$.

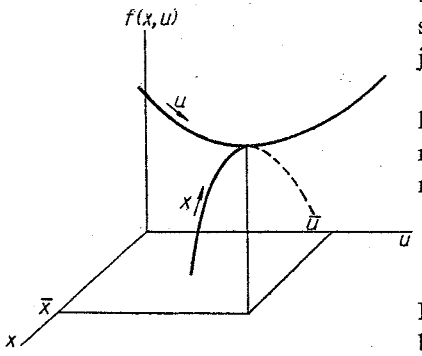
Tyto proměnné jsou analogií duálních proměnných při lineárním programování a někdy se jim říká Lagrangeovy multiplikátory. Dále zaveďme pomocnou funkci

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\mathbf{x}) \tag{12.11}$$

Nezáporným sedlovým bodem funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ budeme nazývat takový nezáporný bod $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$, tj. bod v $(n + m)$ – rozměrném Euklidovském prostoru E_{n+m}, pro který platí

$$f(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \leqq f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \leqq f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$$

pro všechny nezáporné body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$. Je to vlastně bod, který je maximem funkce f vzhledem k $\mathbf{x}$ a minimem vzhledem k $\mathbf{u}$. Název sedlový bod je sugestivní a v souladu s názorem: graf funkce v E_2, která má sedlový bod, připomíná tvarem skutečně jezdecké sedlo (viz obr. 12.9).



Obr. 12.9

Funkce $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ nazveme regulární, mají-li tuto vlastnost: Pro každý nezáporný a nenulový vektor $\mathbf{u}$ existuje nezáporný vektor $\mathbf{x}$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\mathbf{x}) > 0$$

Nyní již můžeme vyslovit větu o sedlovém bodě:

Nechť $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ jsou konkávní a regulární funkce. Nechť $g(\mathbf{x})$ je rovněž konkávní. Potom bod $\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ je řešením maximalizačního problému nelineárního programování s účelovou funkcí (12.8) a omezeními (12.9) tehdy, a jen tehdy, je-li pro nějaké $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$ $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ nezáporným sedlovým bodem funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Důkazem této věty se nebudeme zabývat. Připojíme k ní však některé poznámky: Pro platnost věty jsou nutné jisté podmínky regulárnosti, kladené na omezující funkce, např. ty, které jsme uvedli před větou. Ty však nejsou ani nejobecnější ani jedině možné. Jsou-li funkce $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ lineární v $\mathbf{x}$, není nutno na ně klást žádná další omezení na regularitu.

Požadavek regularity nepůsobí zpravidla potíže. Silně omezující je spíše požadavek konkávnosti.

Jsou-li funkce $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ konkávní, pak množina určená nerovnostmi (12.9) je konvexní, a nastává tedy onen „příznivý“ případ, jak plyne z rozboru v předchozím odstavci.

Z geometrického názoru a jednoduchých analytických úvah je patrno, že $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ je nezáporným sedlovým bodem $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, jestliže platí tyto podmínky:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \leqq 0 \tag{12.12}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} . \bar{x}_i = 0 \tag{12.13}$$

$$\bar{x}_i \geqq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right)_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \geqq 0 \tag{12.14}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right)_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \bar{u}_j = 0 \tag{12.15}$$

$$\bar{u}_j \geqq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

Indexy u derivací značí, že jde o hodnoty těchto derivací v bodě $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$.

Podmínky (12.12) a (12.13) říkají, že v sedlovém bodě, který je maximem $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ vzhledem k $\mathbf{x}$, musí být derivace podle složky $\mathbf{x}$ buď nula, nebo jsme-li na hranici přípustných $\mathbf{x}$, musí funkce vzhledem k $\mathbf{x}$ vzrůstat (viz obr. 12.2, 12.3 a 12.4 v předchozím odstavci). Podmínky (12.14) a (12.15) jsou analogií pro $\mathbf{u}$.

Bez důkazu uveďme, že pro nezáporný sedlový bod platí vztah

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \tag{12.16}$$

Všimněme si ještě, že podle věty o sedlovém bodě najdeme vždy s optimálním řešením $\bar{\mathbf{x}}$ i řešení „duální“ $\bar{\mathbf{u}}$, stejně jako v lineárním případě při simplexové metodě

Jako příklad nelineárního programování, v němž věta o sedlovém bodě má i jiný význam než technicko-početní, vyložme ve velmi zjednodušené formě úlohu o plánování výroby:

Nechť nějaká hospodářská jednotka (podnik, stát) má možnost v následujícím plánovacím období vyrábět p druhů výrobků. Nechť chod výroby je zcela popsán n nezápornými ukazateli $x_1, \ldots, x_n$. Množství jednotlivých vyrobených výrobků bude zřejmě záviset na velikosti jednotlivých ukazatelů. Množství k-tého výrobku bude tedy funkcí ukazatelů

$$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$$

Označme tuto funkci $\gamma_k(\mathbf{x})$, pro $k = 1, 2, \ldots, p$. Je-li ukazatelem přímo výroba výrobku k, má funkce γ_k jednoduchý tvar

$$\gamma_k(\mathbf{x}) = x_k$$

Hospodářská jednotka má ovšem jistá omezení ve zdrojích, jako jsou suroviny, půda, energie, investice apod. Spotřeba každého z m zdrojů je rovněž funkcí ukazatelů $x_1, \ldots, x_n$. Pro j-tý zdroj označme tuto funkci $h_j(\mathbf{x})$. Množství j-tého zdroje, které bude pro plánované období maximálně k dispozici, označme v_j. V našem zjednodušeném příkladě předpokládáme, že je to dané číslo. Protože hospodářská jednotka si často některé zdroje vyrábí sama, považují se v_j v obecnější teorii rovněž za funkce ukazatelů $\mathbf{x}$, tj. za „plánovatelné".

Nechť je pevně dána cena za jednotku každého z p výrobků a pro k-tý výrobek ji označme c_k.

Otázka je, jak máme naplánovat ukazatele $x_1, \ldots, x_n$, abychom dosáhli maximální produkce v cenovém vyjádření a nepřekročili přitom množství zdrojů, jež jsou k dispozici. To je úloha nelineárního programování, neboť máme najít maximum funkce

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \gamma_k(\mathbf{x})$$

při omezeních

$$h_j(\mathbf{x}) \leqq v_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

Řešit tuto úlohu znamená najít nezáporný sedlový bod funkce

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{p} c_k \gamma_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j(v_j - h_j(\mathbf{x}))$$

Proměnné u_j poskytují, stejně jako duální proměnné v lineárním případě, relativní ohodnocení zdrojů. To je vidět také z toho, že pro optimální řešení – sedlový bod $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ – musí být podle (12.16)

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j(v_j - h_j(\bar{\mathbf{x}})) = 0$$

Protože je vždy $v_j - h_j(\bar{\mathbf{x}}) \geqq 0$, může být duální cena $\bar{u}_j$ větší než nula pouze v případě, kdy příslušný zdroj je zcela vyčerpán [$v_j = h_j(\bar{\mathbf{x}})$], a není-li tomu tak, musí být rovna nule. Celá teorie platí ovšem i pro lineární funkce a pak u_j jsou přímo duální proměnné.

S teorií výroby je spojena ještě řada dalších, často neuzavřených otázek, které zde nebudeme rozebírat. Jde např. o to, kdy funkce $\gamma_k(\mathbf{x})$ a $v_j - h_j(\mathbf{x})$ splňují podmínky konkávnosti, jak najít tvar těchto funkcí v praxi, jak stanovit ceny aj.

12.4 WOLFEHO METODA PRO KVADRATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

V tomto a v následujícím odstavci vyložíme dvě metody pro numerické řešení některých problémů nelineárního programování. Obě vlastně převádějí nelineární případ na řešení problému lineárního programování s větším počtem proměnných.

Poměrně často se v nelineárním programování vyskytuje tato úloha:

Najít maximum kvadratické funkce

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

při omezeních

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots \qquad\qquad + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots \qquad\qquad + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n &
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Že v omezeních jsou rovnosti místo dosud užívaných nerovností, není na závadu obecnosti, neboť i zde je možno použít techniky přídatných proměnných. Užijeme-li obvyklého maticového značení, můžeme úlohu zapsat ve tvaru:

Maximalizovat

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$$

při omezeních

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

Předpokládáme-li, že matice $\mathbf{C}$ je negativně semidefinitní (aby $g(\mathbf{x})$ byla konkávní), máme co dělat s tzv. problémem kvadratického programování.

Z praktických úloh uvedených v odstavci 12.1 vede na kvadratické programování úloha z příkladu 12.1, a to v případě, že s rostoucím přepravovaným množstvím rostou i dopravní náklady, dále první varianta (lineární závislost nákladů) z příkladu 12.2 v případě, že $a > 0$. To odpovídá případu, kdy s rostoucím rozsahem výroby rostou výrobní náklady (viz cvičení). Rovněž poslední varianta z příkladu 12.4 je úlohou kvadratického programování.

Wolfe*) našel pro problém kvadratického programování poměrně účinnou výpočetní metodu, jejíž podstatu nejdříve vyložíme a potom předvedeme výpočet na jednoduchém příkladě. Wolfeho metoda je založena jednak na větě o sedlovém bodě, jednak na simplexové metodě.

Větu o sedlovém bodě jsme vyslovili pro omezení ve tvaru nerovností, ale ukážeme, že jediná změna pro případ lineárních rovností je ta, že nemusíme pro sedlový bod požadovat nezápornost Lagrangeových multiplikátorů:

Rovnosti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jsou ekvivalentní nerovnostem

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}$$

neboli

$$\mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geqq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$$

Napíšeme-li pro tyto nerovnosti pomocnou funkci (12.11), dostaneme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} + \mathbf{u}^{*T}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \\ + \mathbf{u}^{**T}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}), \tag{12.18}$$

kde jsme vektor Lagrangeových multiplikátorů rozdělili na dva vektory, $\mathbf{u}^* \geqq \mathbf{0}$ a $\mathbf{u}^{**} \geqq \mathbf{0}$. Úpravou posledního výrazu dostaneme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} + (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{**})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \tag{12.19}$$

O vektoru $\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{**}$ ovšem již obecně neplatí, že je nezáporný. Známe-li nezáporný sedlový bod $\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{\bar{\mathbf{u}}^*}{\bar{\mathbf{u}}^{**}}\right)$ (posledním symbolem se míní matice (sloupec) dělená na bloky) výrazu (12.18), známe i sedlový bod $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\mathbf{u}}^{**})$ výrazu (12.19), kde $\bar{\mathbf{u}}^* - \bar{\mathbf{u}}^{**}$ nemusí být nezáporný, a naopak. Označme tedy $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{**}$ a pracujme dále s funkcí

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{Cx} + \mathbf{u}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}),$$

kde na $\mathbf{u}$ neklademe požadavek nezápornosti.

Snažme se nyní napsat pro náš kvadratický problém nutné a postačující podmínky pro sedlový bod — (12.12), (12.13), (12.14) a (12.15). Podmínka (12.12) zní:

$$\mathbf{p} + 2\mathbf{Cx} + \mathbf{A}^T\mathbf{u} \leqq 0$$

---

*) Wolfe, P.: The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica sv. 27, 1959.

Zavedeme-li nový nezáporný vektor $\mathbf{v}$ vztahem

$$2\mathbf{Cx} + \mathbf{A}^T\mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{p}, \tag{12.20}$$

který je vlastně pouhým přepsáním předchozího vztahu, můžeme podmínku (12.13) psát ve tvaru

$$\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0, \tag{12.21}$$

neboť dále

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0} \tag{12.22}$$

Podmínky (12.14) a (12.15)

$$\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - b_j\right) u_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

nahradíme podmínkou

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{12.23}$$

ze které předchozí dvě jistě plynou.

Najdeme-li $2n + m$ proměnných $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, které vyhovují vztahům (12.20), (12.21), (12.22) a (12.23), máme podle věty o sedlovém bodě nalezeno vlastně řešení úlohy kvadratického programování.

K nalezení takových hodnot $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$ použijeme simplexové metody a techniky pomocných proměnných:

Zaveďme tedy pomocné proměnné

$$\mathbf{w}^T = [w_1, \ldots, w_m] \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{z}^{(1)T} = [z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}] \geqq \mathbf{0}$$

a

$$\mathbf{z}^{(2)T} = [z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)}] \geqq \mathbf{0}$$

a rozšiřme vyšetřované vztahy (12.20), (12.23) a (12.21) takto:

$$2\mathbf{Cx} + \mathbf{v} + \mathbf{A}^T\mathbf{u} + \mathbf{z}^{(1)} - \mathbf{z}^{(2)} = -\mathbf{p}$$
$$\mathbf{Ax} + \mathbf{w} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$$

Nepočítáme-li poslední rovnici, která vlastně není lineární, je to $m + n$ rovnic pro $2m + 4n$ proměnných

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{z}^{(1)} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{z}^{(2)} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{u}$$

Základní řešení by tedy mělo mít aspoň $2m + 4n - (m + n) = m + 3n$ nulových složek. Takové základní řešení ale můžeme ihned udat:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{v} = \mathbf{0},\ \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$z_i^{(1)} = 0, \text{ jestliže } p_i \geqq 0$$

$$z_i^{(2)} = 0, \text{ jestliže } p_i \leqq 0$$

a

$$\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$z_i^{(1)} = -p_i, \text{ jestliže } p_i < 0$$

$$z_i^{(2)} = \ \ p_i, \text{ jestliže } p_i > 0$$

Vyjděme z právě uvedené báze a minimalizujme nejdříve účelovou funkci

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_m;$$

během výpočtu držme stále **v** a **u** rovny nule. Toto minimum bude stejně jako v lineárním případě 0 (má-li úloha přípustné řešení) a mimoto bude splněna podmínka $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$.

Nyní můžeme vypustit **w** z výpočtu a v dalším kroku minimalizujeme účelovou funkci

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} z_j^{(2)} \tag{12.24}$$

Vycházíme přitom z báze, kterou jsme získali v předchozím kroku, a ta $z_i^{(1)}$ a $z_j^{(2)}$, jichž jsme do báze nepoužili, můžeme zrovna vynechat. Aby zůstala v platnosti podmínka $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$, musíme při eliminaci zachovávat toto pravidlo: jestliže je v bázi x_k, nevezmeme do báze v_k, a jestliže je v bázi v_k, nevezmeme do báze x_k.

Lze dokázat, že je-li matice **C** negativně definitní nebo $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, iterační proces skončí nejvýše po $\binom{3n}{n}$ iteracích a hodnota účelové funkce (12.24) bude 0. Tím ale máme nalezeno přípustné řešení rovnic (12.20), (12.21) a (12.23), a tedy i úlohy kvadratického programování.

Je-li matice **C** pouze negativně semidefinitní, musíme provádět ještě třetí krok, rovněž pomocí simplexové metody. Ten zde nebudeme popisovat; čtenáře odkazujeme na citovanou Wolfeho práci.

Jako příklad vypočteme minimum kvadratické formy

$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

při omezeních

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{12.25}$$

a

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

Kvadratická forma $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$ je negativně definitní, můžeme tedy použít Wolfeho metody.

Omezení (12.20) pro náš případ jsou

$$-2 \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . u + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.26}$$

Přidejme pomocné proměnné a omezení (12.25) a sestavme simplexovou tabulku s účelovou funkcí w (neboť v našem případě $m = 1$, a tedy $\mathbf{w} = w_1 = w$). V tab. 12.2 je provedena úprava obvyklá při pomocné bázi, druhá řádka pro účelovou funkci chybí, neboť nám jde pouze o anulování pomocných proměnných.

Tabulka 12.2

	x_1	x_2	x_3	u	v_1	v_2	v_3	w	z_1	z_2	z_3	
z_1	—2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
z_2	0	—4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
z_3	0	0	—2	1	0	0	1	0	0	0	1	0
w	$\boxed{1}$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Za klíčový sloupec vezměme třeba první sloupec, klíčovým řádkem pak bude řádek w.

Po eliminaci dostaneme tab. 12.3.

Tabulka 12.3

	x_1	x_2	x_3	u	v_1	v_2	v_3	w	z_1	z_2	z_3	
z_1	0	2	2	1	1	0	0	2	1	0	0	2
z_2	0	—4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
z_3	0	0	—2	1	0	0	1	0	0	0	1	0
x_1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	—1	0	0	0	0

Tím je skončen první krok výpočtu, neboť $w = 0$. Vynecháme nyní w a v dalším kroku budeme minimalizovat účelovou funkci

$$z_1 + z_2 + z_3,$$

vycházejíce z právě získané báze.

Výpočet je v tab. 12.4.

Na pravé straně posledního oddílu tabulky čteme řešení

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{5}, \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{5}, \qquad \bar{x}_3 = \frac{2}{5},$$

$$\bar{u} = \frac{4}{5}, \qquad v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 0$$

Minimální hodnota účelové funkce $g(\mathbf{x})$ je $\frac{2}{5}$.

Při Wolfeho metodě se dosti zvětší rozměr problému, i když při praktickém počítání je možno některé pomocné proměnné vynechat, popř. je vůbec nezavádět. Velkou výhodou však je, že pro výpočet na samočinném počítači je možno použít běžných programů pro simplexovou metodu, přidá se pouze několik dalších instrukcí. Na počítači IBM 704 byl např. počítán touto metodou kvadratický problém o 90 omezeních a 192 proměnných za 230 minut strojového času.

12.5 SEPAROVATELNÁ ÚČELOVÁ FUNKCE

O účelové funkci, která má tvar

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$$

(je součtem n funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné složce vektoru $\mathbf{x}$), říkáme, že je separovatelná.

Má-li problém nelineárního programování separovatelnou účelovou funkci a lineární omezení tvaru (12.17), můžeme tento problém řešit přibližně pomocí lineárního programování. Nejsou-li však při maximalizaci funkce $c_i(x_i)$ vesměs konkávní (konvexní při minimalizaci), výpočet se komplikuje, neboť musíme do omezení problému přidat nerovnosti s celočíselnými proměnnými. Zůstaneme proto jako vždy u výkladu maximalizačního problému s konkávními $c_i(x_i)$, a tedy i s konkávní účelovou funkcí $g(\mathbf{x})$.

Tabulka 12.4

	x_1	x_2	x_3	u	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	z_3	
z_1	0	2	2	1	1	0	0	1	0	0	2
z_2	0	—4	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1	0	0
z_3	0	0	—2	1	0	0	1	0	0	1	0
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	—2	0	3	1	1	1	0	0	0	2
z_1	0	6	2	0	1	—1	0	1	—1	0	2
u	0	—4	0	1	0	1	0	0	1	0	0
z_3	0	$\boxed{4}$	—2	0	0	—1	1	0	—1	1	0
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	10	0	0	1	—2	1	0	—3	0	2
z_1	0	0	$\boxed{5}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2
u	0	0	—2	1	0	0	1	0	0	1	0
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1
	0	0	5	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	2
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
u	0	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
	0	0	0	0	0	0	0	—1	—1	—1	0

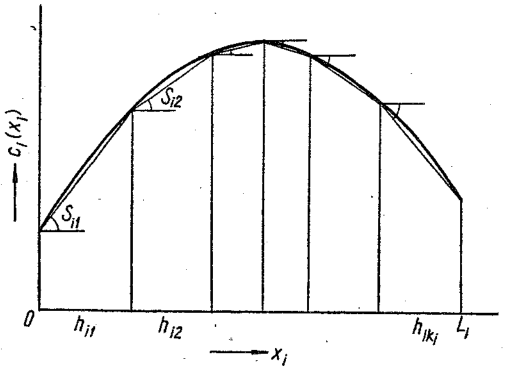
Při řešení budeme každou z funkcí $c_i(x_i)$ nejdříve aproximovat po částech lineárními funkcemi, jak je ukázáno na obr. 12.10.

Tím dostaneme, jak vzápětí uvidíme, účelovou funkci ve tvaru lineární formy. Původní omezení problému zůstanou, musíme k nim však přidat ještě další. Řešení takového rozšířeného problému lineárního programování nám pak poskytuje i přibližné řešení uvažovaného nelineárního problému se separovatelnou účelovou funkcí.

Vyložme nyní postup podrobněji: Množina přípustných řešení je v našem případě nějaký konvexní polyedr. Předpokládejme, že tento polyedr je omezený. Komplikace, které vzniknou, když tomu tak není, nejsou podstatné. Jsou-li koeficienty v omezeních 12.17 nezáporné nebo jsou-li záporné pouze koeficienty u přídatných proměnných, najdeme bez větších obtíží pro každou proměnnou interval

$$0 \leqq x_i \leqq L_i,$$

takový, že pro žádný přípustný vektor **x** neplatí, že $L_i < x_i$. Tím jsme vlastně našli n-rozměrný interval, takový, že celý konvexní polyedr přípustných řešení je v něm obsažen. Interval $\langle 0, L_i \rangle$ rozdělme na k_i menších intervalů a délku j-tého označme h_{ij}, $j = 1, 2, \dots, k_i$, k_i je zvolené přirozené číslo (viz obr. 12.10). Jak volit toto číslo a jak délky intervalů h_{ij}, záleží na tvaru funkce $c_i(x_i)$, na tom, jak přesně chceme aproximovat řešení, a také na tom, jak velký problém lineárního programování jsme schopni řešit. Nějaká obecná pravidla by byla dosti složitá. Je však zřejmé, že čím menší dělicí intervaly h_{ij} volíme, tím dosahujeme přesnějšího výsledku, ale také pak řešíme lineární problém většího rozsahu.



Obr. 12.10

Zaveďme nyní nové proměnné x_{ij} jako délky průniku intervalu $\langle 0, x_i \rangle$ s j-tým intervalem (o délce h_{ij}), na který jsme rozdělili interval $\langle 0, L_i \rangle$. Tedy

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ik_i} \tag{12.27}$$

Je-li s_{ij} směrnice úsečky aproximující $c_i(x_i)$ v j-tém intervalu (o délce h_{ij}), pak platí

$$c_i(x_i) = c_i(0) + s_{i1}x_{i1} + s_{i2}x_{i2} + \dots s_{ik_i}x_{ik_i} \tag{12.28}$$

Aby veličiny x_{ij} bylo možno interpretovat ve smyslu, který jsme jim určili, musíme připojit omezení

$$0 \leqq x_{ij} \leqq h_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, k_i \tag{12.29}$$

Provedeme-li aproximaci pro všech n funkcí $c_i(x_i)$, pak výsledné optimální řešení dostaneme z rovnic (12.27), a to po vyřešení problému lineárního programování s účelovou funkcí rovnou součtu výrazů (12.28) přes $i = 1, 2, \dots, n$ a s omezeními (12.17) a (12.29). Abychom dostali omezení (12.17) v závislosti na neznámých x_{ij}, dosaďme do (12.17) podle (12.27). Místo n proměnných máme nyní bohužel proměnných $k_1 + \dots + k_n$. Protože pro směrnice v konkávním případě platí

$$s_{i1} \geqq s_{i2} \geqq \dots \geqq s_{ik_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nemůže se stát, že by třeba x_{i1} vyšlo rovno nule a $x_{i2} > 0$, což by porušilo geometrický smysl veličin x_{ij}. Má-li totiž výraz (12.28) být maximální, bude nejdříve x_{i1} v mezích omezení maximální, potom x_{i2} atd.

Z příkladů uvedených v čl. 12.7 lze tímto způsobem řešit kvadratický dopravní problém v případě, že s rostoucím přepravovaným množstvím rostou i dopravní náklady (první varianta příkladu 12.2 pro $a > 0$ a poslední varianta příkladu 12.4. Popisovaná metoda není ovšem nijak vázána na kvadratičnost účelové funkce, naopak je vhodná i pro složité funkce $c_i(x_i)$, pokud jsou konkávní. Jako příklad uveďme následující příklad 12.5.

Příklad 12.5. Dopravní problém s náhodnými omezeními

Nechť jeden výrobce zásobuje zbožím dva odběratele, kteří zboží dále prodávají, přičemž po zboží je náhodná poptávka. Odběratel zde vlastně hraje úlohu pouhého překupníka. Prakticky je to případ každé obchodní sítě, neboť model lze principiálně rozšířit na libovolný počet výrobců a odběratelů.

Kapacita výrobce nechť je 100 t měsíčně, dopravní náklady za tunu nechť jsou 300 Kčs k prvnímu odběrateli a 500 Kčs k druhému. Cena (maloobchodní) za tunu zboží nechť je stejná u obou odběratelů a nechť činí 4 000 Kčs. Poptávku po zboží, která zde hraje úlohu požadavků spotřebitele u obvyklého dopravního problému, považujeme za náhodnou veličinu. Z rozboru prodeje v předchozích obdobích nechť víme, že poptávka po zboží má normální rozložení. U prvního odběratele nechť je průměr tohoto rozložení 50 (tun) a rozptyl 20, u druhého 70 a rozptyl 15. Upozorňujeme, že tato data se týkají poptávky, tj. množství zboží, které by se prodalo, kdyby odběratel měl na prodej k dispozici neomezené množství zboží, nikoli skutečného prodeje. U prodeje podle objednávek je tedy rozhodující stav došlých objednávek.

Je otázka, jak máme oněch 100 t rozdělovat mezi oba odběratele, aby celková částka získaná prodejem zboží po odečtení dopravních nákladů byla v průměru za zkoumané období maximální. Pro jednoduchost předpokládejme, že neprodané zboží je možno u odběratele uskladnit beze ztrát do příštího období. Principiálně tento předpoklad není nutný. Je možno přidáním dalších členů do účelové funkce zvážit i jiný osud zboží.

Sestavme nyní výchozí údaje do přehledné tabulky (tab. 12.5), analogické tabulce u dopravního problému:

Tabulka 12.5

	Odběratel		Výroba v t
	1.	2.	
Výrobce	300 Kčs	500 Kčs	100
Poptávka v t	B_1	B_2	

B_1 a B_2 jsou tedy náhodné veličiny s normálním rozložením:

B_1 má hustotu rozložení

$$(20\,.\,2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(b-50)^2}{2\,.\,20}\right\}=f_1(b)$$

B_2 hustotu rozložení

$$(15\,.\,2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(b-70)^2}{2\,.\,15}\right\}=f_2(b)$$

Neznámá optimální množství, která budou od výrobce zasílána prvnímu a druhému odběrateli, označme postupně x_1 a x_2.

Musí zřejmě platit, že

$$\begin{aligned}&x_1+x_2=100,\\&x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\end{aligned}\qquad(12.30)$$

Odvoďme nyní tvar účelové funkce:

Střední hodnota prodeje zboží u k-tého (prvního nebo druhého) odběratele v naturálních jednotkách je dána výrazem

$$\int_0^{x_k} bf_k(b)\,\mathrm{d}b + x_k\int_{x_k}^{\infty} f_k(b)\,\mathrm{d}b$$

První sčítanec se vztahuje na případ, kdy poptávka po zboží je menší než x_k (tj. než množství, které má odběratel k dispozici) a je úplně uspokojena. Druhý sčítanec se týká případu, kdy poptávka je větší než x_k a je uspokojena jen množstvím x_k. Průměrná částka získaná u k-tého odběratele prodejem je

$$\varphi_k(x_k)=4\,000\left[\int_0^{x_k} bf_k(b)\,\mathrm{d}b + x_k\int_{x_k}^{\infty} f_k(b)\,\mathrm{d}b\right]$$

Dopravní náklady celkem jsou

$$300x_1 + 500x_2$$

a účelovou funkci, kterou chceme maximalizovat, dostaneme jako rozdíl

$$\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)-300x_1-500x_2$$

Tato účelová funkce je separovatelná a jednotlivé složky jsou konkávní, neboť funkce $\varphi_k(x_k)$ jsou konkávní. Můžeme to ukázat snadno tak, že $\varphi_k(x_k)$ derivujeme dvakrát podle x_k:

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x_k)&=4\,000\int_{x_k}^{\infty} f_k(b)\,\mathrm{d}b\\ \varphi_k''(x_k)&=-4\,000f_k(x_k)\end{aligned}$$

Hustota rozložení je všude v definičním oboru nezáporná, a proto $\varphi_k''(x_k)\leqq 0$, a $\varphi_k(x_k)$ je tedy konkávní.

Přistupme nyní k vlastnímu výpočtu: Pro snadné vyjadřování v dalším výkladu pišme účelovou funkci ve tvaru

$$g(\mathbf{x})=4\,000[c_1(x_1)+c_2(x_2)],\qquad(12.31)$$

kde tedy

$$\begin{aligned}c_1(x_1)={}&(40\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{x_1} b\exp\left\{-\frac{(b-50)^2}{40}\right\}\mathrm{d}b\,+\\&+x_1(40\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{x_1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(b-50)^2}{40}\right\}\mathrm{d}b-\frac{3}{40}x_1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}c_2(x_2)={}&(30\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{x_1} b\exp\left\{-\frac{(b-70)^2}{30}\right\}\mathrm{d}b\,+\\&+x_2(30\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{x_1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(b-70)^2}{30}\right\}\mathrm{d}b-\frac{5}{40}x_2\end{aligned}$$

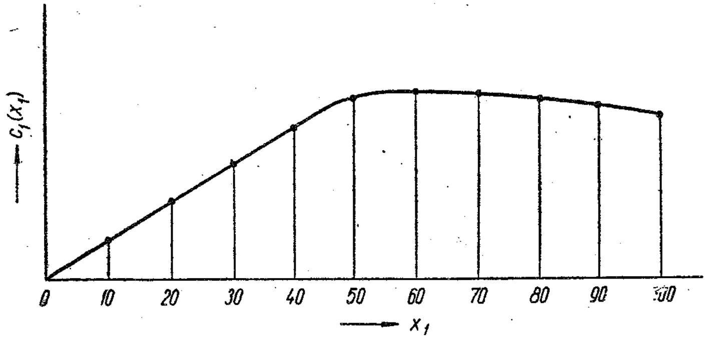
Pro nalezení hodnot s_{1j} a s_{2j} (dále budeme volit $k_1=k_2=10$, tedy $j=1, 2, \ldots, 10$) musíme znát hodnoty $c_1(x_1)$ a $c_2(x_2)$ v bodech, kde aproximující lomená funkce je přesně rovna funkčním hodnotám $c_1(x_1)$ a $c_2(x_2)$. Jsou-li např. 0, 10, 20 první tři takové body, počítáme s_{11} podle vztahu

$$s_{11} = \frac{c_1(10) - c_1(0)}{10 - 0} = \frac{c_1(10) - c_1(0)}{10},$$

s_{12} podle vztahu

$$s_{12} = \frac{c_1(20) - c_1(10)}{20 - 10} = \frac{c_1(20) - c_1(10)}{10} \text{ atd.},$$

jak je také patrno z obr. 12.11.



Obr. 12.11

Zvolme pro náš případ $h_{1j} = h_{2j} = 10$ pro $j = 1, 2, \ldots, 10$. Intervaly proměnnosti pro x_1 a x_2, které nás zajímají, jsou $\langle 0, 100\rangle$, $\langle 0, 100\rangle$, neboť v těch musí podle omezení (12.30) optimální x_1 a x_2 ležet. Proveďme nyní výpočet s_{1j} a s_{2j}. Potřebné hodnoty $c_1(x_1)$ a $c_2(x_2)$ v bodech $x_1 = x_2 = 0, 10, 20, \ldots, 100$ vypočteme takto:

Označme

$$I_1(x_1) = (40\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{x_1} b \exp\left\{-\frac{(b - 50)^2}{40}\right\} \mathrm{d}b$$

a

$$II_1(x_1) = x_1(40\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(b - 50)^2}{40}\right\} \mathrm{d}b,$$

takže

$$c_1(x_1) = I_1(x_1) + II_1(x_1) - \frac{3}{40} x_1$$

Výpočet integrálu $II_1(x_1)$ nečiní žádné potíže, neboť jeho doplněk na jednotku (nepřihlížíme-li k faktoru x_1) je distribuční funkce normálního rozložení, která je bohatě tabelována ve statistických tabulkách.

Při výpočtu $I_1(x_1)$ budeme postupovat takto:

Nejdříve proveďme v $I_1(x_1)$ substituci

$$\frac{b - 50}{\sqrt{20}} = t$$

Dostaneme

$$I_1(x_1) = \sqrt{\frac{20}{2\pi}} \int_{-\frac{50}{\sqrt{20}}}^{\frac{x_1 - 50}{\sqrt{20}}} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{50}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{50}{\sqrt{20}}}^{\frac{x_1 - 50}{\sqrt{20}}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t = A_1(x_1) + B_1(x_1),$$

kde pro snazší vyjadřování označíme opět

$$\sqrt{\frac{20}{2\pi}} \int_{-\frac{50}{\sqrt{20}}}^{\frac{x_1 - 50}{\sqrt{20}}} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t = A_1(x_1)$$

a

$$\frac{50}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{50}{\sqrt{20}}}^{\frac{x_1 - 50}{\sqrt{20}}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t = B_1(x_1)$$

Integrál $B_1(x_1)$ rovněž snadno vypočteme z tabulek distribuční funkce normálního rozložení jako rozdíl hodnot distribuční funkce v bodech

$$\frac{x_1 - 50}{\sqrt{20}} \quad \text{a} \quad -\frac{50}{\sqrt{20}}$$

V integrálu $A_1(x_1)$ provedeme substituci

$$\frac{t^2}{2} = x$$

Dostaneme:

$$A_1(x_1) = \sqrt{\frac{20}{2\pi}} \int\limits_{\frac{50^2}{40}}^{\frac{(x_1-50)^2}{40}} \exp\{-x\}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{2\pi}} \left[-\exp\{-x\}\right]_{\frac{50^2}{40}}^{\frac{(x_1-50)^2}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{2\pi}} \left[\exp\left\{-\frac{50^2}{40}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x_1-50)^2}{40}\right\}\right]$$

Z posledního výrazu můžeme již $A_1(x_1)$ v potřebných hodnotách x_1 vypočítat poměrně lehce, neboť funkce $\exp\{-x\}$ je rovněž tabelována.

Tabulka 12.6a

j	x_1	$A_1(x_1)$	$B_1(x_1)$	$I_1(x_1)$	$II_1(x_1)$	$\frac{3}{40}x_1$	$c_1(x_1)$	s_{1j}
—	0	0	0	0	0	0	0	—
1	10	0	0	0	10	0,750 0	9,250 0	0,925 0
2	20	0	0	0	20	1,500 0	18,500 0	0,925 0
3	30	0	0	0	30	2,250 0	27,750 0	0,925 0
4	40	—0,146 5	0,634 0	0,487 5	39,492 8	3,000 0	36,980 3	0,923 0
5	50	—1,784 1	25	23,215 9	25	3,750 0	44,465 9	0,748 6
6	60	—0,146 5	49,366 0	49,219 5	0,760 8	4,500 0	45,480 3	0,101 4
7	70	0	50	50	0	5,250 0	44,750 0	—0,073 0
8	80	0	50	50	0	6,000 0	44	—0,075 0
9	90	0	50	50	0	6,750 0	43,250 0	—0,075 0
10	100	0	50	50	0	7,500 0	42,500 0	—0,075 0

Výpočet hodnot $c_2(x_2)$ je zcela analogický a nebudeme jej podrobněji popisovat. Numerické výsledky jsou v následujících dvou tabulkách, 12.6a a 12.6b, kde pro $c_2(x_2)$ opět značíme

$$c_2(x_2) = I_2(x_2) + II_2(x_2) - \frac{5}{40}x_2$$

a

$$II_2(x_2) = A_2(x_2) + B_2(x_2)$$

Tabulka 12.6b

j	x_2	$A_2(x_2)$	$B_2(x_2)$	$I_2(x_2)$	$II_2(x_2)$	$\frac{5}{40}x_2$	$c_2(x_2)$	s_{2j}
—	0	0	0	0	0	0	0	—
1	10	0	0	0	10	1,250 0	8,750 0	0,875 0
2	20	0	0	0	20	2,500 0	17,500 0	0,875 0
3	30	0	0	0	30	3,750 0	26,250 0	0,875 0
4	40	0	0	0	40	5,000 0	35	0,875 0
5	50	0	0	0	50	6,250 0	43,750 0	0,875 0
6	60	—0,055 0	0,343 7	0,288 7	59,705,4	7,500 0	52,494 1	0,874 4
7	70	—1,545 1	35	33,454 9	35	8,750 0	59,704 9	0,721 1
8	80	—0,055 0	69,656 3	69,601 3	0,398 0	10,000 0	59,999 3	0,029 4
9	90	0	70	70	0	11,250 0	58,750 0	—0,124 9
10	100	0	70	70	0	12,500 0	57,500 0	—0,125 0

A nyní již můžeme sestavit problém lineárního programování, který nám poskytne optimální hodnoty x_1 a x_2. Účelová funkce tohoto problému je

$$\begin{aligned} z = {} & 0{,}925\,0x_{11} + 0{,}925\,0x_{12} + 0{,}925\,0x_{13} + 0{,}923\,0x_{14} + \\ & + 0{,}748\,6x_{15} + 0{,}101\,4x_{16} - 0{,}073\,0x_{17} - 0{,}075\,0x_{18} - \\ & - 0{,}075\,0x_{19} - 0{,}075\,0x_{1,10} + 0{,}875\,0x_{21} + 0{,}875\,0x_{22} + \\ & + 0{,}875\,0x_{23} + 0{,}875\,0x_{24} + 0{,}875\,0x_{25} + 0{,}874\,4x_{26} + \\ & + 0{,}721\,1x_{27} + 0{,}029\,4x_{28} - 0{,}124\,9x_{29} - 0{,}125\,0x_{2,10} \end{aligned}$$

Protože

$$x_1 = \sum_{i=1}^{10} x_{1i}, \qquad x_2 = \sum_{i=1}^{10} x_{2i}, \tag{12.32}$$

mají omezení (12.30) tvar

$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i} + \sum_{i=1}^{10} x_{2i} = 100$$

Dále zřejmě musíme připojit omezení

$$0 \leqq x_{kj} \leqq 10 \qquad k = 1, 2,$$
$$j = 1, 2, \ldots, 10$$

Právě zformulovaná úloha lineárního programování má 20 proměnných a 21 omezení. Velký rozsah úlohy můžeme podstatně zmenšit, všimneme-li si, že některé koeficienty v účelové funkci jsou stejné:

Položme

$$x_{1\alpha} = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$
$$x_{1\beta} = x_{18} + x_{19} + x_{1,10}$$
$$x_{2\alpha} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25}$$
$$x_{2\beta} = x_{29} + x_{2,10}$$

Účelovou funkci můžeme nyní psát:

$$\begin{aligned} z = {} & 0{,}925\,0x_{1\alpha} + 0{,}923\,0x_{14} + 0{,}748\,6x_{15} + 0{,}101\,4x_{16} - \\ & - 0{,}073\,0x_{17} - 0{,}075\,0x_{1\beta} + \\ & + 0{,}875\,0x_{2\alpha} + 0{,}874\,4x_{26} + 0{,}721\,1x_{27} + 0{,}029\,4x_{28} - \\ & - 0{,}125\,0x_{2\beta} \end{aligned}$$

a omezení mají tvar

$$\begin{aligned} & x_{1\alpha} + \sum_{i=4}^{7} x_{1i} + x_{1\beta} + x_{2\alpha} + \sum_{i=6}^{8} x_{2i} + x_{2\beta} = 100 \\ & x_{1\alpha} \leqq 30,\ x_{1\beta} \leqq 30,\ x_{2\alpha} \leqq 50,\ x_{2\beta} \leqq 20 \\ & x_{14} \leqq 10,\ x_{15} \leqq 10,\ x_{16} \leqq 10,\ x_{17} \leqq 10 \\ & x_{26} \leqq 10,\ x_{27} \leqq 10,\ x_{28} \leqq 10 \\ & 0 \leqq x_{kj},\ k = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, 10 \end{aligned}$$

Vyřešením této úlohy lineárního programování (v našem případě není třeba žádných výpočtů) a s použitím (12.32) vidíme, že optimální hodnoty proměnných x_1 a x_2 jsou

$$x_1 = 40,\ x_2 = 60$$

Vypočteme, jaká bude průměrná čistá (tj. po odečtení dopravních nákladů) částka získaná prodejem zboží při distribuci podle optimálního plánu. Částku vypočteme dosazením optimálních hodnot x_1 a x_2 do účelové funkce (12.31):

$$\begin{aligned} g(40, 60) & = 4\,000[c_1(40) + c_2(60)] = \\ & = 4\,000[36{,}980\,7 + 52{,}494\,1] = \\ & = 357\,899{,}20 \text{ Kčs} \end{aligned}$$

Nyní vyšetřme, jaký bychom obdrželi výsledek, kdybychom zanedbali náhodný charakter příkladu a postupovali v praxi obvyklým způsobem, totiž tak, že bychom poptávku považovali za danou konstantu, zřejmě rovnou průměru normálních veličin B_1 a B_2, tedy 50 a 70 pro prvního a druhého odběratele. Pak bychom dostali obyčejný dopravní problém (tab. 12.7):

Tabulka 12.7

	Odběratel		Výroba v t
	1.	2.	
Výrobce	300	500	100
Poptávka v t	50	70	

Pomocí fiktivní stanice dostaneme optimální plán rozvozu zboží

$$x_1 = 50,\ x_2 = 50$$

Průměrná čistá částka získaná prodejem v tomto případě je

$$\begin{aligned} g(50, 50) & = 4\,000[c_1(50) + c_2(50)] = \\ & = 4\,000[44{,}465\,9 + 43{,}750\,0] = \\ & = 352\,863{,}60 \text{ Kčs,} \end{aligned}$$

tedy o 5 035,60 Kčs menší, než předpokládá plán $x_1 = 40$, $x_2 = 60$.

Wolfeho metoda pro kvadratické programování a aproximativní metoda pro separovatelné funkce ovšem zdaleka nevyčerpávají výpočetní prostředky nelineárního programování.

12.6 MATEMATICKÝ DODATEK K NELINEÁRNÍMU PROGRAMOVÁNÍ

1. Kvadratické formy

Funkce reálných proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

se nazývá kvadratická forma v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Můžeme na ni pohlížet také jako na funkci vektoru $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ z E_n (n-rozměrného euklidovského prostoru). Dále se omezíme na kvadratické formy, ve kterých pro konstanty c_{ij} platí $c_{ij} = c_{ji}$. Jestliže tento vztah není v nějaké kvadratické formě

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{*} x_i x_j$$

splněn, stačí formu přepsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(c_{ij}^* + c_{ji}^*)\,x_ix_j$$

a označit $c_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij}^* + c_{ji}^*)$

V maticovém tvaru lze kvadratickou formu zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.33}$$

Matice kvadratické formy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

pro kterou platí $c_{ij} = c_{ji}$, je tedy souměrná (symetrická).

Kvadratická forma (12.33) se nazývá pozitivně definitní (zkratka p.d.), platí-li pro všechna $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} > 0 \tag{12.34}$$

Kvadratická forma se nazývá pozitivně semidefinitní (zkratka p.sd.), jestliže pro všechna $\mathbf{x}$ platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0, \tag{12.35}$$

přičemž rovnost nastává i pro některé nenulové vektory $\mathbf{x}$.

Platí-li ve vztahu (12.34) nerovnost obrácená (< 0), je kvadratická forma negativně definitní (n.d.), a platí-li obrácená nerovnost ($\leqq 0$) ve vztahu (12.35), nazývá se taková kvadratická forma negativně semidefinitní (n. sd.).

Matice $\mathbf{C}$, příslušné k takovým kvadratickým formám, se rovněž nazývají (po řadě) p.d., p.sd., n.d. a n.sd.

Nabývá-li kvadratická forma (12.33) jak kladných, tak i záporných hodnot, nazývá se indefinitní.

Příklady: Funkce

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 - x_2^2 =$$
$$= [x_1, x_2] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{12.36}$$

je kvadratická forma v proměnných x_1, x_2.

Kvadratická forma

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

v proměnných x_1, x_2, x_3 je zřejmé p. d. a forma $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$ n. d.

Kvadratická forma (12.36) je indefinitní, neboť např. pro vektor [1, 0] nabývá hodnoty 3 a pro vektor [0, 1] hodnoty -1.

U složitějších kvadratických forem je někdy obtížné přímo rozhodnout o definitnosti formy. Můžeme si však pomoci použitím těchto vět, které uvedeme bez důkazu:

Věta 12.1: Kvadratická forma s maticí C je p. d. tehdy, a jen tehdy, jestliže

$$c_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Věta 12.2: Kvadratická forma s maticí $\mathbf{C}$ je p. sd. tehdy, a jen tehdy, jestliže všechny hlavní minory matice $\mathbf{C}$ jsou nezáporné.

Hlavním minorem matice $\mathbf{C}$ se nazývá každý determinant tvaru

$$\begin{bmatrix} c_{i_1i_1} & c_{i_1i_2} & \cdots & c_{i_1i_p} \\ c_{i_2i_1} & c_{i_2i_2} & \cdots & c_{i_2i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i_pi_1} & c_{i_pi_2} & \cdots & c_{i_pi_p} \end{bmatrix},$$

kde platí: $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n$. Takový determinant dostaneme, jestliže v matici $\mathbf{C}$ vyškrtáme všechny řádky a sloupce, kromě řádků a sloupců $i_1, i_2, \ldots, i_p$, a z nepřeškrtaných prvků sestavíme determinant (aniž bychom měnili vzájemné postavení prvků).

Chceme-li rozhodnout o n. definitnosti nebo o n. semidefinitnosti, stačí vyšetřovat formu

$$-\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{12.37}$$

Jestliže je totiž forma (12.33) n. d., pak forma (12.37) je p. d. – a obdobně pro semidefinitnost.

Příklad: Kvadratická forma

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 + 8x_1x_4 +$$
$$+ 2x_2x_3 + 4x_2x_4 \tag{12.38}$$

s maticí

$$-\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

není ani p. d., ani p. sd.; je totiž

$$1 > 0, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \text{ale} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Kvadratická forma (12.38) není však ani n. d. nebo n. sd. Uvažujeme-li místo matice **C** matici

$$-\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pak hned první prvek -1 nevyhovuje podmínce ve větě 12.1.

2. Konvexní a konkávní funkce

Funkce $f(x)$ jedné reálné proměnné x se nazývá konvexní v intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže pro každou konvexní kombinaci libovolných bodů x, y z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

$$f(k_1 x + k_2 y) \leqq k_1 f(x) + k_2 f(y) \tag{12.39}$$

k_1 a k_2 jsou koeficienty konvexní kombinace, tj.

$$k_1 + k_2 = 1, \; k_1 \geqq 0, \; k_2 \geqq 0$$

Jestliže pro koeficienty $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ a různé body x, y vždy platí v (12.39) ostrá nerovnost, pak se funkce nazývá ryze konvexní.

Funkce $f(x)$ je konkávní, je-li funkce $-f(x)$ konvexní, a je ryze konkávní, je-li funkce $-f(x)$ ryze konvexní. Na obr. 12.4 jsou konkávní funkce, na obr. 12.5 je funkce konvexní.

Uvažujme nyní funkci $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ n reálných proměnných, definovanou na konvexní množině M z E_n. Tato funkce se nazývá konvexní v M, jestliže pro každou konvexní kombinaci různých bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z M platí (12.39). Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou ovšem nyní n-rozměrné. Funkce ryze konvexní, konkávní a ryze konkávní jsou definovány zcela obdobně jako v jednorozměrném případě. Znázornění konkávní funkce v dvourozměrném případě je na obr. 12.8.

Z hlediska nelineárního programování je velmi důležité umět rozhodnout, zda určitá (účelová) funkce je konvexní či konkávní. Uvedeme dvě věty, které nám při takovém rozhodování mohou pomoci.

Věta 12.3: Nechť $f_i(\mathbf{x})$ jsou pro $i = 1, 2, \dots, m$ konvexní funkce definované na téže konvexní množině $M \subset E_n$. Nechť $k_1 \geqq 0, \dots, k_m \geqq 0$ jsou dané nezáporné konstanty.

Potom funkce

$$\sum_{i=1}^{m} k_i f_i(\mathbf{x})$$

je rovněž konvexní na M.

Věta 12.4: Nechť $f(\mathbf{x})$ je funkce definovaná na konvexní množině $M \subset E_n$ a nechť má v této množině spojité druhé derivace. Potom $f(\mathbf{x})$ je konvexní v M tehdy, a jen tehdy, jestliže matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

kde $c_{ij} = \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i \, \partial x_j}$, je p. sd. pro všechna $\mathbf{x}$ z M.

Jestliže **C** je p. d., pak $f(\mathbf{x})$ je ryze konvexní.

Poznamenejme, že z věty 12.3 vyplývá, že součet konvexních funkcí je také konvexní funkce. Speciálním případem věty 12.4 je známé tvrzení, že funkce jedné reálné proměnné je konvexní, má-li nezápornou druhou derivaci.

Vyšetřování konkávních funkcí převedeme na konvexní případ změnou znaménka funkce.

Příklady: Lineární forma $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ je současně konvexní i konkávní funkce. Není však ani ryze konvexní, ani ryze konkávní.

Kvadratická forma (12.36) není konvexní funkce, neboť matice druhých derivací

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

podle věty 12.2 není p. sd. V případě, že vyšetřovaná funkce je kvadratická forma, je tedy matice druhých derivací totožná s maticí kvadratické formy.

Kvadratická forma (12.36) není ani konkávní, neboť pak by

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

musela být p. sd. S použitím věty 2 nahlédneme, že tomu tak není.

Jako další příklad vyšetřeme účelovou funkci (12.3). Tato funkce deseti proměnných $x_1, \dots, x_5, x_1', \dots, x_5'$ má tvar

$$z = \sum_{i=1}^{5} [(0{,}1x_i^2 - 19x_i + 1\,500)\, x_i + c_i x_i']$$

Lineární formu $\sum_{i=1}^{5} c_i x_i'$ můžeme z vyšetřování vypustit, neboť jejím přičtením se nic na konkávnosti či konvexnosti nezmění. Avšak pozor, funkce z nemůže být ani ryze konvexní, ani ryze konkávní, neboť pro dva nenulové body z E_{10} tvaru $[0, \dots, 0, x_1', \dots, x_5']$ a $[0, \dots, 0, y_1', \dots, y_5']$ bude ve vztahu (12.39) platit rovnost. Vyšetřujeme tedy funkci

$$\sum_{i=1}^{5} (0{,}1x_i^3 - 19x_i^2 + 1\,500x_i) \qquad (12.40)$$

Matice druhých derivací funkce (12.40) je, jak se snadno přesvědčíme, diagonální matice, jejíž prvky mají tvar $0{,}6x_1 - 38, \dots, 0{,}6x_5 - 38$. Mají-li být všechny tyto prvky nezáporné, je třeba, aby současně $x_1 \geqq 63\frac{1}{3}, \dots, x_5 \geqq 63\frac{1}{3}$. Na této množině je z konvexní, neboť pak jsou zřejmě splněny podmínky věty 12.2. Abychom se přesvědčili, jak se z chová pro $\mathbf{x}$ z množiny $0 \leqq \mathbf{x} \leqq \left[63\frac{1}{3}, \dots, 63\frac{1}{3}\right]$, uvažujme funkci (12.40) se znaménkem minus. Diagonální matice má pak prvky

$$-0{,}6x_i + 38 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

Jestliže jsou všechna $x_i \leqq 63\frac{1}{3}$, pak jsou tyto prvky nezáporné, a matice je tedy p. sd., $-z$ je konvexní a funkce z konkávní na uvažované množině.

Na zbývající části množiny $\mathbf{x} \geqq 0$ je možno chování funkce vyšetřit podobným způsobem. Funkce z tam ovšem nebude konvexní, jak bychom při minimalizaci potřebovali.

3. Extrémy funkce

Nechť $f(\mathbf{x})$ je funkce definovaná na množině $M \subset E_n$. Existuje-li okolí bodu $\bar{\mathbf{x}}$ z M takové, že

$$f(\mathbf{x}) \leqq f(\bar{\mathbf{x}}) \qquad (12.41)$$

pro všechna $\mathbf{x}$ z tohoto okolí, říkáme, že funkce f má v bodě $\bar{\mathbf{x}}$ lokální maximum.

Platí-li nerovnost (12.41) pro všechna $\mathbf{x}$ z M, pak říkáme, že funkce f má v bodě $\bar{\mathbf{x}}$ absolutní maximum vzhledem k M.

Definice lokálního a absolutního minima dostaneme, obrátíme-li v (12.41) smysl nerovnosti.

Maxima a minima nazýváme souhrnně extrémy funkce (extrémy lokální, absolutní). Platí-li v (12.41) ostrá nerovnost, říkáme, že extrémy jsou ostré.

O existenci extrémů platí tyto věty:

Věta 12.5: Je-li M uzavřená a omezená množina a je-li funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá, existuje v M aspoň jeden bod $\bar{\mathbf{x}}$, v němž funkce $f(\mathbf{x})$ nabývá svého absolutního maxima, a aspoň jeden bod, $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$, v němž $f(\mathbf{x})$ nabývá svého absolutního minima.

Věta 12.6: Je-li M konvexní množina a $f(\mathbf{x})$ ryze konvexní funkce, má $f(\mathbf{x})$ v M nejvýše jedno lokální minimum. Každé lokální minimum je absolutní minimum vzhledem k M.

Věta 12.7: Je-li M konvexní, uzavřená a omezená množina a $f(\mathbf{x})$ ryze konvexní funkce, má $f(\mathbf{x})$ v M právě jedno absolutní minimum vzhledem k M.

Věta 12.8: Je-li M konvexní množina a $f(\mathbf{x})$ ryze konkávní funkce, má $f(\mathbf{x})$ v M nejvýše jedno lokální maximum. Každé lokální maximum je absolutní maximum vzhledem k M.

Věta 12.9: Je-li M konvexní, uzavřená a omezená množina a $f(\mathbf{x})$ ryze konkávní funkce, má $f(\mathbf{x})$ v M právě jedno absolutní maximum vzhledem k M.

Snadno nahlédneme, že všechna minima a maxima ve větách 12.6, 12.7, 12.8 a 12.9 musí být ostrá.

Případy, o nichž pojednávají věty 12.7 a 12.9, jsou nejlépe zvládnutelné metodami nelineárního programování.

4. Metoda Lagrangeových multiplikátorů — Souvislost s matematickým programováním

Klasickou metodou pro vyhledávání extrémů funkce $g(x_1, \dots, x_n)$ na množině $M \subset E_n$ řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{c} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \qquad (12.42)$$

je metoda Lagrangeových multiplikátorů. Tuto metodu nyní stručně připomeneme.

Předpokládejme, že $m \leqq n$, a utvořme funkci $n + m$ proměnných

$$[x_1, \dots, x_n, \quad u_1, \dots, u_m]$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x_1, \dots, x_n), \qquad (12.43)$$

kde $u_1, \dots, u_n$ je vektor tzv. Lagrangeových multiplikátorů. Princip metody spočívá v tom, že extrémy funkce $g(x_1, \dots, x_n)$ při podmínkách (12.42) stačí hledat mezi prvními n souřadnicemi bodů $[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]$, které splňují následujících $m + n$ rovnic:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} = 0, & \dfrac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} = 0 \end{array} \qquad (12.44)$$

Přesněji platí tyto věty:

Věta 12.10: Budiž M_1 nějaká otevřená množina v E_n. Nechť funkce $g, g_1, \dots, g_m$ mají v M_1 spojité první derivace a nechť matice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

má všude v M_1 hodnost m. Potom platí, že má-li g v nějakém bodě $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n] \in M_1$ lokální extrém vzhledem k M, existuje vektor $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]$, který splňuje rovnice (12.44).

Věta 12.11: Nechť platí předpoklady jako ve větě 12.10 a nechť $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]$ splňuje rovnice (12.44), $\bar{\mathbf{x}} \in M_1$. Dále nechť $g, g_1, \dots, g_m$ mají v bodě $\bar{\mathbf{x}}$ spojité parciální derivace podle složek vektoru $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$. Matici druhých derivací funkce f (táž matice jako ve větě 12.4) vypočtených v bodě $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ označme $\bar{\mathbf{C}}$.

Sestavme kvadratickou formu

$$\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}$$

Matici $\mathbf{D}$ vypočtenou v bodě $\bar{\mathbf{x}}$ označme $\bar{\mathbf{D}}$. Ze soustavy rovnic

$$\bar{\mathbf{D}}\mathbf{x} = 0$$

můžeme vypočíst m složek vektoru $\mathbf{x}$ jako lineární funkce zbývajících $n - m$ složek. Dosadíme-li do kvadratické formy $\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}$ za tyto vypočtené složky výrazy ve zbývajících $n - m$ proměnných, dostaneme kvadratickou formu o $n - m$ proměnných.

Jestliže je tato forma p.d., má g v $\bar{\mathbf{x}}$ ostré lokální minimum, jestliže je n.d., má g v $\bar{\mathbf{x}}$ ostré lokální maximum; je-li indefinitní, nemá g v $\bar{\mathbf{x}}$ extrém. Všechny extrémy se zde rozumějí vzhledem k M.

Jako příklad řešme tuto úlohu:

Jaké rozměry musí mít válcová konzerva s obsahem 1 l, aby měla ze všech konzerv válcového tvaru nejmenší možný povrch (jinými slovy, aby se na ni spotřebovalo co nejméně plechu)?

Označme x_1 poloměr základny konzervy a x_2 její výšku. Povrch, který máme minimalizovat, je dán výrazem

$$g(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 \,.\, x_2$$

Nás zajímají jen takové konzervy, jejichž obsah je 1 l = 1 000 cm^3:

$$g_1(x_1, x_2) = \pi x_1^2 \,.\, x_2 - 1000 = 0$$

Funkce g a g_1 mají spojité derivace všech řádů např. v celém E_2:

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right] = [2\pi x_1 \,.\, x_2, \pi x_1^2]$$

Aby tato matice měla hodnost 1, musíme vyloučit počátek a omezit se např. na otevřenou množinu $M_1 : x_1 > 0,\ x_2 > 0$, jak také vyžaduje smysl úlohy. Nyní

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g_1(x_1, x_2) + u_1 \,.\, g_1(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 \,.\, x_2 + u_1(\pi x_1^2 \,.\, x_2 - 1\,000)$$

Soustava (12.44) má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4\pi x_1 + 2\pi x_2 + u_1 \,.\, 2\pi x_1 x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2\pi x_1 + u_1 \,.\, \pi x_1^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} &= \pi x_1^2 x_2 - 1\,000 = 0 \end{aligned} \tag{12.45}$$

Řešením soustavy dostáváme:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \sqrt[3]{\frac{1\,000}{2}} \\ \bar{x}_2 &= 2\bar{x}_1 \\ \bar{u}_1 &= -\frac{2}{\bar{x}_1} \end{aligned} \tag{12.46}$$

Že jde skutečně o minimum, dokažme pomocí věty 12.11. Matice druhých derivací $\bar{\mathbf{C}}$ je

$$\begin{bmatrix} 4\pi + \bar{u}_1 \,.\, 2\pi\bar{x}_2; & 2\pi + \bar{u}_1 \,.\, 2\pi\bar{x}_1 \\ 2\pi + \bar{u}_1 \,.\, 2\pi\bar{x}_1; & 0 \end{bmatrix}$$

a kvadratická forma $\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}$ k ní příslušná je

$$(4\pi + \bar{u}_1 \,.\, 2\pi\bar{x}_2)\,\bar{x}_1^2 + 2(2\pi + \bar{u}_1 \,.\, 2\pi\bar{x}_1)\,x_1 x_2$$

a po dosazení podle 12.46

$$-4\pi x_1^2 - 4\pi x_1 x_2 \tag{12.47}$$

Proměnné x_1, x_2 v této kvadratické formě nesmějí být ovšem zaměňovány s původními neznámými v úloze.

Ze soustavy rovnic $\bar{\mathbf{D}}\mathbf{x} = 0$:

$$2\pi\bar{x}_1\bar{x}_2 \,.\, x_1 + \pi x_1^2 \,.\, x_2 = 0,$$

což po dosazení z (12.46) a po úpravě je

$$4x_1 + x_2 = 0,$$

vypočteme x_2 a dosadíme do kvadratické formy (12.47). Dostaneme

$$-4\pi x_1^2 + 16\pi x_1^2 = 12\pi x_1^2$$

To je p.d. kvadratická forma v proměnné x_1, a extrém je tedy ostré lokální minimum vzhledem k množině M určené řešením rovnice $\pi x_1^2 x_2 - 1\,000 = 0$. Protože rovnice (12.45) mají jediné kladné řešení, nemá funkce $g(x_1, x_2)$ jiné kladné extrémy vzhledem k M a řešení dané vztahy (12.46) je jediné řešení naší úlohy.

Upozorněme ještě, že je-li kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$ pouze p.sd. nebo n.sd., může, ale nemusí extrém nastat. Rovněž je důležité o jakou formu v jakých proměnných jde. Např. forma $x_1^2 + x_2^2$ je p.d. v proměnných x_1, x_2, ale p.sd. v proměnných x_1, x_2, x_3.

Studenti obeznámení s metodou Lagrangeových multiplikátorů jsou někdy překvapeni, proč se mluví zvlášť o lineárním a nelineárním programování, když jde o to, nalézt extrém funkce při vedlejších podmínkách. Je dobře v této souvislosti připomenout často užívaný výrok, že „nerovnosti můžeme pomocí přídatných proměnných převést na rovnice“.

Objasněme, jaký je vztah mezi klasickou metodou Lagrangeových multiplikátorů a lineárním, popř. nelineárním programováním. Pro stručnost a názornost provedeme výklad na příkladě pro lineární případ. Podstata věci však bude na tomto příkladě dobře patrna:

Hledejme maximum funkce

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

při omezeních

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq b_2 \\ x_1 \geqq 0, \quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

„Převedeme-li“ nerovnosti na rovnice pomocí přídatných proměnných, dostaneme omezení

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 &= b_2 \\ x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

To ještě není úloha, na kterou by bylo možno aplikovat věty 12.10 a 12.11, neboť v omezeních jsou ještě nerovnosti. Položme však

$$x_i = z_i^2, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Potom problém můžeme formulovat takto: Najít maximum funkce

$$c_1z_1^2 + c_2z_2^2 \tag{12.48}$$

při omezeních

$$\begin{aligned} a_{11}z_1^2 + a_{12}z_2^2 + z_3^2 \phantom{{}+ z_4^2} - b_1 &= 0 \\ a_{21}z_1^2 + a_{22}z_2^2 \phantom{{}+ z_3^2} + z_4^2 - b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12.49}$$

Z předchozího tedy vyplývá: Některé nerovnosti můžeme pomocí přídatných proměnných převést na rovnice, ovšem za cenu toho, že se nám další nerovnosti ($x_3 \geqq 0$, $x_4 \geqq 0$) v omezeních objeví. V případě lineárního modelu se vždy můžeme zbavit nerovností substitucí $x_i = z_i^2$, avšak za cenu toho, že model přestane být lineární.

Úlohy s účelovou funkcí (12.48) a omezeními (12.49) můžeme již vyšetřovat pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = c_1z_1^2 + c_2z_2^2 &+ u_1(a_{11}z_1^2 + a_{12}z_2^2 + z_3^2 - b_1) + \\ &+ u_2(a_{21}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + z_4^2 - b_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = 2c_1z_1 + 2u_1a_{11}z_1 + 2u_2a_{21}z_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = 2c_2z_2 + 2u_1a_{12}z_2 + 2u_2a_{22}z_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_3} = 2u_1z_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_4} = 2u_2z_4 = 0$$

Rovnice $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial u_2} = 0$ jsou totožné s rovnicemi (12.49).

K tomu, abychom našli řešení uvedené úlohy lineárního programování pomocí Lagrangeových multiplikátorů, musíme řešit posledních šest rovnic vzhledem k neznámým $z_1, z_2, z_3, z_4, u_1, u_2$ a mezi řešeními pak najít to, jehož první dvě složky maximalizují funkci (12.48). Je vidět, že ani pro náš jednoduchý příklad to není snadná úloha. Dokonce lze ukázat, že najít všechna řešení zmíněných rovnic značí totéž jako najít všechna základní řešení původní úlohy lineárního programování.

Můžeme tedy shrnout: pomocí Lagrangeových multiplikátorů lze problémy lineárního (a zřejmě i nelineárního) programování převést na řešení jiné úlohy, která však není jednodušší než sám původní problém.

K tomu, aby se metody Lagrangeových multiplikátorů dalo využít v matematickém programování, je nutno ji podstatně upravit. Tato úprava je známa jako Kuhnův-Tuckerův teorém nebo jako věta o sedlovém bodě (viz odst. 12.3 kapitoly o nelineárním programování). Věta o sedlovém bodě pak tvoří východisko pro výpočetní postupy, odvozování vlastností duálních úloh apod.

12.7 CVIČENÍ

1. Ukažte, že účelová funkce (12.1) je konkávní pro $a_{ij} \leqq 0$ a konvexní pro $a_{ij} \geqq 0$.

2. Určete, pro která a je účelová funkce (12.2) konkávní a pro která konvexní. Čemu to odpovídá ekonomicky?

3. Je účelová funkce (12.3) konkávní nebo konvexní? Jak by musely záviset náklady na jednotku suroviny na vyráběném množství, aby úloha byla řešitelná pomocí (neceločíselného) lineárního programování metodou popsanou v odst. 12.5?

4. Najděte Wolfeho metodou minimum kvadratické funkce

$$x_1 - 10x_2 + x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2$$

při omezeních

$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\quad &+ x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 20 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ &x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

Předem ukažte, že uvedená účelová funkce je ryze konvexní.

5. Najděte Wolfeho metodou minimum kvadratické funkce

$$10x_1^2 + 6x_2^2$$

při omezeních

$$\begin{aligned} &1 \leqq x_1 + 2x_2 \leqq 3 \\ &0 \leqq x_1 \leqq 2,\ 0 \leqq x_2 \end{aligned}$$

6. Spočítejte pomocí metody pro separovatelnou účelovou funkci příklad kvadratického programování z odst. 12.4.

Minimalizujte:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

při omezeních

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

12.8 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ – ZÁKLADNÍ PRINCIP

Některé ekonomické rozhodovací problémy jsou takové povahy, že musíme rozhodovat postupně v různých etapách, přičemž v každé etapě stojíme před „strukturálně stejnou" situací. Naše rozhodnutí je pak ovlivněno jednak rozhodnutími v předchozích etapách, jednak očekávanými stavy systému, v němž rozhodování provádíme. Pro řešení matematických úloh, k nimž rozhodovací problémy tohoto typu vedou, je zvlášť vhodný matematický aparát často nazývaný dynamické programování. Největší zásluhu o rozšíření dynamického programování nutno přičíst matematikovi Richardu Bellmanovi a jeho spolupracovníkům.

Je nutno však říci, že zmíněná postupnost nebo dynamičnost rozhodování je zpravidla otázkou formulace, popř. volby matematického modelu. Na druhé straně lze metod dynamického programování principiálně použít pro řadu jiných extremalizačních úloh, bohužel často s nízkou efektivností při skutečných numerických výpočtech. Je tedy možno nahlížet na dynamické programování jako na jednu z metod nelineárního programování anebo jako na jeden z principů pro hledání extrémů při vedlejších podmínkách. Na rozdíl od programování lineárního nebo nelineárního je těžko explicitně blíže formulovat, pro jaké matematické úlohy je dynamické programování určeno, neboť otázka praktické realizace navržených postupů, jak ještě dále uvidíme, zde hraje zásadní úlohu.

Princip dynamického programování není složitý, při osvojování však činí jisté potíže, neboť nepřipomíná nic, co se přednáší v běžných kursech matematiky. Snad čtenáři obeznámení s větou o převádění vícerozměrných integrálů na sled integrací jednorozměrných zde najdou jisté analogie. V dynamickém programování jde rovněž o převedení vícerozměrné maximalizační úlohy na sled úloh jednorozměrných, kde ovšem extrémy jsou funkce jistých parametrů. Pokusíme se tuto základní myšlenku objasnit na několika příkladech.

Řešme nejdříve pomocí dynamického programování úlohu najít minimum účelové funkce

$$g(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_nx_n^2 \tag{12.50}$$

při podmínkách

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A, \\ &x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, \end{aligned}$$

kde A je daná konstanta. Minimum funkce (12.50) můžeme hledat také tak, že nejdříve minimalizujeme funkci

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1}^2$$

při podmínce

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = A - x_n\ ,$$

a při podmínkách nezápornosti (ty už nebudeme dále zvlášť připomínat). Toto minimum pak bude funkcí x_n, a tedy i rozdílu $A - x_n$. Označme tuto poslední funkci $F_{n-1}(\xi)$; ξ je nové označení pro argument $A - x_n$. Definujeme tedy

$$F_{n-1}(\xi) = \min\,[c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1}^2],$$

kde minimum bereme pro $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pro která platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = \xi$$

Řešení původní úlohy dostaneme, nalezneme-li

$$\min_{0 \leqq x_n \leqq A} \,[c_nx_n^2 + F_{n-1}(A - x_n)],$$

což je už jednorozměrná minimalizace. Tím jsme vlastně původní n-rozměrnou minimalizační úlohu převedli na minimalizaci n – 1-rozměrnou a jednorozměrnou.

Kolem tohoto postupu mohou vzniknout některé nejasnosti: Především, zda je takové „rozdělení" minimalizace přípustné, tj. dostaneme-li obecně stejný výsledek jako při současné minimalizaci přes všech n proměnných. Tzv. princip optimality odpovídá na tuto otázku kladně. Vyžaduje to ovšem důkaz nebo aspoň komentář (jestliže jde o princip), ale tím se zde nebudeme zabývat. V dalších příkladech pak bude platnost principu optimality zcela zřejmá.

Dále může vzniknout otázka, zda nám toto rozdělení při výpočtu pomůže – je-li totiž nová úloha jednodušší než původní. To souvisí s problémem nalezení funkce $F_{n-1}(\xi)$. Tuto funkci můžeme nalézt opakováním původního obratu:

$$F_{n-1}(\xi) = \min_{x_1+\ldots+x_{n-1}=\xi} [c_1x_1^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1}^2] =$$
$$= \min_{0\leqq x_{n-1}\leqq\xi} [c_{n-1}x_{n-1}^2 + \min_{x_1+\ldots+x_{n-2}=\xi-x_{n-1}} c_1x_1^2 + \ldots + c_{n-2}x_{n-2}^2]$$

Poslední minimum bude opět záviset na $\xi - x_{n-1}$ a můžeme pro ně zavést označení $F_{n-2}(\eta)$, takže máme stejnou situaci jako předtím:

$$F_{n-1}(\xi) = \min_{0\leqq x_{n-1}\leqq\xi} [c_{n-1}x_{n-1}^2 + F_{n-2}(\xi - x_{n-1})] \qquad (12.51)$$

Můžeme tak postupovat až do

$$F_1(\omega) = \min_{x_1=\omega} c_1x_1^2,$$

což snadno nalezneme. Označme bod, který řeší tuto úlohu, jako $x_1(\omega)$ (závisí na parametru ω; zde ovšem $x_1(\omega) = \omega$). Nyní můžeme počítat zpátky funkci F a zaznamenávat optimální x, až známe $x_{n-1}(\xi)$, řešící úlohu (12.51) a celou posloupnost

$$F_1(\omega), \ldots, F_{n-2}(\eta), F_{n-1}(\xi) \qquad (12.52)$$

Pak můžeme najít i hodnotu původní účelové funkce, kterou v našem systému značení můžeme označit jako $F_n(A)$:

$$F_n(A) = \min_{0\leqq x_n\leqq A} [c_nx_n^2 + F_{n-1}(A - x_n)]$$

Řešení $\bar{x}_n$ této jednorozměrné úlohy je i poslední složkou optimálního vektoru $\bar{\mathbf{x}}$. Ostatní složky zřejmě dostaneme ze vztahů

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n-1} &= x_{n-1}(A - \bar{x}_n) \\ \bar{x}_{n-2} &= x_{n-2}(A - \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) \qquad (12.53) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_1 &= x_1(A - \bar{x}_n - \ldots - \bar{x}_2) \end{aligned}$$

Tím je celá úloha převedena na jednorozměrné minimalizace, kde minima závisí na parametrech $\omega, \ldots, \eta, \xi$. Otázka numerické efektivnosti dynamického programování spočívá právě v tom, je-li nalezení těchto minim snazší než původní problém. To je ovšem různé případ od případu.

Zrekapitulujme tedy, co je podstatné pro řešení úloh metodou dynamického programování:

Především zavedeme posloupnost funkcí (12.52), pro které odvodíme rekurentní vztahy tvaru (12.51). Vyřešíme minimalizační úlohu danou funkcí $F_1(\omega)$ a postupujeme až do výpočtu $F_n(A)$. V každém kroku zaznamenáváme bod, v němž extrém nastává a řešení původní úlohy dostaneme zpětným dosazením do bodů, v nichž pomocné funkce (12.52) nabývají extrémů (vzorce (12.53)). Protože funkcí (12.52) se při výpočtech používá každé jen pro jeden krok, bývá zvykem značit argumenty všech těchto funkcí stejným symbolem, např. ξ, což budeme dále také dodržovat, pokud nebude nebezpečí nedorozumění.

Postup ještě předvedeme na číselném příkladě:

Minimalizovat $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$

při omezeních $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $x_3 \geqq 0$.

$$\text{Je } F_3(9) = \min_{x_1+x_2+x_3=9} [x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2] = \min_{0\leqq x_3\leqq 9} [x_3^2 + \min_{x_1+x_2=9-x_3} (x_1^2 + 2x_2^2)] =$$
$$= \min_{0\leqq x_3\leqq 9} [x_1 + F_2(9 - x_3)]$$

$$F_2(\xi) = \min_{x_1+x_2=\xi} [x_1^2 + 2x_2^2] = \min_{0\leqq x_2\leqq\xi} [2x_2^2 + F_1(\xi - x_2)]$$

$$F_1(\xi) = \min_{x_1=\xi} x_1^2$$

Dále

$$x_1(\xi) = \xi \quad \text{a} \quad F_1(\xi) = \xi^2$$

$$F_2(\xi) = \min_{0\leqq x_2\leqq\xi} [2x_2^2 + (\xi - x_2)^2]$$

Tento jednorozměrný extrém najdeme v tomto případě snadno klasickým způsobem anulování derivace,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2} [2x_2^2 + (\xi - x_2)^2] = 4x_2 - 2(\xi - x_2) = 0,$$

a řešením

$$x_2(\xi) = \frac{\xi}{3}, \qquad F_2(\xi) = \frac{2}{3}\xi^2$$

Dále

$$F_3(9) = \min_{0\leqq x_3\leqq 9} \left[x_3^2 + \frac{2}{3}(9 - x_3)^2\right]$$

Tento extrém najdeme rovněž snadno stejným způsobem jako v předchozím případě:

$$\bar{x}_3 = \frac{18}{5}, \quad F_3(9) = \frac{162}{5}$$

(hodnota účelové funkce)
Podle (12.53) potom máme

$$\bar{x}_2 = \frac{9 - \frac{18}{5}}{3} = \frac{9}{5}$$

$$\bar{x}_1 = 9 - \frac{18}{5} - \frac{9}{5} = \frac{18}{5}$$

Hladký průběh výpočtu se v tomto příkladě opírá především o konvexnost minimalizované funkce. Metoda dynamického programování má však jednu sympatickou vlastnost:

Zatímco požadavek celočíselnosti průběh výpočtu u běžných programovacích postupů komplikuje, u dynamického programování je tomu spíše naopak.

Postup výpočtu při podmínce celočíselnosti bude předveden na následujícím ilustrativním příkladě. Jinak metody dynamického programování v tomto druhu použití vyžadují výkonné samočinné počítače. Jde vlastně o metodu nahrazující vyzkoušení všech možných variant. Protože těch je konečný počet, lze takto celočíselné úlohy v principu vždy řešit.

Máme přepravit 7 stejných beden pomocí tří různých nákladních vozidel, která označme A, B a C. Na druh A se vejde nejvýše jedna bedna, na druh B současně dvě bedny a na C můžeme naložit současně tři bedny. Vozidla mohou jet i víckrát; přitom musíme za každou cestu platit plné náklady, bez ohledu, zda je vozidlo vytíženo či nikoli, a to 80 Kčs za jednu cestu vozidla A, 140 Kčs za jednu cestu vozidla B a 210 Kčs za cestu vozidla C. Podaří-li se nám však některé vozidlo úplně uvolnit, tj. nepoužijeme-li ho vůbec, můžeme je pronajmout a získáme (jednorázově) za A 100 Kčs, za B 180 Kčs a za C 300 Kčs. Je otázka, jak zorganizovat dopravu tak, aby zisk za pronájem vozidel po odečtení dopravních nákladů na přepravu byl maximální. Označíme-li postupně x_1, x_2, x_3 počet beden přepravovaných na vozidlech A, B, C, pak účelová funkce bude

$$g(x_1, x_2, x_3) = (1 - \operatorname{sgn} x_1)\,100 - 80x_1 + (1 - \operatorname{sgn} x_2)\,180 - \left\{\frac{x_2}{2}\right\} 140 + (1 - \operatorname{sgn} x_3)\,300 - \left\{\frac{x_3}{3}\right\} 210$$

a omezení bude

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

přičemž x_1, x_2, x_3 jsou celočíselná, nezáporná; sgn x je funkce definovaná jako sgn 0 = 0

$$\operatorname{sgn} x = 1 \text{ pro } x > 0;$$

$\{x\}$ nechť značí nejmenší celé číslo větší nebo rovné x, tedy např. $\left\{\frac{3}{2}\right\} = 2$, $\{6, 1\} = 7$, $\{6\} = 6$

Stejně jako v předchozím příkladě bude

$$F_3(7) = \max_{0 \leqq x_3 \leqq 7} \left[(1 - \operatorname{sgn} x_3)300 - \left\{\frac{x_3}{3}\right\} 210 + F_2(7 - x_3) \right], \quad (12.54)$$

kde

$$F_2(\xi) = \max_{x_1 + x_2 = \xi} \left[(1 - \operatorname{sgn} x_1)\,100 - 80x_1 + (1 - \operatorname{sgn} x_2)\,180 - \left\{\frac{x_2}{2}\right\} 140 \right] =$$

$$= \max_{0 \leqq x_2 \leqq \xi} \left[(1 - \operatorname{sgn} x_2)\,180 - \left\{\frac{x_2}{2}\right\} 140 + F_1(\xi - x_2) \right] \quad (12.55)$$

$$F_1(\xi) = \max_{x_1 = \xi} \left[(1 - \operatorname{sgn} x_1)\,100 - 80x_1 \right] = (1 - \operatorname{sgn} \xi) \,.\, 100 - 80\xi$$

Zřejmě $x_1(\xi) = \xi$.
Dále počítáme

$$F_2(\xi) = \max_{0 \leqq x_2 \leqq \xi} \left[(1 - \operatorname{sgn} x_2)\,180 - \left\{\frac{x_2}{2}\right\} 140 + (1 - \operatorname{sgn}(\xi - x_2))\,100 - 80(\xi - x_2) \right]$$

Odtud nemůžeme již bezprostředně získat $x_2(\xi)$ a $F_2(\xi)$ v analytickém tvaru; proto musíme pro obě funkce použít tabelace. To je spolu s výpočtem extrému provedeno v tab. 12.8.

VÝPOČET EXTRÉMU $F_2(\xi)$ *Tabulka 12.8*

ξ	$x:0$	1	2	3	4	5	6	7	$F_2(\xi)$	$x_2(\xi)$
0	280	—	—	—	—	—	—	—	280	0
1	100	—40	—	—	—	—	—	—	100	0
2	20	—220	—40	—	—	—	—	—	20	0
3	—60	—300	—220	—180	—	—	—	—	—60	0
4	—140	—380	—300	—360	—180	—	—	—	—140	0
5	—220	—460	—380	—440	—360	—320	—	—	—220	0
6	—300	—540	—460	—520	—440	—500	—320	—	—300	0
7	—380	—620	—540	—600	—520	—580	—500	—460	—380	0

Podle vzorce (12.54) nyní již snadno počítáme $F_3(7)$:

Tabulka 12.9

x_3:	0	1	2	3	4	5	6	7
Výpočet	—80	—510	—430	—350	—480	—400	—320	—350

Odtud dostáváme, že $\bar{x}_3 = 0$ a $F_3(7) = -80$, a ze vzorců (12.53) pak $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_1 = 7$.

Je tedy optimální převést všechny bedny na vozidla *A* a ostatní vozidla pronajmout. Zisk po odečtení dopravních nákladů bude činit -80 Kčs, tj. na dopravu doplatíme 80 Kčs.

Kdybychom se stejnou úlohu pokoušeli řešit bez předpokladu celočíselnosti, např. při přepravě libovolně dělitelných materiálů, museli bychom použít aproximace obrácené, než jaká se v programování obvykle vyskytuje: spojitou veličinu bychom aproximovali diskrétní veličinou a z řešení bychom usuzovali na polohu optima.

Dosavadní příklady byly vlastně úlohy nelineárního programování, kde sekvenční (jiný výraz pro postupný) charakter rozhodování nebyl nijak patrný. Přesto však výpočet probíhal tak, jako bychom optimálně rozhodovali ve „strukturálně" stejných situacích. Všimneme-li si např. vzorce (12.55), vidíme, že jde o stejnou optimalizační úlohu, jako je úloha původní, jen máme k dispozici pouze dvě vozidla a beden je ξ. Obdobně pro $F_1(\xi)$.

12.9 PŘÍKLAD SEKVENČNÍHO ROZHODOVÁNÍ

Dynamické programování není v současném stadiu vývoje algoritmus či soubor algoritmů. Je to spíše způsob přístupu k řešení optimalizačních úloh, který umožňuje odvodit algoritmy pro jednotlivé úlohy. Ukážeme to na následujícím příkladě, který už má všechny znaky sekvenčního rozhodování.

Na dobu deseti let je naplánována následující potřeba nových odborníků z určitého oboru:

Tabulka 12.10

Rok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potřeba	10	20	30	15	15	15	15	10	8	8

Pro jednoduchost předpokládáme, že školení odborníků probíhá v jednoročních kursech. Náklady na jeden běh kursu nechť činí 32 000 Kčs, a to bez ohledu na to, kolik lidí se kursu zúčastní. Bylo by tedy výhodné vyškolit všechny potřebné odborníky najednou a postupně je nasazovat podle potřeby. Avšak vyškolením a nevyužitím odborníka vznikají mimo jiné i hospodářské ztráty, neboť jej musíme platit podle kvalifikace za práci, kterou může zastat pracovník méně kvalifikovaný. Nechť ztráta za roční nevyužití jednoho odborníka činí 1 500 Kčs. Je tedy otázka, v kterých letech pořádat kursy a kolik v nich školit lidí tak, aby celkové náklady na zajištění kvalifikovaných odborníků byly minimální. Předpokládejme, že kursy končí vždy koncem roku a že ve stejnou dobu se zařazují všichni odborníci plánovaní pro tento rok. Není přípustné, aby se odborníků nedostávalo a na začátku a na konci desetiletého období nemáme, nebo nechceme mít žádné nevyužité odborníky.

Označme postupně $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ počet lidí, které zařazujeme do kursů na začátku 1., 2., …, 10. roku. Jestliže $x_i = 0$, nebude ovšem kurs v roce i vůbec pořádán. $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ pak označme počet odborníků, kterých se během 1., 2., …, 10. roku nevyužije, a jsou k dispozici pro zařazení koncem tohoto či některého dalšího roku. Pak tedy $y_1 = 0$; zaveďme ještě $y_{11} = 0$ k vyjádření požadavku, že koncem desetiletého období nesmějí zůstat žádní odborníci, jichž by nebylo využito.

Intuitivně bychom mohli navrhnout tento postup řešení: V prvním roce musíme zahájit kurs aspoň s deseti lidmi, abychom kryli potřebu prvního roku. Bude-li to výhodné, vyškolíme v tomto kursu ještě 20 lidí pro zařazení v druhém roce, abychom zde ušetřili pořádání jednoho kursu, které stojí 32 000 Kčs; ztráta z ročního nevyužití 20 odborníků by byla 1 500 . 20 = 30 000. Jak vidíme, je výhodné pořádat kurs v prvním roce s 30 lidmi a v druhém roce jej vůbec nepořádat. Zřejmě není výhodné brát do kursu v prvním roce i dalších 30 lidí určených k zařazení až ve třetím roce, neboť ztráty jejich dvouletým nevyužitím (2 . 1 500 . 30) by značně převýšily náklady na nový kurs. Máme tedy

$$x_1 = 30, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 20, \quad y_3 = 0$$

Podobně bychom mohli hledat další neznámé.

Není však patrno, zda je tento postup skutečně optimální. Optimalizujeme zde totiž jenom „lokálně" pro několik prvních let, zatímco účelem je najít postup optimální z hlediska celého desetiletého období. Může se totiž stát, že nakonec bychom museli pořádat kurs třeba jen pro 8 osob, což se nezdá být efektivní. Aparát dynamického programování je právě vhodný k exaktnímu odvození optimalizačního algoritmu, popř. k prověření právě popsaného (a ovšem i algoritmů pro komplikovanější úlohy tohoto typu).

Účelovou funkci můžeme psát po zkrácení tisícem jako

$$g(x_1, \ldots, x_{10}, y_1, \ldots, y_{10}) = \sum_{i=1}^{10} (32 \operatorname{sgn} x_i + 1{,}5 y_{i+1})$$

a omezení jsou

$$y_{i+1} = y_i + x_i - p_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, 10, \tag{12.56}$$

kde p_i je potřeba odborníků v roce i. Chceme-li řešit úlohu pomocí dynamického programování, musíme najít parametr či parametry takové, abychom mohli pro posloupnost pomocných funkcí odvodit rekurentní vztahy, ze kterých je možno tyto funkce vypočítat. V předchozích příkladech byla parametrem pravé strany omezení. Zde zvolíme za parametr počet vyškolených a nezařazených pracovníků, $y_{n+1} = \xi$. Pomocné funkce potom definujeme jako

$$F_n(\xi) = \min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{i=1}^{n} (32 \operatorname{sgn} x_i + 1{,}5y_{i+1}) \tag{12.57}$$

pro $n = 1, 2, \ldots, 10$, kde minimum se bere přes ty hodnoty x, pro které platí

$$y_{i+1} = y_i + x_i - p_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n$$

a

$$y_{n+1} = \xi.$$

Rekurentní vztah pro pomocné funkce dostaneme takto:

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= \min_{x_n} [32 \operatorname{sgn} x_n + 1{,}5y_{n+1} + \min_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} (32 \operatorname{sgn} x_i + 1{,}5y_{i+1})] = \\ &= \min_{x_n} [32 \operatorname{sgn} x_n + 1{,}5\xi + F_{n-1}(\xi + p_n - x_n)] \end{aligned} \tag{12.58}$$

K argumentu u funkce F_{n-1} jsme dospěli takto: Funkce $F_{n-1}(\eta)$ je definována jako

$$F_{n-1}(\eta) = \min_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} (32 \operatorname{sgn} x_i + 1{,}5y_{i+1}),$$

kde $x_1, \ldots, x_{n-1}$ splňují podmínky

$$y_{i+1} = y_i + x_i - p_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

a

$$y_n = \eta.$$

Protože $y_{n+1} = \xi$, dostáváme

$$\xi = \eta + x_n - p_n$$

a odtud

$$\eta = \xi + p_n - x_n.$$

Použili jsme ovšem na chvíli různých symbolů pro argumenty pomocných funkcí. Hodnota účelové funkce je podle (12.57) $F_{10}(0)$ a

$$F_1(\xi) = \min_{x_1} [32 \operatorname{sgn} x_1 + 1{,}5\xi],$$

kde

$$\xi = x_1 - p_1, \qquad \xi = 0, 1, 2, \ldots, \sum_{i=2}^{10} p_i$$

Nyní již můžeme hledat řešení stejně jako v předchozím příkladě. Dostali jsme tedy algoritmus, který vede jistě k optimálnímu řešení, a naše úloha by tím mohla být vyřešena. Můžeme se však přesvědčit, že výpočet by byl zdlouhavý a obsahoval by řadu zbytečných výpočtů. Pokusíme se proto postup zjednodušit.

Nejdříve si všimněme, že pro ta i, pro která platí v optimálním řešení $\bar{x}_i > 0$, musí být $\bar{y}_i = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom snížit hodnotu účelové funkce, a to tak, že bychom předchozí kurs zmenšili o y_i lidí, a o stejný počet bychom zvětšili kurs, který má začít v roce i. Tak bychom ušetřili přinejmenším náklady na nevyužité odborníky v roce i-tém. Z toho vyplývá, že optimální $\bar{x}_i > 0$ musí být rovno nějakému částečnému součtu posloupnosti $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{10}$, neboť $\bar{x}_i$ musí v optimálním řešení krýt úplně potřebu na celistvý počet roků jdoucích po sobě, počínaje rokem i-tým.

Nyní dokážeme toto: Je-li optimální při plánování na n let ($n = 1, 2, \ldots, 10$) zahájit kurs v roce n-tém, je optimální zahájit kurs v roce n-tém bez ohledu, na kolik let dále ještě plánujeme. Tím bude dokázána správnost našeho původního intuitivního postupu, při kterém se optimalizace provádí po úsecích, v nichž už je optimálnost rozhodnutí zřejmá.

Ze vzorce (12.57) je patrno, že $F_n(\xi)$ je vlastně účelová funkce minimalizační úlohy stejné s úlohou původní, jenže plánujeme pouze na n let a nakonec nám má zbýt ξ vyškolených odborníků. Máme tedy dokázat, že je-li optimální v $F_n(0)$ mít $\bar{x}_n > 0$, je optimální mít $\bar{x}_n > 0$ i pro $F_n(\xi)$, kde $\xi > 0$, tj. pro případ, že z kursu v roce n budeme krýt také potřebu v roce $n + 1$, popř. i v dalších letech.

Podle (12.58)

$$F_n(0) = \min_{x_n} [32 \operatorname{sgn} x_n + F_{n-1}(p_n - x_n)] = \min_{x_n} [32 + F_{n-1}(0), F_{n-1}(p_n)],$$

kde první člen v závorce odpovídá $x_n = p_n$ a druhý $x_n = 0$.

Protože $y_{n+1} = 0$, nepřicházejí jiné hodnoty x v úvahu. Předpokládáme-li, že je v optimálním řešení pro n let $x_n > 0$, musí být

$$32 + F_{n-1}(0) \leqq F_{n-1}(p_n)$$

Dále zřejmě z $p_n < \eta$ vyplývá, že $F_{n-1}(p_n) < F_{n+1}(\eta)$, neboť v $F_{n-1}(\eta)$ musí být zahrnuto navíc placení $\eta - p_n$ nevyužitých odborníků v roce n-tém. Celkem tedy dostáváme

$$32 + F_{n-1}(0) \leqq F_{n-1}(p_n) < F_{n-1}(\eta), \tag{12.59}$$

kde poslední nerovnost platí pro $\eta > p_n$.

Nechť je nyní $\xi > 0$. Podle (9)

$$F_n(\xi) = 1{,}5\xi + \min_{x_n} [32 \operatorname{sgn} x_n + F_{n-1}(\xi + p_n - x_n)],$$

kde se minimalizuje přes x_n, pro něž

$$\xi = y_n + x_n - p_n \quad \text{neboli} \quad x_n = \xi + p_n - y_n$$

Protože y_n může nabývat hodnot

$$0, p_n, p_n + p_{n+1}, \ldots, \sum_{i=n}^{10} p_i,$$

může x_n nabývat hodnot

$$\xi + p_n, \xi, \xi - p_{n+1}, \ldots, \xi - \sum_{i=n+1}^{10} p_i$$

Tedy

$$F_n(\xi) = 1{,}5\xi + \min\,[32F_{n-1}(0), \min_s\,[32 + F_{n-1}(s)]],$$

kde s nabývá hodnot $p_n, p_n + p_{n+1}, \ldots, \sum_{i=n}^{10} p_i$,
tedy vesměs větších nebo rovných p_n. Je tedy podle (12.59) optimální vzít $x_n = \xi + p_n > 0$, což jsme chtěli dokázat.

Náš postup, popsaný na začátku tohoto odstavce, je skutečně optimální a snadno najdeme toto řešení:

Tabulka 12.11

Rok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Počet osob v kursu	30	0	45	0	30	0	33	0	0	8	—
Počet nevyužitých odborníků	0	20	0	15	0	15	0	18	8	0	0

Celkové náklady na zajištění odborníků budou 286 000 Kčs.

12.10 OBTÍŽE PŘI DYNAMICKÉM PROGRAMOVÁNÍ

V předchozím odstavci jsme uvedli jednoduchý příklad sekvenčního rozhodování. Jak už jsme řekli, úlohy tohoto typu jsou dobře řešitelné metodou dynamického programování. Je tomu tak proto, že např. v naší úloze s deseti omezeními (nepočítáme-li omezení nezápornosti – viz vzorce (12.56)) můžeme v pomocných funkcích vystačit s jedním parametrem stejně jako v úlohách odstavce 1, které měly jen jedno omezení. Většinou se nám u těchto sekvenčních úloh nepodaří najít tak pronikavé zjednodušení algoritmu jako v našem příkladě, ale i tak jsou úlohy s jedním parametrem efektivně řešitelné. U optimalizačních úloh obecného typu musíme zavést zpravidla tolik parametrů v pomocných funkcích, kolik je omezení, a s počtem parametrů objem výpočetních prací rychle narůstá. Ukážeme to na příkladě:

Pomocí dynamického programování chceme řešit tuto úlohu celočíselného lineárního programování:

Maximalizovat $4x_1 + 2x_2 + x_3$
při omezeních

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqq 10 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &\leqq 22 \end{aligned} \tag{12.60}$$

(x_1, x_2, x_3 celočíselná, nezáporná).

Označíme

$$F_3(10, 12) = \max_{x_1, x_2, x_3} 4x_1 + 2x_2 + x_3,$$

kde pro x_1, x_2, x_3 platí omezení (12.60). Dále platí

$$F_3(10, 12) = \max_{x_3}\,[x_3 + \max_{x_1, x_2}(4x_1 + 2x_2)], \tag{12.61}$$

kde x_3 probíhá hodnoty 0, 1, ..., $\min\left[10, \left[\frac{22}{5}\right]\right]$, tj. 0, 1, 2, 3, 4. Číslo $\frac{22}{5}$ v hranatých závorkách značí hodnotu funkce „celá část x“ v bodě $\frac{22}{5}$:

$$\left[\frac{22}{5}\right] = [4{,}4] = 4$$

(Celá část x – označení $[x]$ – je funkce, která číslu x přiřazuje největší celé číslo menší nebo rovné x. Kdy hranaté závorky značí tuto funkci a kdy vymezení extrému bude vždy zřejmé z kontextu.) x_1 a x_2 při druhé maximalizaci ve (12.61) splňují omezení

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqq 10 - x_3 \\ 4x_1 + x_2 &\leqq 22 - 5x_3 \end{aligned}$$

Definujeme-li

$$F_2(\xi, \eta) = \max_{x_1, x_2} 4x_1 + 2x_2$$

při x_1, x_2 omezených vztahy

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqq \xi, \\ 4x_1 + x_2 &\leqq \eta, \end{aligned}$$

pak konečně

$$F_3(10, 12) = \max\,[x_3 + F_3(10 - x_3, 22 - 5x_3)]$$

Z (12.62) vidíme, že ξ může nabývat hodnot 6, 7, 8, 9, 10 a η hodnot 2, 7, 12, 17, 22. Nyní můžeme opět psát

$$F_2(\xi, \eta) = \max_{x_2} [2x_2 + \min_{x_1} 4x_1],$$

kde x_2 nabývá hodnot 0, 1, …, $\min\left[\left[\frac{\xi}{2}\right], \eta\right]$; pro x_1 platí

$$2x_1 \leqq \xi - 3x_2 \equiv \varphi$$

$$4x_1 \leqq \eta - x_2 \equiv \psi$$

φ a ψ jsou parametry ve funkci

$$F_1(\varphi, \psi) = \max_{x_1} 4x_1$$

Podle (12.63) může x_1 nabývat hodnot 0, 1, …, $\min\left[\left[\frac{\xi}{2}\right], \left[\frac{\Psi}{4}\right]\right]$. Potíž je v tom, že nyní nemůžeme jednoduše vypočítat, které hodnoty mohou probíhat φ a ψ, neboť to závisí na parametrech ξ a η. Musíme tedy tabelovat funkci $F_1(\varphi, \psi)$ pro všechna φ a ψ, která by mohla přijít v úvahu, tj.

$$\varphi = 0, 1, \ldots, 10; \qquad \psi = 0, 1, \ldots, 22$$

To by však byla tabulka o dvojím vstupu s $11 \times 23 = 253$ hodnotami. Potom bychom museli ještě počítat tabulku $F_2(\xi, \eta)$ pro každou možnou dvojici ξ, η, tedy tabulku s $5 \times 5 = 25$ hodnotami. Vidíme, že objem výpočetních prací velmi vzrostl ve srovnání s úlohami o jednom parametru. Pro úlohy o třech a více parametrech je pak výpočet bez výkonných počítačů nezvládnutelný.

Podrobnější informace o dynamickém programování a jeho aplikacích může čtenář získat zejména v knihách Richarda Bellmana, [11], [12], [13]. Většina prací z dynamického programování byla však dosud publikována jako články v časopisech.

KAPITOLA 13 STOCHASTICKÉ LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

13.1 PŘÍKLADY A PŘEDBĚŽNÉ ÚVAHY

V předchozích kapitolách učebnice (s výjimkou kap. 12) jsme pojednávali o lineárním programování. Šlo o modely, v nichž se předpokládalo, že účelová funkce je lineární funkcí neznámých veličin a že také omezení jsou dána soustavou lineárních nerovností nebo rovnic. Kromě toho jsme všechny koeficienty považovali za známé konstanty. Takový model odpovídá v jednotlivých případech více či méně skutečnosti.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy koeficienty (nebo některé z koeficientů), vystupující v obvyklé formulaci úlohy lineárního programování, nejsou konstanty, ale náhodné veličiny. O této skutečnosti bychom se přesvědčili při detailním studiu většiny úloh lineárního programování. Uvedeme nejprve dva příklady, v nichž je na první pohled zřejmá náhodná povaha některých koeficientů. Další příklady jsme uvedli v kap. 12 (př. 12.4 a 12.5).

Příklad 13.1. Přidělovací problém

Předpokládejme, že máme přidělit n pracovníků na n pracovišť tak, aby celkové množství výrobků (měřené např. v peněžních jednotkách), které tito pracovníci vyrobí za směnu, bylo maximální. Označíme-li c_{ij} množství výrobků, které vyrobí i-tý pracovník na j-tém pracovišti za směnu, nemůžeme pokládat c_{ij} za konstanty. Výkon pracovníka se den ode dne může náhodně měnit v závislosti na okamžité kondici pracovníka, seřízení stroje, jakosti zpracovaného materiálu apod.

V obvyklé účelové funkci pro přidělovací problém $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ jsou tedy koeficienty náhodné a pro dané přiřazení pracovníků (pro danou matici $\mathbf{X} = [x_{ij}]$) je i hodnota účelové funkce náhodná veličina. Aby přiřazení pracovníků nezáviselo bezprostředně na náhodných vlivech, volíme jako kritérium pro toto přiřazení např. maximalizaci středního množství výrobků vyrobených za směnu. (Musíme ovšem znát rozdělení náhodných veličin c_{ij} nebo aspoň některé charakteristiky tohoto rozdělení, resp. jejich odhady.)

Příklad 13.2. Nutriční problém

Jak je známo, jde v nutričním problému o úlohu namíchat z daných surovin krmnou směs tak, aby obsahovala všechny biologicky účinné látky v potřebném množství a aby byla co nejlevnější. Předpokládejme, že je k dispozici n surovin a že je nutno sledovat obsah m účinných složek potravy. Označme a_{ij} počet jednotek i-té účinné složky v jednotkovém množství j-té suroviny, b_i minimální potřebné množství i-té účinné látky v denní dávce potravy, x_j množství j-té suroviny v denní dávce potravy a c_j cenu jednotkového množství j-té suroviny.
Odpovídající úloha lineárního programování zní:
Na množině řešení soustavy nerovností

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{13.1}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

najít taková $x_1, \ldots, x_n$, aby účelová funkce $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ byla minimální.

Minimální potřebné množství účinných látek nezbytných pro udržení dobré zdravotní kondice vyživovaného jedince se však náhodně mění v závislosti na vyživovaném jedinci samém, na jeho zdravotním stavu, ročním období apod. Jsou tedy pravé strany b_i, $i = 1, \ldots, m$, náhodné veličiny. Pokud v tomto případě připustíme, že je možno nedodržet předepsaná množství b_i, můžeme tím způsobit onemocnění nebo i smrt vyživovaného jedince. V případě, že jde o zvíře, lze ohodnotit ztrátu způsobenou nedodržením požadavků a zachytit ji v účelové funkci. Kdyby však šlo o život člověka, byla by ztráta způsobená jeho úmrtím nekonečně velká a museli bychom pokládat za přípustné jen to nezáporné řešení soustavy nerovností (13.1) s náhodnou pravou stranou, které splňuje uvažované nerovnosti pro všechny možné realizace náhodných veličin $b_1, \ldots, b_n$. Pojem přípustného řešení je tedy nutno definovat s ohledem na ekonomickou interpretaci úlohy.

Navíc se v nutričním problému může stát, že koeficienty a_{ij} jsou náhodné. (Např. obsah bílkovin v 1 q sušeného sena závisí na způsobu sklizení, uskladnění, na počasí, jakosti půdy a druhu osiva.)

Z uvedených příkladů jsou již patrny zvláštnosti a potíže, s nimiž se setkáme při formulování úlohy stochastického lineárního programování.

Na rozdíl od lineárního programování, kde je množina přípustných řešení přesně vymezena, stojíme především před otázkou, které vektory pokládat za přípustná řešení. Setkali jsme se s případem, kdy musí přípustné řešení splňovat omezení pro všechny možné realizace náhodných koeficientů; naproti tomu u většiny případů lze připustit, že řešení nesplňuje omezení pro všechny realizace náhodných veličin a výskyt této eventuality buď penalizujeme, nebo připouštíme jen s malou pravděpodobností.

Viděli jsme dále, že náhodná povaha koeficientů se obráží též v účelové funkci, která byla v lineárním programování kritériem pro naše rozhodování. Nyní však musíme zvolit takové kritérium, které má obecnou platnost a nezávisí na konkrétní realizaci náhodných veličin. Toto kritérium budeme někdy nazývat preferenčním funkcionálem. Podle jednoho z možných kritérií budeme za optimální pokládat to přípustné řešení, které maximalizuje střední hodnotu účelové funkce.

13.2 DISTRIBUČNÍ A ROZHODOVACÍ PŘÍSTUP K ŘEŠENÍ ÚLOHY STOCHASTICKÉHO LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Mějme úlohu lineárního programování:
Nalézt n-rozměrný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje nerovnosti

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

a maximalizuje funkci $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Stochastické lineární programování odpovídá situaci, kdy prvky matice $\mathbf{A}$ a vektorů $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (nebo aspoň některé z nich) jsou náhodné veličiny se známým rozdělením pravděpodobnosti. Nechť tedy a_{ij}, b_i, c_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou náhodné veličiny. Označme S množinu všech možných realizací těchto náhodných veličin, jejich distribuční funkci označme $F(a_{ij}, b_i, c_j;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, stručný zápis $F(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Předpokládejme, že jsme pro jistou realizaci $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \in S$ vyřešili úlohu lineárního programování (13.2), obdrželi optimální řešení $\mathbf{x}^*$, a tím dosáhli maxima účelové funkce $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$. Hodnoty $\mathbf{z}^*$ i $\mathbf{x}^*$ jsou různé pro různé realizace $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \in S$, a jsou tedy náhodnými veličinami. Na základě známé distribuční funkce $F(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ je možno (aspoň teoreticky) odvodit distribuční funkci náhodné veličiny z^* nebo distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbf{x}^*$ nebo distribuční funkci $Q(z, \mathbf{x})$ účelové funkce z pro dané $\mathbf{x}$. Při odvozování rozdělení bychom však narazili na značné, mnohdy nepřekonatelné technické potíže.

Uvedený přístup k úloze stochastického lineárního programování, kdy se pro každou pozorovanou realizaci náhodných veličin řeší úloha nestochastická, a navíc se jen studují vlastnosti optimálního řešení $\mathbf{x}^*$ nebo maxima účelové funkce z^* jakožto náhodných veličin, nazývají někteří autoři pasívním přístupem; v matematické statistice se takové úlohy nazývají distribuční.

Těmito úlohami se však nebudeme dále zabývat. Budeme hledat nezáporné řešení úlohy stochastického programování, které je optimální – z jistého hlediska – vůči všem možným realizacím $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \in S$ jako celku. Jde o pojetí stochastického programování jakožto úlohy statistického rozhodování (nebo statistických her). Toto pojetí odpovídá situaci, kdy rozhodnutí $\mathbf{x}$ musíme učinit dříve, než se náhodné veličiny $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ realizují, tedy jenom na základě znalosti distribuční funkce $F(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Budeme rozlišovat tři případy, podle toho, jaký nezáporný vektor $\mathbf{x}$ pokládáme za přípustné řešení.

13.3 PERMANENTNĚ PŘÍPUSTNÁ ŘEŠENÍ

V některých případech bylo třeba požadovat vzhledem k interpretaci úlohy, aby zvolené rozhodnutí $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ splňovalo nerovnosti $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ současně pro všechny realizace $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \in S$. Množinu M nezáporných vektorů $\mathbf{x}$ požadované vlastnosti nazýváme množinou permanentně přípustných řešení. Její definici právě popsaným způsobem zapíšeme zkráceně takto:

$$M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b} \text{ pro všechna } [\mathbf{A}, \mathbf{b}] \in S\}$$

V podobných případech jde tedy o řešení následující úlohy stochastického lineárního programování:

Vyhledat vektor $\mathbf{x} \in M$, pro který nabývá preferenční funkcionál

$$h[Q(z, \mathbf{x})]$$

maximální hodnoty.

Na preferenční funkcionál můžeme nahlížet jako na kritérium, podle kterého rozhodujeme o optimálnosti řešení. Jak již víme, nevystačíme jen s účelovou funkcí z, jejíž hodnota se mění v závislosti na realizaci náhodných veličin $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, a jež tedy není obecně platným kritériem optimálnosti. Nestačí však ani znalost distribučních funkcí $Q(z, \mathbf{x})$ účelové funkce z pro všechna $\mathbf{x} \in M$. Distribuční funkce v sobě zahrnuje úplnou informaci o náhodné veličině $z(\mathbf{x})$. Zde však máme celý systém distribučních funkcí $\{Q(z, \mathbf{x})\}$, odpovídajících různým rozhodnutím $\mathbf{x}$. Z tohoto systému bychom měli zvolit distribuční funkci nejlepších vlastností, čímž bychom zároveň zvolili optimální vektor $\mathbf{x}$. Tuto úlohu se nám nepodaří rozřešit, nerozhodneme-li se, podle kterého kritéria distribuční funkce uspořádáme, resp. podle kterého kritéria vybereme nejlepší distribuční funkci z daného systému. (Kritérií může být řada, podle toho, na kterou z vlastností distribuční funkce klademe největší důraz při výběru nejlepší distribuční funkce.) Preferenční funkcionál $h[Q(z, \mathbf{x})]$ udává uspořádání distribučních funkcí a maximální hodnota tohoto funkcionálu je právě kritériem optimálnosti jak distribuční funkce, tak i odpovídajícího rozhodnutí $\mathbf{x}$.

V případě, kdy je náhodný pouze vektor $\mathbf{c}$, kdežto prvky matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{b}$ jsou známé konstanty, je množina M přímo množinou přípustných řešení soustavy nerovností $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ pro úlohu lineárního programování. Ukážeme si pro tento případ dva příklady volby preferenčního funkcionálu.

1. Chceme maximalizovat to číslo, pod něž s pravděpodobností $1 - \alpha$ neklesne hodnota účelové funkce (např. zisk, kterého se dosáhne s pravděpodobností 0,95). Úloha tedy zní:

Na množině nezáporných řešení soustavy $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ maximalizovat hodnotu k, pro niž při pevně zvoleném $0 < \alpha < 1$ je

$$P\{z(\mathbf{x}) \geqq k\} = 1 - \alpha$$

Předpokládejme, že $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, kde složky c_j $(j = 1, \ldots, n)$ vektoru $\mathbf{c}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením se známým průměrem μ_j a směrodatnou odchylkou σ_j. (Stručně $N(\mu_j, \sigma_j)$.) $z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ je pro pevné $\mathbf{x}$ součtem nezávislých normálních náhodných veličin, má tedy také normální rozdělení $N(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$, kde

$$\bar{\mu} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j, \qquad \bar{\sigma} = \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2\right]}$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$P\{z(\mathbf{x}) \geqq k\} = P\left\{\frac{z(\mathbf{x}) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}} \geqq \frac{k - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}\right\} = 1 - \alpha$$

Náhodná veličina $\dfrac{z(\mathbf{x}) - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}$ má normální rozdělení $N(0, 1)$ a hodnota $\dfrac{k - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}$ je tedy rovna α – kvantilu u_α rozdělení $N(0, 1)$, tj. platí

$$k(\mathbf{x}) = \bar{\mu} + \mu_\alpha \bar{\sigma}$$

Řešení úlohy stochastického programování jsme převedli na řešení úlohy nelineárního programování (viz kap. 12):

Na množině nezáporných řešení soustavy lineárních nerovností $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ maximalizovat funkci

$$k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + u_\alpha \sqrt{\left[\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2\right]}$$

Pro $\alpha \leqq 0{,}5$ je $u_\alpha \leqq 0$ a funkce $k(\mathbf{x})$ je konkávní.

2. Jako preferenční funkcionál volíme střední hodnotu účelové funkce $Ez(\mathbf{x}) = (E\mathbf{c})^T\mathbf{x}$. $(E\mathbf{c})$ je vektor středních hodnot náhodných veličin c_j; předpokládáme, že tyto střední hodnoty jsou konečné. Úloha stochastická se v tomto případě redukuje na úlohu lineárního programování maximalizovat lineární účelovou funkci $(E\mathbf{c})^T\mathbf{x}$ na množině nezáporných řešení soustavy lineárních nerovností $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$. Příkladem tohoto typu byl přidělovací problém s náhodnou maticí výkonů.

Množinu M permanentně přípustných řešení nelze obvykle jednoduše popsat, často nelze ani zjistit, zda je neprázdná. Uvedeme dva případy, kdy lze množinu M

přehledně popsat a řešení úlohy stochastické převést na řešení úlohy lineárního programování.

3. Situace je jednoduchá (aspoň teoreticky), existuje-li jen konečně mnoho různých realizací náhodných veličin **A**, **b**. Těmto realizacím můžeme přiřadit indexy $r = 1, 2, \ldots, R$ a pak má množina M tvar $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{A}_r\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_r, r = 1, \ldots, R\}$ Řešením stochastické úlohy je takový nezáporný vektor **x**, který maximalizuje $(\mathbf{EC})^T\mathbf{x}$ na množině řešení soustavy mR lineárních nerovností

$$\mathbf{A}_r\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_r,\ r = 1, \ldots, R$$

To je opět úloha lineárního programování, která má však zpravidla velký počet omezení.

4. Předpokládejme, že náhodný je pouze vektor **b** pravých stran. Nechť $\bar{\mathbf{b}}$ je pesimistická hodnota vektoru **b**, i-tá složka vektoru $\bar{\mathbf{b}}$ je infimem i-tých složek všech vektorů $\mathbf{b} \in S$. Je-li **x** prvkem množiny M, tj. $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ splňuje $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ pro všechny realizace $\mathbf{b} \in S$, a je-li také vektor $\bar{\mathbf{b}} \in S$, je také **x** prvkem množiny $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{Ax} \leqq \bar{\mathbf{b}}\}$.

Z definice vektoru **b** vyplývá, že

$$M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Ax} \leqq \bar{\mathbf{b}}\}$$

Umíme-li tedy najít vektor $\bar{\mathbf{b}}$, lze řešit stochastickou úlohu jako úlohu lineárního programování s účelovou funkcí $(E\mathbf{c}^T\mathbf{x})$, jejíž maximum hledáme na množině nezáporných řešení soustavy nerovností $\mathbf{Ax} \leqq \bar{\mathbf{b}}$.

13.4 ŘEŠENÍ, KTERÁ SPLŇUJÍ NĚKTERÉ PODMÍNKY JEN PŘIBLIŽNĚ

Požadavek najít takové řešení $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, které bude vyhovovat soustavě nerovností $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ nezávisle na tom, jak se budou realizovat náhodné veličiny $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \in S$, je v některých úlohách zbytečně přísný nebo zcela nereálný. Zejména v úlohách, kde již v původní formulaci (bez přídatných proměnných) nevystupuje soustava nerovností, nýbrž soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jako např. v obvyklé formulaci dopravního problému, nelze žádnou volbou vektoru **x** vyhovět této soustavě současně pro všechny možné realizace $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \in S$.

Připusťme tedy, že hledané řešení **x** nesplňuje přesně rovnici $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pro všechny realizace náhodných veličin **A**, **b**; jestliže $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{b}$, nastane jistá ztráta f, kterou je nutno zachytit v účelové funkci.

Položíme tedy $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - f$.

Rozlišujme speciálně v rovnicích soustavy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m$$

neshodu dvojího druhu, podle toho, zda je pravá strana větší než levá, nebo naopak. Neshodu 1. druhu označme

$$y_i^+ = \begin{cases} b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, & \text{je-li tento výraz} \geqq 0 \\ 0, & \text{je-li } b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < 0 \end{cases}$$

Neshodu 2. druhu označme

$$y_i^- = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i, & \text{je-li tento výraz} \geqq 0 \\ 0, & \text{je-li } \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i < 0 \end{cases}$$

(Veličiny y_i^+, y_i^- se zavádějí jen pro ty rovnice soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, v nichž se vyskytují náhodné koeficienty; rovnice s konstantními koeficienty musí **x** splňovat přesně.)

Neshodě 1. druhu nechť odpovídá ztráta $\sum\limits_{i=1}^{m} d_i^1 y_i^+$, neshodě 2. druhu ztráta $\sum\limits_{i=1}^{m} d_i^2 y_i^-$. Zapišme vektorově tvar účelové funkce, v níž je zachycena ztráta vzniklá tím, že zvolené rozhodnutí $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ nesplňuje přesně soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{d}^{1T}\mathbf{y}^+ - \mathbf{d}^{2T}\mathbf{y}^-$$

Budeme maximalizovat střední hodnotu funkce $z(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$.

$Ez(\mathbf{x}) = E\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{d}^{1T}\mathbf{y}^+ - \mathbf{d}^{2T}\mathbf{y}^-\}$ je nelineární funkcí **x** a pro $\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2 \geqq \mathbf{0}$ je to funkce konkávní. Její maximum pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ lze tedy vyhledat metodami nelineárního programování.

Vektory $\mathbf{d}^1$ a $\mathbf{d}^2$ mohou obsahovat nulové složky, což odpovídá situaci, kdy neshoda 1. nebo 2. druhu není vůbec penalizována, nebo mohou obsahovat nekonečně velké složky a pak je odpovídající neshoda penalizována natolik, že prakticky nemůže nastat.

Příklad 13.3. Dopravní problém s náhodnou poptávkou

Předpokládejme, že v dopravním problému je poptávka b_j j-tého spotřebitele náhodná veličina, $j = 1, \ldots, n$, a že je dána distribuční funkce sdruženého rozdělení pravděpodobnosti $F[b_1, \ldots, b_n]$ definovaná v nezáporném oboru S, s konečnými středními hodnotami $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Marginální distribuční funkci označme $F_j(b_j)$.

Výrobní kapacity a_i, $i = 1, \ldots, m$, a dopravní náklady c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, jsou dané konstanty.

Neshoda 1. druhu

$$y_j^+ = \begin{cases} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \text{ pro } b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \geqq 0 \\ 0 \text{ jinde} \end{cases}$$

značí, oč byla dodávka nižší než poptávka j-tého spotřebitele, koeficient d_j^1 ve ztrátové funkci značí penále za nedodání jednotkového množství.

Neshoda 2. druhu

$$y_{j'}^- = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij'} - b_{j'} \text{ pro } \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij'} - b_{j'} \geqq 0 \\ 0 \text{ jinde} \end{cases}$$

značí množství zboží, které bylo dodáno navíc vzhledem k poptávce spotřebitele, koeficient $d_{j'}^2$ značí náklady, které vzniknou, neodebere-li j'-tý spotřebitel jednotkové množství zaslaného zboží (např. náklady na přesun k jinému spotřebiteli, skladování či znehodnocení zboží).

Předpokládáme, že $d_j^1 \geqq 0$, $d_j^2 \geqq 0$ pro $j = 1, \dots, n$. Minimalizujeme střední hodnotu

$$Ez(\mathbf{x}) = E\{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (y_j^+ d_j^1 + y_j^- d_j^2)\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \int_S \sum_{j=1}^{n} (y_j^+ d_j^1 + y_j^- d_j^2) \, dF[b_1, \dots, b_n] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \int_0^\infty (y_j^+ d_j^1 + y_j^- d_j^2) \, dF_j(b_j)\}$$

Upravujeme postupně integrál $I = \int_0^\infty (y_j^+ d_j^1 + y_j^- d_j^2) \, dF_j(b_j)$.

Rozdělíme-li integrační obor a dosadíme-li za y_j^+, y_j^- podle definice, obdržíme

$$I = \int_0^{\sum_i x_{ij}} d_j^2 (\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j) \, dF_j(b_j) + \int_{\sum_i x_{ij}}^\infty d_j^1 (b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}) \, dF_j(b_j) =$$

$$= \int_0^\infty b_j d_j^1 \, dF_j(b_j) - \int_0^\infty d_j^1 \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \, dF_j(b_j) - (d_j^2 + d_j^1) \int_0^{\sum_i x_{ij}} b_j \, dF_j(b_j) +$$

$$+ \int_0^{\sum_i x_{ij}} \{d_j^1 \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + d_j^2 \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\} \, dF_j(b_j) =$$

$$= d_j^1 \beta_j - d_j^1 \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - (d_j^2 + d_j^1) \int_0^{\sum_i x_{ij}} b_j \, dF_j(b_j) +$$

$$+ (d_j^1 + d_j^2) \sum_{i=1}^{m} x_{ij} F_j(\sum_{i=1}^{m} x_{ij})$$

Integrací per partes obdržíme

$$I = d_j^1 \beta_j - d_j^1 \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - (d_j^1 + d_j^2) \sum_{i=1}^{m} x_{ij} F_j(\Sigma x_{ij}) +$$

$$+ (d_j^2 + d_j^1) \int_0^{\sum_i x_{ij}} F_j(b_j) \, db_j - (d_j^1 + d_j^2) \sum_{i=1}^{m} x_{ij} F_j(\Sigma x_{ij})$$

Máme tedy minimalizovat střední hodnotu

$$Ez(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} - d_j^1) \, x_{ij} + d_j^1 \beta_j + (d_j^1 + d_j^2) \int_0^{\sum_i x_{ij}} f_j(b_j) \, db_j$$

Na množině nezáporných řešení soustavy

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i, \; i = 1, \dots, m$$

$Ez(\mathbf{x})$ je konvexní funkce a úlohu lze řešit metodami nelineárního programování (viz kap. 12).

13.5 ŘEŠENÍ, KTERÁ SPLŇUJÍ PODMÍNKY S PŘEDEPSANOU PRAVDĚPODOBNOSTÍ

Na závěr ještě uvedeme třetí možný způsob definice přípustného řešení úlohy stochastického programování. Budeme za přípustná řešení pokládat takové nezáporné vektory $\mathbf{x}$, které splňují daná omezení se zvolenou (velkou) pravděpodobností. Budeme tedy řešit následující úlohu:

Najít takovou množinu X nezáporných vektorů $\mathbf{x}$ s konstantními souřadnicemi, které splňují podmínky

$$P\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i\} \geqq 1 - \alpha_i, \; i = 1, \dots, m$$

(α_i jsou daná čísla, $0 < \alpha_i < 1$ pro $i = 1, \dots, m$, a_{ij}, b_i jsou náhodné veličiny). Na množině X najít ten vektor $\mathbf{x}$, který maximalizuje preferenční funkcionál $h[Q(z, \mathbf{x})]$.

Ukážeme si pouze jeden z možných postupů řešení úlohy pro případ, kdy je náhodný pouze vektor $\mathbf{b}$.

Předpokládejme, že b_i jsou náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti $N(\beta_i, \sigma_i)$ se známými parametry.

Potom lze psát

$$P\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i\} = P\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i} \leqq \frac{b_i - \beta_i}{\sigma_i}\right\} \geqq 1 - \alpha_i$$

$\dfrac{b_i - \beta_i}{\sigma_i} = S_i$ je náhodná veličina s rozdělením $N(0, 1)$,
tedy

$$P\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i} \leqq S_i\right\} = 1 - P\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i} > S_i\right\} =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i}\right) \geqq 1 - \alpha_i,$$

a tedy

$$\Phi\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i}\right) \leqq \alpha_i,$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$.

Označíme-li α_i-kvantil normálního rozdělení jako u_{α_i}, dostaneme

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \beta_i}{\sigma_i} \leqq u_{\alpha_i},$$

Množinu X tedy tvoří vektory $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, které splňují soustavu lineárních nerovností:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq \beta_i + u_{\alpha_i}\sigma_i, \; i = 1, \ldots, m$$

Jako preferenční funkcionál lze volit např. funkcionál $k(\mathbf{x})$, definovaný vztahem $P\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geqq k\} = 1 - \varepsilon$. Tímto funkcionálem jsme se již zabývali v odst. 13.3.

13.6 POTŘEBNÉ POJMY Z POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI A MATEMATICKÉ STATISTIKY

Pokusy, jejichž výsledek se od jednoho provedení pokusu k druhému mění, nazýváme náhodnými pokusy. Výsledek náhodného pokusu nelze s jistotou předpovědět; je dán jednak podmínkami pokusu, jednak náhodnými vlivy: Množina S všech možných výsledků (realizací) pokusu je však předem popsána.

Veličinu, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu, nazýváme náhodnou veličinou.

Jestliže je známo, jakých hodnot může náhodná veličina nabývat a s jakými pravděpodobnostmi, je znám její zákon rozdělení.

Diskrétní náhodné veličiny nabývají jen konečně nebo spočetně mnoha různých hodnot, např. hodnot $a_1, a_2, \ldots$. Jejich rozdělení se nazývá rovněž diskrétní a je plně popsáno pravděpodobnostmi

$$P(x = a_k) = p_k, \; k = 1, 2, \ldots.$$

(Platí vztahy: $p_k \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.)

Rozdělení spojité náhodné veličiny je popsáno hustotou pravděpodobnosti $f(x) \geqq 0$. Integrací funkce $f(x)$ obdržíme pravděpodobnost, že náhodná veličina padne do intervalu $\langle a, b\rangle$, tj.:

$$P\{a \leqq x \leqq b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Distribuční funkce $F(b)$ náhodné veličiny x udává pro každé b pravděpodobnost vztahu $x \leqq b$. Pro diskrétní rozdělení

$$F(b) = \sum_{a_k \leqq b} p_k,$$

pro spojité rozdělení

$$F(b) = \int_{-(-\infty)}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(hustota je tedy derivací distribuční funkce pro spojité rozdělení). Někdy chceme zdůraznit, že jde o distribuční funkci náhodné veličiny x. Pak můžeme použít zápisu $F(x)$.

Existují i náhodné veličiny, které nejsou ani diskrétní, ani spojité. Rozdělení každé náhodné veličiny je však jednoznačně určeno distribuční funkcí.

Studujeme-li současně n náhodných veličin $x_1, \ldots, x_n$, nazýváme n-tici $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ n-rozměrnou náhodnou veličinou nebo n-rozměrným náhodným vektorem. Rozdělení náhodného vektoru je dáno distribuční funkcí n proměnných, která udává pravděpodobnost

$$P\{x_1 \leqq b_1, x_2 \leqq b_2, \ldots, x_n \leqq b_n\} = F(b_1, \ldots, b_n)$$

pro všechny n-tice $[b_1, \ldots, b_n]$. Distribuční funkcí náhodného vektoru jsou též určeny marginální distribuční funkce jeho jednotlivých souřadnic. Marginální distribuční funkce j-té souřadnice x_j

$$F_j(b_j) = \lim_{b_i \to \infty} F(b_1, \ldots, b_n), \; i \neq j$$

$$i = 1, \ldots, n, \; i \neq j$$

Je-li distribuční funkce náhodného vektoru $[x_1, \ldots, x_n]$ rovna součinu (marginálních) distribučních funkcí jeho souřadnic

$$F(b_1, \ldots, b_n) = F_1(b_1) \,.\, F_2(b_2) \,.\, \ldots \,.\, F_n(b_n)$$

pro všechna $[b_1, \ldots, b_n]$, jsou náhodné veličiny $x_1, \ldots, x_n$ nezávislé. V tomto případě je sdružené rozdělení pravděpodobnosti jednoznačně určeno marginálními rozděleními, což obecně neplatí.

Zákon rozdělení podává úplnou informaci o náhodné veličině. Často však bývá přehlednější popsat rozdělení pravděpodobnosti jen několika číselnými charakteristikami. Nejdůležitějšími a nejužívanějšími charakteristikami jsou střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny.

Střední hodnota Ex diskrétní náhodné veličiny x je definována vztahem

$$\mu = Ex = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P\{x = a_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k;$$

střední hodnota spojité náhodné veličiny x s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je dána výrazem

$$\mu = Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x$$

Pro všechny typy náhodných veličin lze střední hodnotu popsat společně pomocí tzv. Stieltjesova integrálu

$$\mu = Ex = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}\, F(x)$$

($F(x)$ je distribuční funkce).

Je-li x náhodná veličina, Ex její střední hodnota, je také $(x - Ex)^2$ náhodná veličina a střední hodnotu $E(x - Ex)^2$ nazýváme rozptylem Dx náhodné veličiny x. Tedy pro rozptyl diskrétní náhodné veličiny x platí

$$Dx = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \mu)^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 p_k - \mu^2$$

a pro rozptyl spojité náhodné veličiny

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x - \mu^2$$

Pro označení rozptylu se užívá též σ^2. Odmocnina z rozptylu $\sqrt{Dx} = \sigma$ se nazývá směrodatnou odchylkou náhodné veličiny x.

Zhruba lze říci, že střední hodnota je mírou polohy náhodné veličiny a rozptyl mírou variability náhodné veličiny. Takových měr polohy i variability je ovšem více. Pro střední hodnotu součtu náhodných veličin platí

$$E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = Ex_1 + Ex_2 + \ldots + Ex_n;$$

je tedy střední hodnota součtu rovna součtu středních hodnot. Dále platí, že $E(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i E x_i$, kde c_i jsou reálná čísla. Pro rozptyl platí obdobný vztah, ale pouze pro nezávislé náhodné veličiny. Tedy rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin je roven součtu rozptylů.

Hodnota, kterou náhodná veličina x nepřekročí s pravděpodobností α, se nazývá α-kvantil a značí se u_α nebo x_α, α-kvantil je tedy určen vztahem $P\{x \leqq x_\alpha\} = \alpha$.

Základní význam v teorii pravděpodobnosti i v jejích aplikacích má tzv. normální rozdělení. Normované normální rozdělení má střední hodnotu 0 a rozptyl 1.

Jeho hustota $\varphi(x)$ a distribuční funkce $\Phi(x)$ jsou určeny vztahy

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Obecné normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$ má střední hodnotu μ, rozptyl σ^2, hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a distribuční funkci $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$.

Jsou tabelovány hodnoty $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ a kvantily normovaného normálního rozdělení. Je proto důležité znát převodní vztah mezi obecným a normálním rozdělením. Platí tato tvrzení:

1. Lineární funkce $ax + b$ náhodné veličiny x s rozdělením $N(\mu, \sigma)$ má normální rozdělení $N(a\mu + b, a\sigma)$.

2. Normovaná náhodná veličina

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

[x má rozdělení $N(\mu, \sigma)$], má normované normální rozdělení $N(0, 1)$.

3. Nechť jsou náhodné veličiny $x_1, \ldots, x_n$ nezávislé a nechť má náhodná veličina x_1 normální rozdělení $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Nechť jsou $a_1, \ldots, a_n$ konečná

reálná čísla, která nejsou všechna rovna nule; pak má náhodná veličina $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ normální rozdělení

$$N(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sqrt{[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2]})$$

Použitím substituce podle tvrzení 2. můžeme vyjádřit hustotu $f(x)$ a distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu, \sigma)$ pomocí hustoty a distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Dále obdobně platí

$$P\{a \leqq x \leqq b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Pomocí normálního rozdělení lze aproximovat mnohá jiná spojitá i diskrétní rozdělení. Normální rozdělení mají náhodné veličiny, jejichž hodnota je úhrnem účinků mnoha nezávislých činitelů, a přitom je účinek jednotlivého činitele sám o sobě nepatrný. Odtud vyplývá důležitost normálního rozdělení jak pro teoretické úvahy, tak pro praktické aplikace. Příkladem normálně rozdělené náhodné veličiny jsou např. chyby při měření. Normálním rozdělením lze aproximovat např. rozdělení hektarových výnosů, neregulované poptávky a jiná rozdělení.

Někdy sice víme nebo předpokládáme, že náhodná veličina x má dané rozdělení pravděpodobnosti, např. normální rozdělení, neznáme však hodnoty parametrů μ, σ tohoto rozdělení. Pak musíme použít metod matematické statistiky, abychom na podkladě pozorovaných realizací náhodné veličiny určili odhady neznámých parametrů.

Předpokládejme, že jsme napozorovali hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ náhodné veličiny x s neznámou střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Odhadem střední hodnoty je např. výběrový průměr:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

odhadem rozptylu je výběrový rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

KAPITOLA 14 APLIKACE MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

V této kapitole zformulujeme několik úloh z různých odvětví národního hospodářství. Jde o úlohy bližší realitě, než byly školské příklady uvedené v předchozím textu. Jsou to však většinou úlohy stále velmi zjednodušené. Úplný rozbor reálných úloh zabírá zpravidla příliš mnoho místa a nelze je v dané učebnici uvést. Zejména vynecháváme otázku volby optimalizačního kritéria a otázku ocenění, které tvoří právě nejsložitější součást ekonomických úvah o optimalizaci. První úlohy jsou zajímavé tím, že se dají umělými obraty převést na jednoduchý dopravní model.

14.1 DOPRAVA S TRANZITEM

V jednostupňové dopravní úloze popsané v kap. 8 se předpokládají pouze výchozí a konečné stanice. V reálných dopravních problémech se však často setkáváme i s tranzitními stanicemi, tj. se stanicemi, které dané zboží i přijímají i odesílají. Přitom se může často stát, že je výhodnější z jedné stanice posílat zboží do druhé přes třetí stanici, než je poslat přímo. Můžeme tedy dopravní úlohu zobecnit tak, že předpokládáme, že všechny stanice dopravují také tranzitní zboží. Jsou-li známy dopravní sazby mezi všemi stanicemi, vzniká pak otázka, jak rozvrhnout dopravu daného zboží, skladovaného v m prvních stanicích a požadovaného v daných množstvích v ostatních stanicích, aby celkové náklady za přepravu byly minimální.

Předpokládejme, že je dáno $m + n$ stanic. Prvních m stanic skladuje určité zboží v množstvích

$$a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

posledních n stanic požaduje toto zboží v množstvích

$$b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

přičemž

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Tyto předpoklady nevylučují, že některé stanice jsou čistě tranzitní, tj. že zboží ani neskladují, ani nepožadují. V tomto případě stačí dosadit za a_i, resp. b_j nulu. Předpokládejme dále, že všechny stanice jsou tranzitní a že jsou známy dopravní sazby (které jsou uvažovány jako konstantní) z kterékoli stanice do kterékoli jiné stanice. Označme symbolem c_{ij} $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m + n)$ sazbu za dopravu jednotky z i-té stanice do j-té stanice. Označme dále symbolem y_i množství zboží (zatím neznámé), které půjde přes i-tou stanici tranzitem. Konečně pro obecnost můžeme předpokládat, že existuje také tranzitní poplatek, který činí c_i za jednotku zboží provezeného i-tou stanicí. Za těchto předpokladů lze formulovat úlohu takto:

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m+n}{}' \sum_{j=1}^{m+n}{}' c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i y_i$$

za podmínek

$$x_{ij} \geqq 0,\ y_i \geqq 0$$

$$\sum_{j=1}^{m+n}{}' x_{ij} = a_i + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m+n}{}' x_{ij} = y_i \quad (i = m + 1, m + 2, \ldots, m + n)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n}{}' x_{ij} = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n}{}' x_{ij} = b_j + y_j \quad (j = m + 1, m + 2, \ldots, m + n)$$

Symbol $\sum'$ znamená, že se ze sčítání vylučuje $i = j$.

Uvedená úloha už není obyčejným distribučním modelem. Obsahuje $(m + n) \cdot (m + n - 1)$ proměnných x_{ij} a $m + n$ proměnných y_i. Dá se však jednoduchým umělým obratem převést na obyčejnou distribuční úlohu. Za tím účelem vyberme dostatečně velké číslo y_0, větší než tranzit přes kteroukoli stanici, tj. $y_0 > y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m + n)$. Takové číslo můžeme určit, i když neznáme předem tranzit přes jednotlivé stanice. Stačí např. volit $y_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i$, neboť je jisté, že přes žádnou stanici nebude provezeno více zboží, než je souhrn skladovaného, resp. požadovaného množství. Úlohu pak transformujeme tak, že místo proměnných y_i zavádíme proměnné x_{ii} podle vztahů

$$y_i = y_0 - x_{ii}$$

Dostaneme úlohu minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m+n}{}' \sum_{j=1}^{m+n}{}' c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m+n} c_i (y_0 - x_{ii})$$

při

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m + n)$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_{ij} = a_i + y_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} x_{ij} = y_0 \quad (i = m + 1, m + 2, \ldots, m + n)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_{ij} = y_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_{ij} = b_j + y_0 \quad (j = m + 1, m + 2, \ldots, m + n)$$

Účelovou funkci ještě můžeme upravit tak, že píšeme $-c_{ii}$ místo c_i; pak dostaneme

$$z = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_{ij} x_{ij} + \text{konst.},$$

Tabulka 14.1

	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	0 370	1	8	3 100	12	15	4 60	530
D_2	1 30	0 400	5	7	4 100	10	9	530
D_3	8	5	0 400	4	3	6 100	2 40	540
S_1	3	7	4	0 400	12	10	9	400
S_2	12	4	3	12	0 400	8	7	400
S_3	15	10	6	10	8	0 400	4	400
S_4	4	9	2	9	7	4	0 400	400
	400	400	400	500	500	500	500	

kde konstanta se rovná $y_0 \sum_{i=1}^{m+n} c_i$. Tím jsme ale úlohu zredukovali na jednostupňový dopravní model o $m + n$ dodavatelích s kapacitami

$$y_0 + a_1, y_0 + a_2, \dots, y_0 + a_m, y_0, \dots, y_0$$

a o $m + n$ spotřebitelích s požadavky $y_0, \dots, y_0, y_0 + b_1, \dots, y_0 + b_n$.

Příklad 14.1. Předpokládejme tři dodavatele o kapacitách 130, 130 a 140 a čtyři spotřebitele o požadavcích 100, 100, 100, 100; sazby jsou uvedeny v tabulce (předpokládá se $c_{ij} = c_{ji}$, tj. sazba z i do j je stejná jako z j do i, a $c_i = 0$, tj. poplatek za průvoz neexistuje). Dosadíme $y_0 = 400$ a sestavíme čtvercovou tabulku o sedmi dodavatelích a sedmi spotřebitelích (tab. 14.1).

V tabulce je hned vepsáno optimální řešení, které znamená dodat z D_1 100 jednotek do S_1 a 60 jednotek do S_4. Z toho je ovšem 30 jednotek dodaných do D_1 z D_2 tranzit. Zbývajících 100 jednotek pak dodat z D_2 do S_2. Z D_3 dodat 100 jednotek do S_3 a 40 jednotek do S_4.

14.2 MINIMALIZACE ODPADU V PLETÁRNÁCH

Šíře úpletů v pletárnách závisí na druhu pletacích strojů. V závislosti na tom, z jakých úpletů (jaké šíře) vyrábíme ten či onen výrobek, se mění množství odpadu.

Předpokládejme:

1. že máme m typů pletacích strojů o celkových kapacitách (třeba v kg úpletu) $a_1, a_2, \dots, a_m$,
2. že vyrábíme n druhů výrobků a plánované množství (opět v kg) těchto výrobků činí $b_1, b_2, \dots, b_n$,
3. že jsou známy ztráty na materiálu při výrobě jednotlivých výrobků z úpletu určitých šíří. Označme symbolem c_{ij} odpad v procentech, který vzniká při výrobě j-tého výrobku z úpletů vyráběných na strojích i-tého typu.

Úkolem je přidělit úplety různých šíří na výrobu jednotlivých výrobků tak, aby celkový odpad byl minimální.

Označíme-li množství úpletů i-tého typu zpracovaných na j-tý výrobek x_{ij}, jde zřejmě o minimalizaci funkce

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Přitom celkové množství zpracovaných úpletů jednotlivých šíří nesmí překročit kapacitu příslušné skupiny strojů, tj.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

a plán výroby musí být splněn, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{100 - c_{ij}}{100} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Je to zřejmě zobecněná distribuční úloha, kde $k_{ij} = \dfrac{100 - c_{ij}}{100}$. V praxi se však tato úloha řeší jednodušeji. Především je přípustný odpad pouze do určité výše (technologicky přípustný odpad). Je-li při některé kombinaci odpad větší, než je technologicky přípustné, vyškrtne se příslušné políčko předem (resp. dosadí se tam prohibitivní sazba M). Označíme-li maximální odpad c, tj. $c = \max c_{ij}$, a předpokládáme-li všude maximální odpad, pak ve sloupcových omezeních je možno vytknout $\dfrac{100 - c}{100}$ před sumační znaménko a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{100}{100 - c} b_j$$

Tím se však úloha zredukovala na jednostupňovou dopravní úlohu:

Minimalizovat

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

na množině řešení soustavy

$$x_{ij} \geqq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b'_j$$

(kde jsme pro stručnost označili $\dfrac{100}{100 - c} b_j = b'_j$). Znamená to vlastně, že se plán výroby vyjadřuje v jednotkách úpletů (b'_j je množství úpletů zpracovaných na výrobek j).

14.3 ROZDĚLENÍ PRÁCE NA STROJE

Předpokládáme, že se v dílně vyrábějí čtyři různé součástky, které mohou být vyrobeny na třech strojích. Kapacita těchto strojů a potřeba součástek je uvedena v tab. 14.2:

KAPACITA STROJŮ 1 000 KUSŮ ZA MĚSÍC *Tabulka 14.2*

Stroj	Součástka			
	1	2	3	4
I	2	3	2,5	1,5
II	1,6	2,4	2	1,2
III	0,8	1,2	1	0,6
Potřeba součástek v 1 000 Kčs	1	1,5	1	1,2

Náklady na výrobek jsou na různých strojích rovněž různé a jsou uvedeny v tab. 14.3:

Tabulka 14.3

Stroj	Náklady v Kčs/ks výrobku			
	1	2	3	4
I	20	16	18	32
II	24	20	21	36
III	40	36	40	60

Úkolem je vyrobit požadované součástky s nejmenšími možnými náklady. Jde zřejmě o zobecněnou distribuční úlohu. Protože v daném případě jsou výkony jednotlivých strojů navzájem přímo úměrné, lze úlohu redukovat na jednostupňovou dopravní úlohu. Za tím účelem přepočítejme všechno na společnou smluvenou jednotku.

Takovou jednotkou může být např. jednotka některého výrobku nebo jednotka kapacity některého stroje.

Zvolme za smluvenou jednotku jedno procento kapacity třetího stroje. Pak kapacity jednotlivých strojů budou vyjádřeny čísly 250, 200, 100.

Potřebu součástek v kusech přepočteme velmi snadno na tyto jednotky. Z první součástky potřebujeme 1 000 kusů, avšak 800 kusů se rovná 100 smluveným jednotkám. Požadovaných 1 000 kusů představuje tedy 125 smluvených jednotek. Podobně 1 500 kusů druhého výrobku představuje 125 smluvených jednotek, 1 000 kusů třetího výrobku představuje 100 smluvených jednotek a 1 200 kusů posledního výrobku představuje 200 smluvených jednotek.

I náklady se dají poměrně snadno přepočítat na smluvenou jednotku. Tak např. náklady na smluvenou jednotku při výrobě první součástky na prvním stroji vypočteme takto:

Náklady na 1 kus činí 20 Kčs. Přitom 2 000 kusů vyčerpává celou kapacitu stroje, tj. odpovídá 250 smluveným jednotkám. Náklady na jednu smluvenou jednotku tedy činí

$$\frac{20 \,.\, 2\,000}{250} = 160$$

Obdobně můžeme vypočíst náklady na smluvenou jednotku pro kteroukoli kombinaci stroje a výrobku.

Z takto přepočtených údajů můžeme sestavit distribuční problém (viz tab. 14.4), kde sazby v *i*-té řádce a *j*-tém sloupci znamenají náklady na jednu smluvenou jednotku při výrobě *j*-tého výrobku na *i*-tém stroji:

Tabulka 14.4

Stroje	Výrobky				Kapacity ve smluvených jednotkách
	1	2	3	4	
I	160 25	192 125	180 100	192	250
II	192	240	210	216 200	200
III	320 100	432	400	360	100
Požadavky ve smluvených jednotkách	125	125	100	200	

V tabulce 14.4 je vepsáno optimální řešení. Přejdeme-li ze smluvených jednotek na kusy výrobků, vypadá optimální řešení takto:

OPTIMÁLNÍ VÝROBNÍ PROGRAM *Tabulka 14.5*

Stroj	Součástky (v 1 000 ks)			
	1	2	3	4
I	0,2	1,5	1	
II				1,2
III	0,8			
	1	1,5	1	1,2

Hodnotu účelové funkce, tj. minimální náklady na výrobu, je možno vypočítat podle tab. 14.4 nebo 14.5.

$$\begin{aligned} z &= 25 . 160 + 125 . 192 + 100 . 180 + 200 . 216 + 100 . 320 = \\ &= 200 . 20 + 1\,500 . 16 + 1\,000 . 18 + 1\,200 . 36 + 800 . 40 = \\ &= 121\,200 \end{aligned}$$

V příkladě jsme předpokládali, že kapacity jednotlivých strojů jsou v pevném vzájemném poměru, bez ohledu na to, který výrobek vyrábíme. Ve skutečnosti tomu tak obvykle není a poměr kapacit jednotlivých strojů může být u různých strojů různý. V tomto případě nelze kapacity a požadavky jednoznačně přepočítat na společnou smluvenou jednotku. Lze však velmi často aspoň přibližně přepočítat údaje na smluvené jednotky a získat tak pomocí metody řešení dopravního problému přibližné řešení.

14.4 PLÁNOVÁNÍ OPRAV A REZERV

Má-li podnik větší počet strojů stejného typu a má-li přitom pevný plán oprav, je otázka, kolik rezervních strojů má mít, resp. jak dalece má použít služeb dražších rychlooprav. Předpokládajeme tento zjednodušený případ:

Dopravní podnik má 500 nákladních vozů stejného typu. Vozy jsou v provozu po celý rok. Motory se dávají plánovitě do generální opravy. Jestliže jde motor do generální opravy, namontuje se do vozu náhradní motor; může to být ovšem motor nový, popř. motor vrácený z opravy. Podnik má tyto tři možnosti:

a) zadat generální opravu na motoru v normální lhůtě 3 měsíců v ceně Kčs a za kus,

b) zadat generální opravu urychleně za 1 měsíc za zvýšenou cenu Kčs b za kus,

c) koupit nový motor v ceně Kčs c za kus.

Platí zde samozřejmě $a < b < c$.

Předpokládejme dále, že na některý rok sestavil podnik tento plán generálních oprav:

Tabulka 14.6a

Měsíc	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Počet motorů do generální opravy	12	12	5	7	12	5	10	5	6	8	15	13

Je třeba vypočítat, kolik motorů má podnik koupit do rezervy, kolik dát opravit urychleně a kolik normálně, aby celkové náklady byly minimální.

Označme symbolem:

x_i počet motorů daných v i-tém měsíci do normální opravy,

x'_i počet motorů daných v i-tém měsíci do rychloopravy,

x''_i počet motorů koupených v i-tém měsíci,

y_i počet motorů, které jsou v i-tém měsíci pohotově k dispozici.

Pak platí

$$y_i = y_{i-1} + x_{i-3} + x'_{i-1} + x''_i - x_i - x'_i \geqq 500;$$

to znamená, že mezi motory, které jsou v i-tém měsíci pohotově k dispozici, patří jednak motory, které byly k dispozici minulý měsíc, jednak motory, které se vrátily z opravy (x_{i-3}, x'_{i-1}) a které byly nakoupeny (x''_i).

Tento počet je ovšem zmenšen o počet motorů daných do opravy ($x_i + x'_i$). K dispozici musí být nejméně 500 motorů. Dále platí

$$x_i + x'_i = a_i$$

(a_i je počet motorů daných v i-tém měsíci podle plánu do opravy).

Dostaneme tak soustavu 24 omezení.

Účelová funkce pak zní

$$a \sum_i x_i + b \sum_i x'_i + c \sum_i x''_i$$

Tato úloha se dá umělým obratem zredukovat na úlohu typu dopravního.

Uvažujeme takto: Má-li podnik dát určitý počet motorů do generální opravy, potřebuje stejný počet náhradních motorů. Tyto potřeby uvažujeme jako požadavky nějakých hypotetických spotřebitelských „stanic“. Takových „stanic“ bude v našem případě 12 (tab. 14.6b).

Jejich „požadavky“ jsou právě počty motorů dávaných v jednotlivých měsících do generální opravy. K tomu ještě připojíme třináctou, fiktivní stanici, která pohltí rezervní motory, které zůstanou ke konci roku.

Abychom nyní zjistili, které jsou „dodavatelské stanice“, stačí si všimnout, z čeho se kryjí požadavky „spotřebitelských stanic“. Kryjí se jednak nákupem, jednak z počtu motorů daných do opravy v předchozích měsících. Bude tedy celkem 13 dodavatelských stanic, a to jeden hypotetický „obchod“ a dvanáct měsíců. Kapacity posledních 12 „stanic“ se rovnají počtu motorů odevzdaných do generální opravy v jednotlivých měsících. Je třeba ještě určit kapacitu první „stanice“. Protože nový motor je dražší než oprava, nebude podnik, záleží-li mu na minimalizaci nákladů, kupovat nový motor, pokud může dostat starý, opravený. Nemá-li podnik na počátku roku žádné rezervní motory, bude jich muset během roku kupovat minimálně tolik, kolik je největší měsíční potřeba (neboť oprava trvá minimálně jeden měsíc), tj. 15 kusů. Bereme-li v úvahu, že oprava trvá normálně tři měsíce, a nechceme-li používat drahých rychloopraven, bude podnik potřebovat tolik nových motorů, kolik je největší potřeba tří po sobě následujících měsíců. V našem příkladě

Tabulka 14.6b

	Měsíc												Konečná rezerva	Kapacity
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.		
Nákup	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	0	36
I.		*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	12
II.			*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	12
III.				*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	5
IV.					*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	7
V.						*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	12
VI.							*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	0	5
VII.								*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	0	10
VIII.									*b*	*b*	*a*	*a*	0	5
IX.										*b*	*b*	*a*	0	6
X.											*b*	*b*	0	8
XI.												*b*	0	15
XII.													0	13
Požadavky	12	12	5	7	12	5	10	5	6	8	15	13	36	

jsou to poslední tři měsíce s celkovým požadavkem 36 kusů. To je také maximální požadavek na nové motory, jaký při racionálním hospodaření může přicházet v úvahu. Stačí tedy, když našemu hypotetickému obchodu přisoudíme kapacitu 36 kusů.

Tím máme určeny kapacity a požadavky „stanic", takže zbývá ještě určit „sazby". Vezměme například čtvrtý měsíc, kdy chceme dát do opravy sedm motorů. Náhradu za ně můžeme dostat z nákupu, tj. z první „dodavatelské stanice", za cenu Kčs *c*. Bude tedy sazba v prvním políčku *c*. Náhradu je možno získat též z motorů daných do opravy v prvním měsíci (pro jednoduchost předpokládejme, že se motory dávají do opravy vždy počátkem příslušného měsíce); protože v daném případě stačí oprava normální, bude „sazba" v druhém políčku čtvrtého sloupce *a*.

Konečně náhradní motory je možno získat i z těch, které byly dány do opravy v druhém a třetím měsíci; pak ovšem přicházejí v úvahu jenom rychloopravy. Sazba ve třetím a čtvrtém políčku čtvrtého sloupce bude tedy *b*. Z motorů daných do opravy ve čtvrtém měsíci a měsících pozdějších není samozřejmě možno ve čtvrtém měsíci čerpat, proto dosazujeme do pátého a dalších políček čtvrtého sloupce zamezující sazby (prakticky nekonečně veliké sazby). Provedeme-li obdobnou úvahu i pro ostatní „spotřebitelské stanice", dostaneme jednostupňovou dopravní úlohu uvedenou v tab. 14.6b.

V tabulce jsou stupňovitou čárou oddělena políčka se zamezujícími sazbami (sazby tam vůbec nejsou uvedeny), tj. políčka, která nesmějí být obsazena. Poslední sloupec představuje fiktivní stanici, proto jsou tam sazby vesměs nulové. První políčko tohoto sloupce znamená vlastně nevyužitou kapacitu, resp. v našem příkladě neuskutečněný nákup. Bude-li v tomto políčku v optimálním řešení například 20 jednotek, znamená to, že podnik nakoupí během roku pouze 16 nových motorů, nikoli 36, které přicházejí maximálně v úvahu.

V ostatních políčkách posledního sloupce budou motory, které zůstanou v rezervě pro příští rok. Náklady s tím spojené nejsou už z hlediska daného příkladu náklady letošního roku.

Řešení tohoto problému závisí, jako u jiných dopravních problémů, na vzájemném poměru sazeb. Avšak s ohledem na to, že jsou tu jenom tři různé reálné „sazby", je možno snadno určit, jak závisí řešení na vzájemném poměru sazeb *a*, *b* a *c*.

(Řešte příklad pro různé hodnoty *a*, *b*, *c*, a pokuste se vyjádřit obecně závislost řešení na vzájemném poměru *a*, *b* a *c*.)

14.5 PLÁNOVÁNÍ VÝROBY A ZÁSOB

Předpokládejme tento případ: Podnik vyrábí určitý výrobek na zakázku a má zakázky na celý rok. Zakázky jsou však velmi nerovnoměrně rozvrženy podle měsíců, např. takto:

Tabulka 14.7

Měsíc	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Zakázka (kusů)	50	30	30	60	80	120	90	70	70	100	160	140

Kapacita podniku je 75 kusů za měsíc v normální pracovní době a dalších 25 kusů v době přesčasové. Náklady na výrobu jednoho kusu v přesčasové době jsou samozřejmě větší než náklady na jednotku vyrobenou v normální pracovní době; tyto náklady se však mohou měsíc od měsíce měnit. Označme náklady na kus vyrobený v i-tém měsíci v normální pracovní době symbolem a_i, náklady na kus vyrobený v tomto měsíci v přesčasové době symbolem b_i a náklady na skladování jednoho kusu za měsíc symbolem c. Otázkou je, jak má podnik naplánovat svou výrobu, aby úhrnné výrobní a skladovací náklady byly nejmenší. (Předpokládejme pro jednoduchost, že podnik nemá počáteční zásoby a ani ke konci roku nepotřebuje žádné zásoby.)

Podobně jako předchozí úlohu lze i tuto úlohu zredukovat na úlohu typu dopravního. „Spotřebiteli“ zde budou zakázky na jednotlivé měsíce, „dodavateli“ budou kapacity (zvlášť řádné a zvlášť přesčasové) v jednotlivých měsících. Podrobné provedení úlohy přenecháváme čtenáři.

14.6 OPTIMÁLNÍ ROZMÍSTĚNÍ STANOVIŠŤ DOPRAVNÍCH PROSTŘEDKŮ

Předpokládejme, že dopravní podnik má určitý počet autobusů vzájemně zaměnitelných, které jezdí mezi danými místy podle pevného jízdního řádu (vyplývajícího z místních potřeb). Podnik má garáže i osazenstvo na všech konečných stanicích. Je otázka, jak rozmístit autobusy na jednotlivá stanoviště. Důležitým kritériem při takovém rozmístění je, aby autobusy zůstaly co nejkratší dobu mimo domovské stanoviště, neboť pobyt mimo domovské stanoviště je spojen s většími náklady na údržbu i na personál. Je-li toto kritérium jediné pro posouzení rozmístění vozů, jde o přidělovací problém. Ukážeme to na velmi jednoduchém příkladě:

Předpokládejme (pro jednoduchost), že podnik jezdí jenom mezi dvěma stanicemi, A a B, že má k dispozici pro tuto trať pět autobusů a že jedna jízda trvá v jednom směru 2 hod. 30 min. Odjezdy a příjezdy jsou uvedeny v tab. 14.8.

Tabulka 14.8

Stanice	Odjezdy a příjezdy									
A	odj. 4.30	5.10	11.00	16.00	20.00	příj. 5.50	7.50	14.30	19.30	21.30
B	příj. 7.00	7.40	13.30	18.30	22.30	odj. 3.20	5.20	12.00	17.00	19.00

Předpokládejme nejdříve, že všechny autobusy mají domovské stanoviště ve stanici A, a zkoumejme, jak dlouho budou mimo stanoviště při všech možných kombinacích. Tak například použije-li se autobusu, který vyjíždí první ze stanice A, k první jízdě ze stanice B, bude mimo domovské stanoviště celkem 25 hod. 20 min. (vyjíždí ve 4.30 a může se vrátit až druhý den v 5.50 hod.). Kdybychom kombinovali první jízdu ze stanice A s třetí jízdou ze stanice B, bude trvat pobyt autobusu mimo domovské stanoviště jenom 10 hod. Všechny tyto doby je možno sestavit do čtvercové tab. 14.9a.

POBYT AUTOBUSŮ MIMO DOMOVSKÉ STANOVIŠTĚ *A* *Tabulka 14.9a*

Pořadí odjezdů ze stanice *A*	Pořadí odjezdů ze stanice *B*				
	1	2	3	4	5
1	25.20	27.20	10	15	17
2	24.40	26.40	9.20	14.20	16.20
3	18.50	20.50	27.30	8.30	10.30
4	13.50	15.50	22.30	27.30	5.30
5	9.50	11.50	18.30	23.30	25.30

Podobnou tabulku je možno sestavit i pro předpoklad, že všechny autobusy mají domovské stanoviště ve stanici B:

POBYT AUTOBUSŮ MIMO DOMOVSKÉ STANOVIŠTĚ *B* *Tabulka 14.9b*

Pořadí odjezdů ze stanice *A*	Pořadí odjezdů ze stanice *B*				
	1	2	3	4	5
1	27.40	25.40	19	14	12
2	28.20	26.20	19.40	14.40	12.40
3	10.10	8.10	25.30	20.30	18.30
4	15.10	13.10	6.30	25.30	23.30
5	19.10	17.10	10.30	5.30	27.30

Rozhodneme-li se pro některou kombinaci jízd, máme vždy dvě možnosti, jak přiřadit autobus, a to buď stanici A, nebo stanici B.

Rozhodneme se pro tu z obou alternativ, která je spojena s kratším pobytem mimo domovské stanoviště. Např. chceme-li, aby týž autobus absolvoval první jízdu z A a poslední jízdu z B, pak ho přiřadíme stanici B, neboť tak bude autobus mimo domovské stanoviště pouze 12 hodin, kdežto v opačném případě bude mimo domovské stanoviště 17 hod. Z toho vyplývá, že pro další výpočet stačí u každé kombinace uvažovat pouze o jedné alternativě. Sestavíme proto z obou tabulek novou tabulku, kde v každém políčku bude menší z obou čísel (tab. 14.10).

NEJKRATŠÍ POBYT AUTOBUSŮ MIMO DOMOVSKÉ STANOVIŠTĚ *Tabulka 14.10*

Pořadí odjezdů ze stanice *A*	Pořadí odjezdů ze stanice *B*				
	1	2	3	4	5
1	25.20	25.40	10	$\boxed{14}$	12
2	24.40	26.20	$\boxed{9.20}$	14.20	12.40
3	10.10	$\boxed{8.10}$	25.30	8.30	10.30
4	13.50	13.10	6.30	25.30	$\boxed{5.30}$
5	$\boxed{9.50}$	11.50	10.30	5.30	25.30

Nyní jde zřejmě o to zvolit takové kombinace jízd, aby celková doba pobytu všech vozidel mimo domovské stanoviště byla minimální. To je však obyčejný přidělovací problém.

V tabulce 14.10 je vyznačeno zarámováním optimální řešení získané maďarskou metodou. Podle tohoto řešení je nejúčelnější tato úprava:

Umístit tři vozidla ve stanici *A*, jedním z nich absolvovat druhou jízdu z *A*, zpět pak třetí jízdu z *B*, druhým absolvovat čtvrtou jízdu z *A*, zpět pak pátou jízdu z *B*, třetím pátou jízdu z *A* a zpět první jízdu z *B*; další dvě vozidla umístit v *B*, absolvovat jimi čtvrtou jízdu z *B*, zpět pak první jízdu z *A* a druhým vozem druhou jízdu z *B*, zpět pak třetí jízdu z *A*. Dosažená celková minimální doba pobytu vozidel mimo domovské stanoviště činí v tomto případě 46 hod. 50 min.

14.7 ÚLOHY O ROZMÍSTĚNÍ VÝROBY

Problematika rozmístění výroby je velmi složitá pro velké množství činitelů, které mají na rozmístění vliv. Navíc přichází v úvahu u většiny konkrétních úloh řada specifických podmínek, z nichž ne všechny se dají kvantifikovat. Zde se omezíme na zkoumání problematiky rozmístění jedině z hlediska dopravy surovin a hotových výrobků a z hlediska nákladů na zpracování (nebudeme se zabývat investičními náklady, předpokládáme prostě, že jsou již nějakým způsobem započteny do nákladů na zpracování).

Vyjdeme z těchto předpokladů:

a) Na výrobu žádaného výrobku je třeba m různých surovin, a to např. $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jednotek těchto surovin na jednotku produkce.

b) Je n_1 zdrojů první suroviny o kapacitách $a_i^{(1)} (i = 1, 2, \ldots, n_1)$, podobně n_2 zdrojů druhé suroviny o kapacitách $a_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n_2)$, atd.

c) Je s spotřebitelských center (spotřebitelů) výrobku, jejichž požadavky činí $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

d) Pro výrobu přichází v úvahu p bodů (produkční body), přičemž se předpokládá, že v r-tém bodě je maximální výroba (horní hranice výroby) $\overline{K}_r$, že se tam však musí vyrábět minimálně $\underline{K}_r$ (dolní hranice výroby). Platí přitom $0 \leqq \underline{K}_r \leqq \overline{K}_r$ a nevylučuje se $\underline{K}_r = 0$, $\overline{K}_r = \infty$.

e) Dopravní náklady jsou úměrné přepravenému množství, přičemž náklady za dopravu jednotky t-té suroviny od k-tého zdroje této suroviny k r-tému produkčnímu bodu činí $c_{kr}^{(t)}$, náklady na dopravu jednotky produkce z r-tého produkčního bodu ke q-tému spotřebiteli činí d_{rq}.

f) Pro každý produkční bod je dána nákladová funkce $g_r(Y_r)$, která vyjadřuje, jaké jsou v daném bodě (r-tém) náklady na zpracování jednotky produkce v závislosti na objemu produkce (Y_r).

Otázka zní, jak umístit výrobu do jednotlivých produkčních bodů tak, aby celkové náklady výrobní i dopravní byly minimální.

Abychom tuto úlohu zformulovali matematicky, označme množství t-té suroviny, která se má přepravit z k-tého zdroje do r-tého produkčního bodu, symbolem $x_{kr}^{(t)}$, množství produkce, které se má z r-tého produkčního bodu přepravit ke q-tému spotřebiteli, symbolem y_{rq} a objem produkce v r-tém bodě symbolem Y_r.

Celkové náklady z pak můžeme vyjádřit takto:

$$z = \sum_{i,r} c_{ir}^{(1)} x_{ir}^{(1)} + \sum_{j,r} c_{jr}^{(2)} x_{jr}^{(2)} + \ldots + \sum_{y,r} c_{yr}^{(m)} x_{yr}^{(m)} +$$
$$+ \sum_{r,q} d_{rq} y_{rq} + \sum_{r} Y_r g_r(Y_r),$$

kde prvních m součtů jsou náklady za přepravu jednotlivých surovin, $(m + 1)$-ní součet znamená náklady na dopravu hotové produkce a poslední součet znamená náklady na výrobu.

Platí přitom tato omezení:

1. Od každého surovinového zdroje lze vypravit nejvýše tolik suroviny, kolik činí jeho kapacita, tj. musí platit

$$\sum_r x_{kr}^{(t)} \leqq a_k^{(t)} \;\; (t = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, n_t),$$

jinak vyjádřeno
$$\sum_r x_{kr}^{(t)} + x_k^{(t)} = a_k^{(t)},$$

kde přídatná proměnná $x_k^{(t)}$ znamená nevyužitou kapacitu k-tého zdroje t-té suroviny. Těchto omezení je $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

2. Každý produkční bod dostává tolik suroviny, kolik jí potřebuje k výrobě, tj.

$$\sum_k x_{kr}^{(t)} = k_t Y_r \;\; (t = 1, 2, \ldots, m; \; r = 1, 2, \ldots, p)$$

Takových omezení je $m \,.\, p$.

3. Nevyrábí se na sklad, tj. každý produkční bod vyexpeduje celou svou produkci:

$$\sum_q y_{rq} = Y_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

4. Produkce je v každém bodě omezena

$$\underline{K}_r \leqq Y_r \leqq \overline{K}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

5. Každý spotřebitel dostává, co požaduje, tj.

$$\sum_r y_{rq} = b_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, s)$$

Všechny proměnné musí být přitom nezáporné. Omezení sub 1. až 5. jsou vesměs lineární. Je jich celkem $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + (m + 2)\,p + s$, což je v praktických úlohách velké číslo.

Účelová funkce je v obecném případě nelineární. V posledním součtu máme totiž členy $Y_r g_r(Y_r)$, které jsou lineární pouze ve speciálním případě, kdy $g_r(Y_r) = \text{konst.}$, tj. kdy náklady na zpracování jednotky jsou nezávislé na objemu výroby, jinými slovy, kdy celkové náklady na zpracování jsou přímo úměrné zpracovanému množství.

Jde tedy v zásadě o úlohu nelineárního programování. O povaze funkcí $g_r(Y_r)$ lze obecně máloco říci. Teoreticky se sice dá očekávat, že to budou funkce konvexní, dosahující minima v blízkosti nějakého optimálního využití kapacity, avšak prakticky naráží určení nezkreslených*) nákladových funkcí na značné potíže. Určuje se obvykle interpolací (a extrapolací) z několika diskrétních údajů.

Pokud jde o novou výstavbu v produkčních bodech, nemá spojitá nákladová funkce reálný smysl. V případě nové výstavby se obvykle počítá s normálním využitím budoucích kapacit. Přitom existuje volba z omezeného počtu projekčních variant. Pro tento případ je možno úlohu přeformulovat na úlohu celočíselnou, s proměnnými nula–jedna, nejlépe tímto způsobem:

Dejme tomu, že existují v projekčních variantách kapacity $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(v)}$, přičemž podle projektu budou náklady na výrobu jednotky činit v l-té variantě c_l $(l = 1, 2, \ldots, v)$. Potom v r-tém produkčním bodě bude kapacita

$$K_r = \delta_r^{(1)} K^{(1)} + \delta_r^{(2)} K^{(2)} + \ldots + \delta_r^{(v)} K^{(v)},$$

kde $\delta_r^{(l)}$ je rovna jedné nebo nule a součet

$$\delta_r^{(1)} + \delta_r^{(2)} + \ldots + \delta_r^{(v)} \leqq 1$$

Posledními podmínkami je zaručeno, že kapacita v r-tém bodě se bude rovnat buď nule, anebo jednomu z čísel $K^{(l)}$.

---

*) Máme tu na mysli zkreslující vliv mnoha činitelů irelevantních pro rozmístění, jako je např. špatná organizace práce.

Protože předpokládáme, že se nových kapacit využije, dosadíme uvedené výrazy pro kapacity přímo místo Y_r sub 2. a 3. Zároveň však (s ohledem na to, že kapacity mohou nabýt jen několika diskrétních hodnot), musíme připustit překročení požadavků (rovnice sub 5.).

Omezení sub 4. tím odpadají.

V účelové funkci se výrazy $Y_r g_r(Y_r)$ v posledním součtu nahradí výrazem

$$Y_r g_r(Y_r) = \delta_r^{(1)} c_1 K^{(1)} + \delta_r^{(2)} c_2 K^{(2)} + \ldots + \delta_r^{(v)} c_v K^{(v)}$$

Můžeme tedy diskrétní rozmísťovací úlohu formulovat takto:

Určit čísla:

$$x_{kr}^{(t)} \geqq 0, \qquad y_{rq} \geqq 0$$

$$\delta_r^{(l)} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0, \end{matrix} \right.$$

která splňují omezení

$$\begin{array}{ll}
1. & \sum_l \delta_r^{(l)} \leqq 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, p) \\
2. & \sum_r x_{kr}^{(t)} + x_k^{(t)} = a_k^{(t)} \qquad (t = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n_t) \\
3. & \left.\begin{array}{l} \sum_k x_{kr}^{(t)} - k_t \sum_l \delta_r^{(l)} K^{(l)} = 0 \\ \sum_q y_{rq} - \sum_l \delta_r^{(l)} K^{(l)} = 0 \end{array}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, p;\quad t = 1, 2, \ldots, m) \\
4. & \\
5. & \sum_r y_{rq} \geqq b_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, s)
\end{array}$$

a minimalizují

$$z = \sum_{i,r} c_{ir}^{(1)} x_{ir}^{(1)} + \ldots + \sum_{y,r} c_{yr}^{(m)} x_{yr}^{(m)} + \sum_{r,q} d_{rq} y_{rq} + \sum_{r,l} \delta_r^{(l)} c_l K^{(l)}$$

Je to zřejmě úloha lineárního programování, kde část proměnných může nabýt jen celočíselných hodnot.

Pro praxi je zajímavý i speciální případ, kdy nákladové funkce jsou konstantami, tj. kdy náklady na výrobu jsou přímo úměrny objemu produkce. Jednak je řada jednoduchých provozů (např. mísírny krmiv, sila apod.), u nichž náklady na výrobu jednotky jsou v širokých mezích konstantní, jednak lze podstatně jednoduššího výpočtu na základě konstantních nákladů použít jako vhodné aproximace.

Označme náklady na výrobu jednotky produkce v r-tém produkčním bodě c_r, tj. $g_r(Y_r) = c_r$. Pak poslední součet v účelové funkci lze upravit takto:

$$\sum_r Y_r g_r(Y_r) = \sum_r c_r Y_r$$

a na základě rovnic sub 3.

$$\sum_r Y_r g_r(Y_r) = \sum_{r,q} c_r y_{rq}$$

Tento součet je pak možno shrnout s předposledním součtem v účelové funkci na

$$\sum_{r,q} d'_{rq} y_{rq},$$

kde konstanta $d'_{rq} = d_{rq} + c_r$ znamená náklady na výrobu jednotky v r-tém produkčním bodě a na její dopravu do q-tého spotřebitelského centra.

Pro tento lineární případ je možno vhodně upravit i soustavu omezení. Proměnné Y_r se v účelové funkci nevyskytují. Je možno tedy rovnice sub 3. považovat za definiční a při výpočtech vynechat.

Omezení sub 4. je možno upravit takto:

$$\sum_q y_{rq} + y_r = \overline{K}_r$$

a

$$y_r \leqq \overline{K}_r - \underline{K}_r,$$

kde y_r je přídatná proměnná, jež znamená nevyužití kapacity v r-tém produkčním bodě. Poslední rovnice pak znamená, že je-li v r-tém bodě dána dolní mez pro výrobu, nesmí nevyužití kapacity překročit $\overline{K}_r - \underline{K}_r$. Podle první z obou uvedených rovnic platí

$$Y_r = \sum_q y_{rq} = \overline{K}_r - y_r$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnic sub 2., dostaneme

$$\sum_k x_{kr}^{(t)} + k_t y_r = k_t \overline{K}_r$$

Po těchto úpravách můžeme lineární rozmísťovací úlohu formulovat takto:

Určit nezáporná čísla $x_{kr}^{(t)}$, y_{rq}, která splňují omezení

$$\sum_r x_{kr}^{(t)} + x_k^{(t)} = a_k^{(t)} \qquad (t = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n_t)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k x_{kr}^{(t)} + k_t y_r = k_t \overline{K}_r \\ &\sum_q y_{rq} + y_r = \overline{K}_r \\ &y_r \leqq \overline{K}_r - \underline{K}_r \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, p;\quad t = 1,2, \ldots, m)$$

$$\sum_r y_{rq} = b_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, s)$$

a minimalizují lineární formu

$$z = \sum_{i,r} c_{ir}^{(1)} x_{ir}^{(1)} + \ldots + \sum_{y,r} c_{yr}^{(m)} y_{yr}^{(m)} + \sum_{r,q} d'_{rq} y_{rq}$$

Takto formulovaná úloha je zobecněním vícerozměrné dopravní úlohy (čl. 9.1). Pro její řešení se dá skutečně zobecnit algoritmus vícerozměrné dopravní úlohy.

Pro $t = 1$ (tj. přichází-li v úvahu pouze jedna dopravně významná surovina) a $k_t = 1$ (kdy se objem produkce vyjadřuje v jednotkách suroviny) se mění přímo ve vícerozměrnou dopravní úlohu s omezenými proměnnými y_r.

14.8 PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO

V různých oblastech operačního výzkumu se vyskytuje úloha všeobecně známá pod názvem „problém obchodního cestujícího"*) podle této konkrétní úlohy:

Obchodní cestující má navštívit určitý počet (n) míst tak, aby každé místo navštívil jenom jednou a aby se domů vrátil až po absolvování všech míst. Je třeba určit takové pořadí míst, aby délka okruhu byla minimální.**)

Úlohu je možno převést různým způsobem na problém celočíselného programování. Dále uvedeme formulaci Tuckerovu***), která se zdá být nejjednodušší.

Nechť je n míst, která má obchodní cestující navštívit (kromě výchozího „nultého" místa). Vzdálenost mezi i-tým a j-tým místem označme symbolem d_{ij}. Celkovou délku okružní cesty z můžeme pak vyjádřit vztahem

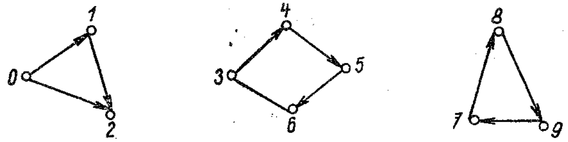
$$z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij},$$

kde x_{ij} je počet jízd z místa i do místa j. Protože jde o jedinou okružní cestu, může se x_{ij} pochopitelně rovnat buď jednotce, jestliže z místa i jede obchodní cestující bezprostředně do místa j, anebo nule. Po okružní cestě navštíví obchodní cestující každé místo jednou a jen jednou jede z každého místa do jediného dalšího místa; platí tedy

$$\sum_{i=n}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Tato omezení však nestačí, neboť je možno je splnit také tak, že se jednotlivá místa objedou po několika samostatných okruzích, jak je znázorněno na obr. 14.1.



Obr. 14.1

---

*) U nás také pod názvem problém okružní dopravy.

**) Úloha má ovšem širší význam, než jako příprava optimálního „jízdního řádu" pro obchodního cestujícího. Jde vlastně o jednu ze sekvenčních úloh, na které narážíme velmi často např. při pokusu o určení optimálního pořadí zpracování na strojích.

***) Tucker, A. W.: On Directed Graphs and Integer Programs, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1960.

Takový postup však zřejmě nedává řešení úlohy. Aby se vyloučila možnost dílčích okruhů, připojuje Tucker k již uvedeným omezením další omezení tvaru

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqq n - 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),$$

kde u_i je reálné číslo (neznámá) přiřazené místu i, u_j – reálné číslo přiřazené místu j.

Je ovšem třeba dokázat, že tyto nerovnosti nelze skutečně splnit, tvoří-li se dílčí okruhy, a naopak zase dokázat, že při jediném okruhu je lze splnit vhodnou volbou u_i a u_j.

Předpokládejme tedy, že máme dílčí okruh a vezměme dílčí okruh o k místech, neobsahující výchozí místo (např. dílčí okruh (7, 8, 9, 7), obr. 14.1). Vypočteme-li v takovém okruhu výrazy

$$u_i - u_j + nx_{ij}$$

pro všechny dvojice indexů (i, j), pro něž $x_{ij} = 1$ (tj. pro všechny hrany okruhu), a sečteme je, ruší se navzájem čísla u_i a zůstane $k . n$ (neboť $x_{ij} = 1$). To je v rozporu se shora uvedenými nerovnostmi, podle nichž by vyšlo

$$kn \leqq k(n - 1)$$

Např. pro třetí dílčí okruh na obrázku máme podle nerovností uvedených shora

$$u_7 - u_8 + 9 \leqq 8$$
$$u_8 - u_9 + 9 \leqq 8$$
$$u_9 - u_7 + 9 \leqq 8$$

a po sečtení

$$27 \leqq 24,$$

což je zřejmě spor (ať volíme u_i jakkoli).

Na druhé straně, tvoří-li celá okružní cesta jediný okruh, je možno uvedené nerovnosti splnit např. tak, že dosadíme $u_i = t$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, jestliže i-té místo je t-té v pořadí po okružní cestě. Při takové volbě čísel u_i platí vždy

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqq n - 1 \qquad (\text{pro všechna } i \neq j),$$

neboť

a) následuje-li j-té místo po i-tém na okružní cestě, platí

$$x_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad u_j = u_i + 1,$$

a tedy

$$u_i - u_j + nx_{ij} = n - 1;$$

b) ve všech ostatních případech $x_{ij} = 0$ a

$$u_i - u_j \leqq n - 1$$

Můžeme tedy shrnout matematickou formulaci problému obchodního cestujícího takto:

Určit celá čísla $x_{ij} \geqq 0$ a reálná čísla u_i a u_j taková, aby splnila omezení

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqq n - 1 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

a aby minimalizovala

$$z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

14.9 OPTIMALIZACE MAĎARSKÉ PAPÍRENSKÉ VÝROBY*)

Úkolem je určit optimální výrobní program maďarského papírenského průmyslu vzhledem k těmto podmínkám:

a) Surovinová základna papírenského průmyslu je omezená, takže papírenský průmysl musí částečně zpracovat dovezené suroviny, resp. polotovary.

b) Výrobní kapacity polotovarů i hotových výrobků jsou omezené.

c) Domácí spotřeba papíru je dána, částečně je ji možno krýt dovozem. Na druhé straně jsou papírenské produkty též předmětem vývozu.

Kritériem optimality je maximální devizový přínos (resp. minimální devizové náklady).

Předpokládejme, že je celkem m různých papírenských surovin, n různých polotovarů a r různých hotových výrobků. Zavedeme tato označení:

$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ je disponibilní množství domácích surovin,
$\mathbf{x}^d = [x_1^d, x_2^d, \ldots, x_m^d]$ — množství zpracovaných surovin domácího původu,
$\mathbf{x}^i = [x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i]$ — importované množství surovin,
$\mathbf{y}^d = [y_1^d, y_2^d, \ldots, y_n^d]$ — domácí produkce polotovarů,
$\mathbf{y}^i = [y_1^i, y_2^i, \ldots, y_n^i]$ — dovoz polotovarů,
$\mathbf{c}^y = [c_1^y, c_2^y, \ldots, c_n^y]$ — vektor výrobních kapacit pro polotovary,
$\mathbf{z}^d = [z_1^d, z_2^d, \ldots, z_r^d]$ — domácí výroba papírenských výrobků,
$\mathbf{z}^e = [z_1^e, z_2^e, \ldots, z_r^e]$ — export papírenských výrobků,
$\mathbf{z}^i = [z_1^i, z_2^i, \ldots, z_r^i]$ — import papírenských výrobků,
$\mathbf{c}^z = [c_1^z, c_2^z, \ldots, c_r^z]$ — vektor výrobních kapacit hotových výrobků,
$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_r]$ — domácí potřeba papírenských výrobků.

---

*) Příklad je ve zjednodušeném zpracování převzat se svolením autora z učebnice Krekó, B.: Lineáris programozás. Budapest, Közg. K. 1962.

Platí tyto vztahy:

1. Spotřeba domácích surovin nemůže překročit jejich disponibilní množství, tj.

$$\mathbf{x}^d \leqq \mathbf{a}$$

2. Suroviny se spotřebují jednak na výrobu polotovarů – tato část spotřeby se dá vyjádřit jako funkce výroby polotovarů $f_{xy}(\mathbf{y}^d)$, jednak přímo na hotové výrobky – tato část spotřeby je funkcí produkce hotových výrobků $f_{xz}(\mathbf{z}^d)$. Celková spotřeba surovin se tedy rovná

$$\mathbf{x}^d + \mathbf{x}^i = f_{xy}(\mathbf{y}^d) + f_{xz}(\mathbf{z}^d)$$

Prakticky lze spotřebu surovin považovat za přímo úměrnou výrobě. V tom případě

$$f_{xy}(\mathbf{y}^d) = \mathbf{A}_{xy}\mathbf{y}^d$$

a

$$f_{xz}(\mathbf{z}^d) = \mathbf{A}_{xz}\mathbf{z}^d,$$

kde $\mathbf{A}_{xy}$ je matice typu $(m\,.\,n)$ a
$\mathbf{A}_{xz}$ — matice typu $(m\,.\,r)$.

Jsou to obě matice přímých norem spotřeby.

Ze vztahů 1. a 2. dostaneme tato omezení:

$$-\mathbf{x}^i + \mathbf{A}_{xy}\mathbf{y}^d + \mathbf{A}_{xz}\mathbf{z}^d \leqq \mathbf{a}$$

3. Výroba polotovarů nemůže překročit dané výrobní kapacity, tj.

$$\mathbf{y}^d \leqq \mathbf{c}^y$$

4. Spotřeba polotovarů je funkcí domácí produkce hotových výrobků $f_{yz}(\mathbf{z}^d)$ a nesmí překročit disponibilní množství polotovarů (tj. domácí výrobu + dovoz). Platí tedy

$$f_{yz}(\mathbf{z}^d) \leqq \mathbf{y}^d + \mathbf{y}^i$$

V případě linearity platí opět

$$f_{yz}(\mathbf{z}^d) = \mathbf{A}_{yz}\mathbf{z}^d,$$

kde $\mathbf{A}_{yz}$ je matice typu $(n\,.\,r)$.

5. Domácí výroba hotových výrobků musí zůstat v mezích daných kapacit, tj.

$$\mathbf{z}^d \leqq \mathbf{c}^z$$

6. Domácí výroba + dovoz – vývoz musí krýt domácí potřebu papíru, tj.

$$\mathbf{z}^d + \mathbf{z}^i - \mathbf{z}^e \geqq \mathbf{b}$$

7. Čistý devizový přínos činí

$$\mathbf{p}_{ze}^T\mathbf{z}^e - \mathbf{p}_{zi}^T\mathbf{z}^i - \mathbf{p}_y^T\mathbf{y}^i - \mathbf{p}_x^T\mathbf{x}^i,$$

kde $\mathbf{p}_{ze}$ je vektor cen vyvezených hotových výrobků,
$\mathbf{p}_{zi}$ — vektor cen dovezených hotových výrobků,
$\mathbf{p}_y$ — vektor cen dovezených polotovarů,
$\mathbf{p}_x$ — vektor cen dovezených surovin,
vše v devizových korunách.

Podle uvedeného lze nyní matematicky formulovat úlohu takto:

Jsou dány vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^y$, $\mathbf{c}^z$, $\mathbf{p}_{zi}$, $\mathbf{p}_{ze}$, $\mathbf{p}_y$ a $\mathbf{p}_x$ a matice $\mathbf{A}_{xy}$, $\mathbf{A}_{xz}$, $\mathbf{A}_{yz}$; je třeba určit vektory

$$\mathbf{x}^i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^e \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{y}^d \leqq \mathbf{c}^y, \quad \mathbf{0} \leqq \mathbf{z}^d \leqq \mathbf{c}^z,$$

které splňují další podmínky

$$\begin{array}{rl} -\mathbf{x}^i + \mathbf{A}_{xy}\mathbf{y}^d + \mathbf{A}_{xz}\mathbf{z}^d & \leqq \mathbf{a} \\ -\mathbf{y}^i - \mathbf{y}^d + \mathbf{A}_{yz}\mathbf{z}^d & \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}^d + \mathbf{z}^i - \mathbf{z}^e & \geqq \mathbf{b} \end{array}$$

a maximalizují lineární formu

$$-\mathbf{p}_x^T\mathbf{x}^i - \mathbf{p}_y^T\mathbf{y}^i - \mathbf{p}_{zi}^T\mathbf{z}^i + \mathbf{p}_{ze}^T\mathbf{z}^e$$

KAPITOLA 15 STRUKTURÁLNÍ ANALÝZA

15.1 PODSTATA A VÝZNAM STRUKTURÁLNÍ ANALÝZY

Matematické programování se zabývá metodami optimalizace hospodářských procesů, ať již jde o hledání optimálních programů či optimální strategie. V strukturální analýze původně nešlo o optimalizaci, ale jen o zkoumání podmínek hospodářské rovnováhy za dané struktury ekonomie, resp. o zkoumání změn struktury ekonomiky. Teprve později, zvláště pak v modelech R. Frische, se zavádějí prvky programování (tj. optimalizace) do strukturální analýzy.

Základní myšlenka strukturální analýzy je jednoduchá a není nová. Národní hospodářství (popřípadě jakýkoli hospodářský systém) se skládá z více či méně dobře definovatelných částí (odvětví, oborů, sektorů či oblastí aj.), mezi nimiž existují určité dodavatelsko-odběratelské vztahy. Např. v Marxových schématech reprodukce je národní hospodářství rozděleno na dvě části, na první a druhé oddělení (výroba výrobních prostředků a výroba spotřebních předmětů).

Nastane-li nějaká změna v jedné části, promítne se tato změna i do ostatních částí, s nimiž buď přímo, nebo nepřímo souvisí. Roku 1874 se objevilo známé dílo francouzského ekonoma L. Walrase „Éléments d'Économie Politique Pure", v němž autor, vycházeje z pojmu hospodářské rovnováhy, podal podrobný teoretický model těchto vzájemných závislostí. Walras operoval v podstatě s neagregovanými veličinami. Jeho model byl čistě teoretický a Walras sám s ním jako s nástrojem empirického výzkumu ani nepočítal. V třicátých létech spojil V. Leontěv některé Walrasovy myšlenky, zejména jeho pojem statické rovnováhy, s tehdy již velmi dobře propracovanou metodou národohospodářského bilancování (národního účetnictví). Sestavil model statické hospodářské rovnováhy z agregovaných údajů. Agregací bylo umožněno snížit počet rovnic v modelu na únosnou míru. Svůj model pak vyzkoušel na rozsáhlém materiálu amerického hospodářství (viz W. W. Leontief: The Structure of the American Economy. Harward, Harward University Press 1939).

Strukturální analýza, původně koncipovaná jako metoda rozboru meziodvětvových vztahů, se ukázala plodnou při zkoumání jakýchkoli systémů s podobnou formální strukturou, tj. systémů, mezi jejichž částmi existují určité toky výrobků a služeb.

Metoda strukturální analýzy se ukázala velmi účinným nástrojem jak ekonomického rozboru, tak i plánování.

Pokud jde o ekonomický rozbor, dovoluje nová metoda hlouběji proniknout do vývoje hospodářských jevů i do vlastního měření v ekonomii.

Vezměme například tak často diskutovanou otázku, jako je měření produktivity práce. Zkoumání dynamiky produktivity práce, resp. srovnávání produktivity práce dvou systémů, vede nutně k zjednodušeným závěrům a k neřešitelným paradoxům, nebereme-li v úvahu meziodvětvovou podmíněnost. Tak například při dopravě nákladů by se na první pohled mohlo zdát, že musíme dát přednost železniční dopravě před silniční a leteckou. První způsob dopravy je totiž produktivnější v tom smyslu, že množství tkm připadajících v průměru na jednoho pracovníka je tu větší než u posledních dvou způsobů. To je však velmi zjednodušené konstatování a je v rozporu se skutečností, že poslední dva způsoby dopravy se vyvíjejí mnohem rychleji. Produktivitu práce v dopravě nesmíme ovšem zkoumat izolovaně. Mnohem větší pružnost a přizpůsobivost silniční a letecké dopravy potřebám ostatních odvětví i jejich větší rychlost znamenají často značné úspory společenské práce v jiných odvětvích, a tím i příspěvek k růstu společenské produktivity práce. A právě strukturální analýza se zde jeví vhodným nástrojem kvantitativního výzkumu.

To, co bylo řečeno o rozboru produktivity práce, je možno opakovat o mnoha jiných ekonomických ukazatelích (např. o rentabilitě, devizové výnosnosti aj.). O užitečnosti takových rozborů pro ekonomické rozhodování nemůže být sporu. Tak třeba při rozhodování o různých finančních, cenových, mzdových či sociálních opatřeních je nutno znát předem kvantitativní vliv těchto opatření ve všech odvětvích národního hospodářství. Představu o nich (i když ne úplně přesnou) může dát právě strukturální analýza.

Mnohem většího významu nabývá v současné době strukturální analýza jako nástroj národohospodářského plánování, a to jak u nás, tak i v kapitalistických státech. I když dosavadní meziodvětvové modely nejsou ještě adekvátními nástroji národohospodářského plánování, vnesly již mnoho světla do různých aspektů plánování, zejména do otázky konzistence plánu, sladěnosti jednotlivých odvětví apod. a v poslední době též do otázky cen.

Vzhledem k tomu, že se strukturální analýza vztahuje v první řadě k jevům makroekonomickým se silně agregovanými veličinami, nelze se při výkladu omezit jen na otázku konstrukce modelu a jeho rozboru, nýbrž je třeba zmínit se též aspoň v hlavních rysech o příslušné problematice statistické a ekonomické.

15.2 UZAVŘENÝ LINEÁRNÍ MODEL

Svůj výklad začneme se silně zjednodušeným modelem, zjednodušeným natolik, že nemůže sloužit reálným rozborům, může však posloužit jako úvod do metody strukturální analýzy. Nejdříve však vyložíme některé pojmy:

V dalším výkladu použijeme často slova systém jako souhrnného názvu pro ekonomii, jejíž strukturu zkoumáme. Systémem může být celé národní hospodářství, jeho složkami jsou pak jednotlivá odvětví, nebo jednotlivé oblasti, mezi nimiž neustále proudí výrobky a služby. Systémem může být i jednotlivý podnik, jeho složkami pak jednotlivé výroby nebo jednotlivé cechy. Systémem je také souhrn zemí sdružených v Radě vzájemné hospodářské pomoci; složkami tohoto systému jsou jednotlivé členské státy.

Jednotlivé složky systému, jejichž vzájemné vztahy zkoumáme, budeme obvykle nazývat odvětvími. Pojem odvětví zde tedy bude v každém případě širší, než je v ekonomii běžné. Tak například pokud jde o systém národního hospodářství, zahrneme mezi odvětví kromě běžných odvětví výroby a služeb také různé skupiny spotřebitelů, jako jsou domácnosti a veřejná správa, popřípadě i některé speciální činnosti, jako činnost investiční a tvorbu zásob.

Systém může být uzavřený nebo otevřený. Systém je uzavřený, jestliže výrobky a služby proudí jen uvnitř systému, mezi jednotlivými jeho odvětvími, tj. jestliže systém ani nedostává nic zvenčí, ani ven nic nedodává. V opačném případě jde o systém otevřený. Ve skutečnosti není žádný reálný systém úplně uzavřený. Tak např. systém národního hospodářství není uzavřený, neboť každý stát má hospodářské styky se zahraničím. Formálně však můžeme takový systém uzavřít tak, že připojujeme k systému jako další (vnitřní) odvětví zahraniční obchod, kam proudí z ostatních odvětví vývoz a odkud proudí do ostatních odvětví dovoz.

Otázka, zda danou realitu máme zkoumat pomocí uzavřeného či otevřeného modelu, závisí pochopitelně na povaze zkoumané reality. Závisí však také na tom, jaký model je ke studiu dané reality při současném stavu našich vědomostí o vzájemných závislostech jednotlivých odvětví systému vhodnější.

Předpokládejme nyní, že máme uzavřený systém skládající se z n odvětví. Každé z nich vyrábí jediný výrobek. Označme symbolem Q_i množství produkce (ve fyzických jednotkách), vyráběné i-tým odvětvím. Pokud považujeme domácnosti za odvětví, je jejich produktem pracovní síla. Část této produkce se může spotřebovat ve vlastním odvětví (vlastní spotřeba, zásoby), zbytek se dodává ostatním odvětvím. Označme q_{ij} množství i-tého produktu dodaného j-tému odvětví (resp. spotřebovaného j-tým odvětvím). Pak platí těchto n bilančních rovnic:

$$\begin{aligned} q_{11} + q_{12} + \dots + q_{1n} &= Q_1 \\ q_{21} + q_{22} + \dots + q_{2n} &= Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{n1} + q_{n2} + \dots + q_{nn} &= Q_n \end{aligned} \tag{15.1}$$

Dosaďme nyní v soustavě (15.1)

$$q_{ij} = a_{ij}Q_j, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{15.2}$$

takže celková spotřeba na výrobu j-tého odvětví (q_{ij}) bude vyjádřena jako součin z jednotkové spotřeby (a_{ij}) a z objemu produkce (Q_j). Konstanty a_{ij}, které znamenají množství produkce i-tého odvětví spotřebované na jednotku produkce j-tého odvětví, budeme dále nazývat technickými koeficienty (smysl tohoto názvu bude vysvětlen později). Technické koeficienty jsou, jak plyne z povahy věci, čísla nezáporná.

Po dosazení do 15.1 dostaneme

$$\begin{aligned} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1n}Q_n &= Q_1 \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2n}Q_n &= Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \dots + a_{nn}Q_n &= Q_n, \end{aligned}$$

nebo po úpravě

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})Q_1 - a_{12}Q_2 - \dots - a_{1n}Q_n &= 0 \\ -a_{21}Q_1 + (1 - a_{22})Q_2 - \dots - a_{2n}Q_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{n1}Q_1 - a_{n2}Q_2 - \dots + (1 - a_{nn})Q_n &= 0 \end{aligned} \tag{15.3}$$

Označíme-li matici technických koeficientů symbolem $\mathbf{A}$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix},$$

a vektor produkce $\mathbf{Q}$, tj. $\mathbf{Q}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]$, můžeme soustavu (15.3) psát stručně ve tvaru

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{15.4}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice n-tého řádu.

Produkují-li jednotlivá odvětví tolik, aby kryla spotřebu svou i ostatních odvětví, říkáme, že systém je v rovnováze.

Můžeme si nyní klást otázku, zda může při daných technických koeficientech existovat rovnováha a jaká musí být produkce jednotlivých odvětví, aby rovnováha nastala, tj. aby systém byl konzistentní, aby spotřeba všech odvětví byla kryta. Matematicky jde zřejmě o to určit, zda existuje vektor $\mathbf{Q}$, který splňuje rovnici (15.4). Přitom pochopitelně požadujeme, aby vektor $\mathbf{Q}$ byl nezáporný a aby neměl všechny souřadnice nulové.

Jinými slovy, úloha se redukuje na zjištění, zda soustava homogenních lineárních rovnic (15.3) má netriviální nezáporné řešení. To však závisí jedině na povaze matice $\mathbf{A}$. Celá úloha se tedy redukuje na zkoumání vlastností matic s nezápornými prvky. Nebudeme se tím dále zabývat, odkážeme jen na příslušnou literaturu (viz např. [82] aj.).

Zkoumejme ještě jednu otázku v souvislosti s uvedeným zjednodušeným systémem. Na výrobu j-tého výrobku se spotřebuje q_{1j} jednotek prvního výrobku, q_{2j} jednotek druhého výrobku atd. Dejme tomu, že cena jednotky tohoto j-tého výrobku je p_j. Je rozumné požadovat, aby náklady na výrobu j-tého výrobku nebyly větší než jeho cena (podmínka rentability), tj. aby

$$p_1q_{1j} + p_2q_{2j} + \dots + p_nq_{nj} \leqq p_jQ_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Dosadíme-li zde opět $q_{ij} = a_{ij}Q_j$, a krátíme-li na obou stranách nerovnosti kladným číslem Q_j, dostaneme tuto soustavu nerovností:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n &\leqq p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n &\leqq p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n &\leqq p_n, \end{aligned}$$

nebo po úpravě

$$\begin{array}{rrrr} (1 - a_{11})\,p_1 - & a_{21}p_2 & - \dots - & a_{n1}p_n \leqq 0 \\ - a_{12}p_1 & + (1 - a_{22})\,p_2 & - \dots - & a_{n2}p_n \leqq 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ - a_{1n}p_1 - & a_{2n}p_2 & - \dots + & (1 - a_{nn})p_n \leqq 0, \end{array} \tag{15.5}$$

nebo stručně

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \leqq \mathbf{0} \tag{15.5a}$$

Otázkou je, zda takové kladné ceny, které splňují podmínku rentability, vůbec existují a jaké to jsou ceny. Je zřejmé, že otázka se redukuje opět na řešení soustavy lineárních homogenních nerovností (15.5), resp. na zkoumání vlastností téže matice **A** jako u předchozí úlohy.

Existuje-li v takové soustavě konzistentní plán výroby, existuje také soustava cen, která splňuje podmínky rentability. Dá se navíc dokázat, že existuje-li soustava cen splňujících podmínku rentability, pak ceny splňují soustavu (15.5) jako rovnice, tj. pro jednotlivá odvětví pak platí

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{nj}p_n = p_j$$

Ekonomicky to znamená, že v uzavřeném lineárním systému (pokud je vůbec konzistentní) jsou zisky jednotlivých odvětví nulové (srovnej kap. 6).

Všimněme si dvou základních předpokladů, na nichž je budován uvedený model i jiné meziodvětvové modely. Jsou to:

a) bilanční vyváženost jednotlivých odvětví a

b) určitá hypotéza o tom, jaký je vztah mezi produkcí jednotlivých odvětví (jejich výstupem) a jejich spotřebou (jejich vstupem).

V daném případě se předpokládá, že se výrobní činitele spotřebovávají v pevném poměru (a že se tedy nepřipouští záměna jedněch činitelů za jiné).

15.3 OTEVŘENÝ STATICKÝ MODEL

Jednoduchý lineární model z předchozího odstavce je málo realistický. Je vhodný jedině pro ilustraci metod, jichž se dá použít při analýze struktury systému. Abychom se přiblížili více realitě, musíme předpoklady uvedeného modelu přizpůsobit aspoň ve dvou směrech:

a) V praxi je sotva možno definovat odvětví vyrábějící jediný výrobek; je třeba uvažovat vždy o odvětvích více či méně agregovaných.

b) Národní hospodářství tvoří sice uzavřenou soustavu vzájemně se podmiňujících částí (odvětví), nicméně je podstatný rozdíl mezi různými odvětvími. U části odvětví (u tzv. odvětví výrobních) je vzájemná závislost naprosto zřejmá a snadno přístupná pozorování. U jiných odvětví (zejména u odvětví konečné spotřeby, jakými jsou domácnosti, správa, popř. i investice a zásoby) je tato vzájemná závislost méně zřejmá, těžko přístupná pozorování, a hlavně víme o ní velmi málo.

Vezměme z první skupiny například odvětví válcoven. Je zřejmé, že výroba ve válcovnách závisí z jedné strany na výrobě odvětví dodávajících pro ně výrobní prostředky (doly, hutě, elektrárny, strojírny atd.), z druhé strany na výrobě odvětví spotřebovávajících jejich produkci (strojírny, ale též doly, hutě, elektrárny aj.). Mezi výrobou válcoven a výrobou uvedených odvětví existuje velmi těsná vzájemná závislost. O výrobě, resp. spotřebě válcoven nelze autonomně rozhodovat. Každé rozhodování o tomto odvětví musí být koordinováno s činností ostatních odvětví.

Vezměme z druhé strany takové odvětví, jako je správa. Správa jednak spotřebovává výrobky a služby různých odvětví (vstup), jednak poskytuje těmto odvětvím různé služby řídicí, ochranné aj. (je to produkce, resp. výstup odvětví správy). Mezi vstupem (tj. spotřebou) a výstupem (tj. poskytnutými službami) tohoto odvětví je souvislost zřejmě mnohem volnější než v předchozím případě. Zdá se, že aspoň v určitých mezích je možno o nich autonomně (tj. nezávisle na činnosti jiných odvětví) rozhodovat.

V otevřeném modelu se rozlišují z jedné strany odvětví, u nichž se předpokládá těsná vzájemná vazba. Sem patří různá odvětví průmyslu, zemědělství, stavebnictví, dopravy aj. (výrobní odvětví). Na druhé straně jsou tu tzv. odvětví autonomní; sem patří odvětví konečné spotřeby, jako domácnosti a správa, podle okolností též investice, zahraniční obchod, zásoby aj.

Výrobní odvětví, mezi nimiž proudí v určitých proporcích výrobky a služby, tvoří vzájemně spjatý systém, který však není uzavřený. Z jedné strany dostává zvenčí, tj. od autonomních odvětví, různé služby, jako pracovní síly (z domácností), správní služby, popř. též dovoz, kapacity (investice), zásoby. Z druhé strany poskytuje navenek část své produkce pro konečnou spotřebu domácností a správy a podle okolností též pro vývoz, investice a zásoby.

Výrobky a služby, které přijímá výrobní systém zvenčí, nazveme v dalším výkladu stručně primárními činiteli. Výrobky a služby, které tento systém dodává navenek, nazveme jeho finální produkcí. Mluví se také o exogenních tocích (a o příslušných exogenních proměnných); označují se tak toky výrobků a služeb jdoucích z výrobního systému k odvětvím konečné spotřeby. Na rozdíl od nich se toky výrobků a služeb, kolující uvnitř výrobního systému, nazývají toky endogenními.

Rozlišení mezi výrobními a autonomními odvětvími je do značné míry relativní a ponechává se určitá pružnost v zařazení některých odvětví, jako jsou zahraniční obchod, investiční činnost aj. V souvislosti s tím je také určitá libovůle ve vymezení pojmů „primární činitele" a „finální produkce". Ve skutečnosti vidíme v tomto směru u různých modelů různé úpravy, podle toho, jaké znalosti se předpokládají o vazbách určitého odvětví na jiná odvětví. Tato pružnost je prakticky účelná, dovoluje přizpůsobit model konkrétním potřebám rozboru i omezením, pokud jde o znalosti vzájemných vztahů mezi odvětvími. V tomto směru je otevřený model přiměřenějším nástrojem strukturální analýzy než model uzavřený.

Předpokládejme nyní konkrétněji, že jde o národní hospodářství skládající se z n výrobních odvětví, která jsou dosti stejnorodá, takže jejich produkci lze vyjádřit v týchž fyzických jednotkách. Označme jako dříve produkci i-tého odvětví Q_i a tu část produkce i-tého odvětví, která byla dodána j-tému odvětví (resp. spotřebována v j-tém odvětví), q_{ij}.

Označme konečně tu část produkce i-tého odvětví, která byla dodána autonomním odvětvím (tedy finální produkci i-tého odvětví) q_{i0}. Bilance produkce i-tého odvětví má pak tvar

$$Q_i = q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{in} + q_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (15.6)$$

Abychom nyní mohli přistoupit k analýze, musíme zavést určité předpoklady o vzájemné závislosti výrobní spotřeby a výroby. Nejjednodušší a v praxi nejužívanější je předpoklad, že spotřeba jednotlivých činitelů v daném odvětví je přímo úměrná produkci tohoto odvětví, tj.

$$q_{ij} = a_{ij}Q_j; \qquad (15.7)$$

a_{ij} jsou konstanty úměrnosti, které jsou určeny stavem techniky a technologií příslušných odvětví a nezávisí na momentech ekonomických, jako jsou velikost produkce, odbyt apod. Proto jsme je také nazvali technickými koeficienty.

Předpoklad o přímé úměrnosti výroby a výrobní spotřeby je velmi silný předpoklad; vrátíme se k němu ještě v čl. 15.11. Ve skutečnosti tento předpoklad zcela přesně neplatí, platí však velmi přibližně u značné části odvětví (např. u většiny odvětví průmyslových), a to v dosti širokých mezích. V praktických úvahách o plánování výroby (ať už se to děje jakoukoli metodou) se tento předpoklad obvykle mlčky přijímá a je základem normování výrobní spotřeby. Technické koeficienty jsou vlastně zobecněním spotřebních norem, jsou jakýmisi agregovanými normami spotřeby.

Přijmeme-li předpoklad přímé úměrnosti a dosadíme-li (15.7) do bilančních rovnic (15.6), dostaneme soustavu rovnic, jimiž jsou navzájem vázány celková produkce a finální produkce jednotlivých odvětví:

$$\begin{array}{l}
a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \ldots + a_{1n}Q_n + q_{10} = Q_1 \\
a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \ldots + a_{2n}Q_n + q_{20} = Q_2 \\
\dotfill \\
a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \ldots + a_{nn}Q_n + q_{n0} = Q_n
\end{array}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\begin{array}{rcrcl}
(1 - a_{11})\,Q_1 & - & a_{12}\;Q_2 - \ldots - & a_{1n}Q_n & = q_{10} \\
-a_{21}\;Q_1 & + & (1 - a_{22})\,Q_2 - \ldots - & a_{2n}Q_n & = q_{20} \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \\
-a_{n1}\;Q_1 & - & a_{n2}\;Q_2 - \ldots + & (1 - a_{nn})\,Q_n & = q_{n0},
\end{array} \qquad (15.8)$$

nebo stručně

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{Q} = \mathbf{q}_0 \qquad (15.8a)$$

Model, který představuje tato soustava, je otevřený ve smyslu vyloženém výše. Je kromě toho statický v tom smyslu, že vyjadřuje konstantní, neměnící se tok. Nebere vůbec v úvahu faktor času.

Soustava (15.8) obsahuje $2n$ proměnných. Protože v obecném případě, tj. v případě, kdy matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ je regulární, je soustavou n rovnic n proměnných určeno, má uvedená soustava n stupňů volnosti. To znamená, že n z $2n$ proměnných složek celkové a finální produkce můžeme autonomně volit, zbývající jsou pak určeny.

Otázka počtu stupňů volnosti je velmi důležitá při ekonomickém rozhodování. Velmi často se totiž v praxi stává, že soustava je přeurčena, tj. že se autonomně určuje více proměnných, než činí počet stupňů volnosti. Tím se obvykle narušuje bilanční rovnováha a výsledkem jsou nekonzistentní plány.

Je třeba poznamenat, že uvedený počet stupňů volnosti je relativní, vztahuje se k danému modelu, v němž jsme některé závislosti zanedbali. Ve skutečnosti předpokládáme existenci určitých vztahů mezi vstupem a výstupem odvětví, která jsme zahrnuli meziautonomní. Kdybychom tyto vztahy zahrnuli rovněž do modelu, počet stupňů volnosti by poklesl.

Z druhé strany jsme všechna autonomní odvětví shrnuli do jednoho. Podrobnějším členěním autonomního sektoru by počet stupňů volnosti soustavy zase stoupl.

Dosud jsme ve svých úvahách předpokládali, že produkci měříme ve fyzických jednotkách. U makroekonomických modelů je však možnost použití fyzických jednotek produkce omezená. Používáme zde obvykle peněžního vyjádření jako náhražky vyjádření fyzického. Pokud ovšem má model sloužit po několik období, je nutno použít ocenění ve stálých cenách.

Zavedením peněžního vyjádření se číselná hodnota technických koeficientů ovšem mění.

Označme vektor celkové produkce v peněžním vyjádření

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

a vektor finální produkce

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

Označme dále symbolem x_{ij} množství produkce i-tého odvětví v peněžním vyjádření, dodaného j-tému odvětví.

Bilanční rovnice (15.6) nabudou pak tvaru

$$X_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (15.9)$$

Za předpokladu, že výrobní spotřeba odvětví je přímo úměrná jeho produkci, máme opět

$$x_{ij} = a'_{ij} X_j \qquad (15.10)$$

Dosadíme-li tyto vztahy do bilančních rovnic (15.9), dostaneme po jednoduché úpravě soustavu rovnic analogickou soustavě (15.8), ovšem v peněžním vyjádření:

$$\begin{array}{l} (1 - a'_{11})X_1 - a'_{12} X_2 - \ldots - a'_{1n} X_n = y_1 \\ -a'_{21} X_1 + (1 - a'_{22})X_2 - \ldots - a'_{2n} X_n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a'_{n1} X_1 - a'_{n2} X_2 - \ldots + (1 - a'_{nn})X_n = y_n \end{array} \qquad (15.11)$$

nebo stručně

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}')\mathbf{X} = \mathbf{y}$$

Konstanty a'_{ij} mají, pokud používáme k ocenění stálých cen, opět povahu technických koeficientů. Jde jenom o změnu měrných jednotek. Abychom určili souvislost mezi koeficienty a_{ij} a a'_{ij}, označme symbolem p_i průměrnou cenu jednotky produkce i-tého odvětví. Platí tedy

$$X_j = p_j Q_j, \qquad x_{ij} = p_i q_{ij}$$

Ze vztahu (15.10) plyne

$$a'_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

a tedy také

$$a'_{ij} = \frac{p_i}{p_j} \cdot \frac{q_{ij}}{Q_j},$$

což je podle (15.7)

$$a'_{ij} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij}$$

Nový technický koeficient a'_{ij} se tedy liší od původního pouze o multiplikativní konstantu vyjadřující poměr ceny jednotky produkce i-tého odvětví k ceně jednotky produkce j-tého odvětví.

V dalším textu použijeme vesměs peněžního vyjádření, pokud nebude výslovně uvedeno jinak. Vynecháme proto v dalším výkladu k zjednodušení symboliky čárky u technických koeficientů a'_{ij} a označíme je i v případě peněžního vyjádření prostě a_{ij}. Nebude-li tedy výslovně uvedeno jinak, bude koeficient a_{ij} znamenat množství produkce i-tého odvětví, obsažené v produkci j-tého odvětví v ceně 1 Kčs (nebo jiné peněžní jednotky). Součet těchto koeficientů pro určité j, tj. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, znamená tedy, až na menší odchylky vyplývající z pružnosti v definici výrobních a autonomních odvětví, hodnotu materiálových nákladů na 1 Kčs produkce j-tého odvětví. Protože je nemyslitelné, aby materiálové náklady byly větší než cena produktu, máme na mysli cenu pořizovací, musíme předpokládat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqq 1 \qquad (15.12)$$

Dříve než přejdeme k rozboru modelu a k zjišťování možností jeho použití, zkoumejme jak lze model naplnit, tj. jak určit konstanty modelu, a prodiskutujme běžně jeho oprávněnost. Předpokládáme přitom, že jde konkrétně o modelování meziodvětvových vztahů v národním hospodářství. Možnosti aplikace v jiných oblastech budou uvedeny až v závěru této kapitoly.

15.4 ŠACHOVNICOVÁ BILANCE MEZIODVĚTVOVÝCH VZTAHŮ

Otevřený model předchozího odstavce obsahuje n^2 konstant a_{ij}, tj. technických koeficientů. V podstatě ovšem bude větší či menší část těchto konstant nulových, což je zřejmé, neboť ne každé odvětví spotřebovává přímo výrobky všech ostatních odvětví. Jak velký bude podíl nulových prvků v matici technických koeficientů, to závisí mj. na hloubce odvětvového třídění, tj. na velikosti čísla n. Čím větší n, tím větší bude podíl nulových a_{ij}.

Technické koeficienty jsou, jak jsme uvedli, zobecněnými normami spotřeby. V zásadě je možno určit je dvěma způsoby, a to technologickými propočty a ze statistických údajů. Prvního způsobu lze použít spíše při aplikacích podnikových. Při aplikacích makroekonomických se silně agregovanými údaji je možnost použití technologických propočtů silně omezena a při určení technických koeficientů jsme odkázáni na statistiku. Údaje potřebné k výpočtu technických koeficientů se sestavují do tzv. šachovnicových tabulek. Sestavení těchto tabulek je sice dosti různorodé (podle možností i podle konkrétních požadavků rozboru), jejich podstata je však stejná. Každá řádka tabulky obsahuje bilanci produkce jednoho odvětví, tj. výstup toho odvětví a jeho rozdělení podle odvětví spotřebitelů. Každý sloupec obsahuje spotřebu jednoho odvětví v členění podle odvětvového původu, tedy vstup a jeho rozdělení podle dodavatelských odvětví (tab. 15.1). Skutečné šachovnicové tabulky, sestavované v hojném počtu od počátku padesátých let, jsou podrobnější, pokud jde o autonomní odvětví. V těchto tabulkách jsou podrobněji tříděny finální produkce (vektor **y**) podle jednotlivých autonomních odvětví (domácnosti, správa, popř. též vývoz, investice atd.) i primární činitele. Bývají v nich někdy uvedeny i přímé dodávky primárních činitelů autonomním odvětvím (např. dodávky z dovozu pro konečnou spotřebu atd.). V takové tabulce se obvykle rozlišují čtyři kvadranty:

Tabulka 15.1

		Spotřebitelská odvětví					Produkce celkem
		1	2	…	n	autonomní	
Dodavatelská odvětví	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	X_2
	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	X_n
Primární činitele		x_{e1}	x_{e2}	…	x_{en}		
Celkem		X_1	X_2	…	X_n		

První kvadrant (zpravidla čtvercový) obsahuje endogenní toky mezi výrobními odvětvími. V naší tabulce je to prvních n řádků a sloupců.

Druhý kvadrant obsahuje dodávky výrobních odvětví odvětvím autonomním, tj. rozdělení finální produkce. V naší tabulce je to n řádků ($n + 1$)-ho sloupce.

Třetí kvadrant obsahuje dodávky primárních činitelů výrobním odvětvím. V naší tabulce je to prvních n položek ($n + 1$)-ní řádky.

Konečně čtvrtý kvadrant obsahuje přímé dodávky primárních činitelů autonomním odvětvím. V naší tabulce není uveden.

Schematicky vypadá tabulka takto:

	Odvětví	
	výrobní	autonomní
Výrobní odvětví	I	II
Primární činitele	III	IV

V případě, že n výrobních odvětví reprezentuje přesně sféru hmotné výroby, znamená souhrn jejich finálních produkcí (tj. Σy_i) v podstatě čistý společenský produkt a souhrn primárních činitelů (tj. Σx_{ej}) znamená národní důchod.*) Jelikož součet sloupce dává podobně jako součet řádky produkci příslušného odvětví, platí zřejmě

$$\sum_i y_i = \sum_j x_{ej}$$

Je to známá rovnost čistého společenského produktu a národního důchodu.

Sestavení takových tabulek představuje velmi složitou a rozsáhlou operaci statistickou. První pokusy o sestavení těchto tabulek narazily právě na značné mezery v ekonomické statistice a daly impuls k jejímu zdokonalování, a to jak pokud jde o rozsah zjišťovaných údajů, tak i pokud jde o jejich strukturu. V současné době se sestavují tabulky meziodvětvových vztahů ve všech hospodářsky vyspělých i v mnoha vývojových státech.**)

Tabulka 15.1 obsahuje všechny údaje potřebné pro výpočet technických koeficientů. Je však zřejmé, že číselná hodnota koeficientů i jejich stabilita (což je základním postulátem modelu) závisí do značné míry na metodice sestavení tabulek. Jde zejména o dvě základní otázky, které navzájem souvisí a jejichž řešení silně ovlivňuje výpočet technických koeficientů. Jsou to:

1. vymezení ukazatelů produkce a
2. klasifikace odvětví a jejich agregace.

K oběma otázkám se ještě vrátíme (viz čl. 15.13 až 15.15). Zde jenom připomeneme, v čem spočívá problém.

Pokud jde o vymezení produkce, je možno postupovat zásadně dvěma různými cestami. Je možno ocenit jednotlivé výrobky a služby a sečíst je. Stručně můžeme tuto metodu označit jako metodu výrobkovou. Druhá možnost je ocenit výstup jednotlivých buněk organizačních (závod, podnik atd.) nebo kvaziorganizačních

---

*) Nejde o přesné vystižení těchto veličin, neboť nepřihlížíme k opotřebení základních fondů.

**) Rozsah těchto tabulek je různý, od několika desítek do několika set odvětví. Také metodika jejich sestavení se liší (viz [19]).

(odvětví) a sečíst je. Tuto druhou metodu můžeme označit jako podnikovou (závodovou, odvětvovou).

Důsledné uplatnění kterékoli z těchto metod naráží na značné potíže a v praxi se nepoužívá jednotné metody.*)

Je však zřejmé, že obě metody a jejich jednotlivé obměny mohou dát i při stejném ocenění podstatně odlišné číselné hodnoty produkce, a tím i odlišné technické koeficienty. Kdybychom např. počítali produkci důsledně odvětvovou metodou, odpadla by vlastní spotřeba odvětví (ta by nefigurovala ani na straně vstupu, ani na straně výstupu) a diagonální koeficienty a_{ii} (tj. koeficienty s oběma indexy stejnými) by se vesměs rovnaly nule.

Pokud jde o klasifikaci a agregaci, je jasné, že na způsobu jejich provedení závisí celá struktura meziodvětvových toků. Tato otázka si tedy zasluhuje zvláštní pozornosti. Jde v podstatě o kritéria klasifikace, o hloubku třídění, resp. o způsoby sdružování jednotlivých výrob do odvětví (agregace). Jak ještě ukážeme dále, je technický koeficient vypočtený z agregovaných údajů průměrem z dílčích koeficientů, a závisí tedy na složení odvětví.

Konečně je třeba říci, že se šachovnicové tabulky sestavují jednorázově, obvykle z ročních údajů. Při konstrukci meziodvětvového modelu se dále nebere většinou v úvahu stochastická povaha údajů. To by vyžadovalo několik sérií údajů (několik výběrů). Při současném stavu ekonomické statistiky by to činilo určité potíže. Roční období, v němž se základní statistické údaje zjišťují, je totiž poměrně dlouhé a v údajích za řadu let by bylo těžko rozlišovat variabilitu znaku, jíž je nutno připsat náhodám; jsou to např. variability vyvolané určitým vývojem, změny struktury apod.

Již podle těchto předběžných poznámek je zřejmé, že výsledky, které lze získat řešením modelu, tj. řešením příslušné soustavy rovnic, nelze akceptovat bez výhrad a je třeba podrobit je dalšímu rozboru co do hranic chyb, které mohou obsahovat.

15.5 ROVNICE VĚCNÉ A HODNOTOVÉ

Přes nedostatky, o nichž jsme se stručně zmínili, je otevřený statický model užitečným nástrojem ekonomického rozboru i plánování. Dříve než přejdeme k některým aplikacím, všimněme si, že z tab. 15.1 lze odvodit za předpokladu platnosti (15.10) dvě soustavy rovnic:

a) Soustavu bilančních rovnic (15.11), svazujících celkovou produkci jednotlivých odvětví s jejich finální produkcí. Tato soustava rovnic vyjadřuje věcné vztahy mezi odvětvími. Vyjadřuje vlastně rozdělení produkce jednotlivých odvětví. Stručně je někdy nazveme rovnicemi řádkovými, neboť každá řádka tab. 15.1 představuje jednu takovou rovnici.

---

*) Podrobněji o této otázce např.: Kolektiv autorů: Ekonomická statistika. Praha, SNTL 1963.

b) Soustavu rovnic vyjadřujících rovnost vstupu a výstupu jednotlivých odvětví. Každý sloupec tabulky představuje takovou rovnici (rovnice sloupcové). Platí totiž

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj} + x_{ej} = X_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (15.13)$$

Tato rovnice v podstatě vyjadřuje, že hodnota produkce j-tého odvětví (X_j) se skládá z hodnoty materiálových nákladů tohoto odvětví ($\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$) a z hodnoty přidané zpracováním (x_{ej}), což je zhruba hodnota vyrobená v daném odvětví.

Označíme-li cenu jednotky produkce i-tého odvětví p_i, pak v důsledku vztahu

$$X_j = p_j Q_j, \quad x_{ij} = p_i q_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

lze rovnici (15.13) psát ve tvaru

$$p_1 q_{1j} + p_2 q_{2j} + \dots + p_n q_{nj} + x_{ej} = p_j Q_j$$

Dosadíme-li dále

$$q_{ij} = a_{ij} Q_j,$$

dostaneme po úpravě

$$Q_j[-p_1 a_{1j} - p_2 a_{2j} - \dots + p_j(1 - a_{jj}) - \dots - p_n a_{nj}] = x_{ej} \qquad (15.13a)$$

Zde a_{ij} je technický koeficient věcný, tj. vyjadřuje fyzické množství produkce i-tého odvětví, obsažené v jedné jednotce (fyzické) produkce j-tého odvětví. Proměnná x_{ej} znamená, jak jsme uvedli, hodnotu přidanou zpracováním v j-tém odvětví. Označíme-li symbolem π_j hodnotu přidanou zpracováním, připadající na fyzickou jednotku produkce j-tého odvětví, tj. dosadíme-li

$$x_{ej} = \pi_j Q_j,$$

dostaneme po krácení tuto soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl}
(1 - a_{11})p_1 - a_{21} p_2 - \dots - a_{n1} p_n & = & \pi_1 \\
- a_{12} p_1 + (1 - a_{22})p_2 - \dots - a_{n2} p_n & = & \pi_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
- a_{1n} p_1 - a_{2n} p_2 - \dots + (1 - a_{nn})p_n & = & \pi_n,
\end{array} \qquad (15.14)$$

nebo stručně v maticovém tvaru

$$\mathbf{p}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \boldsymbol{\pi}^T \qquad (15.14a)$$

Přitom $\mathbf{p}^T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ je vektor cen,

$$\boldsymbol{\pi}^T = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$$

nazveme stručně vektorem hodnoty přidané zpracováním.

Soustava rovnic (15.14) je v otevřeném modelu nezávislá na soustavě (15.11). Vyjadřuje vztah mezi cenami a hodnotou přidanou zpracováním. Soustava (15.14) má opět n stupňů volnosti; je-li dáno kterýchkoli n z $2n$ proměnných p_i a π_i, lze ostatní určit řešením soustavy (15.14).

Otevřený statický model je tedy popsán dvěma nezávislými soustavami rovnic (15.11) a (15.14). Model je možno uzavřít tím, že se dodatečně zavádějí poptávkové funkce vyjadřující závislost poptávky (resp. spotřeby) na důchodech.

Pokud jsou technické koeficienty vypočteny na podkladě peněžních ukazatelů produkce ve stálých cenách, znamenají p_i v soustavě (15.14) cenové indexy svého druhu, tj. poměr běžných cen ke stálým cenám.

15.6 TECHNICKÉ KOEFICIENTY A KOEFICIENTY ÚPLNÝCH NÁKLADŮ

Soustava rovnic (15.11) dává bezprostředně odpověď na otázku, jaká je finální produkce při dané celkové produkci jednotlivých odvětví, tj. dává v podstatě odpověď na otázku, kolik může společnost konzumovat při dané úrovni celkové produkce. Pro plánování je však zajímavější opačná otázka, tj. jaká úroveň celkové produkce zajišťuje potřebnou úroveň finální produkce, tj. potřebnou úroveň spotřeby a akumulace. Odpověď na tuto otázku dostaneme řešením soustavy rovnic (15.11) podle proměnných X_i. Tato soustava je jednoznačně řešitelná tehdy, a jen tehdy, je-li matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ regulární. Jestliže je $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ regulární, má řešení ekonomický smysl jen při $X_i \geqq 0$. Protože řešení dostaneme inverzí matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, bude mít ekonomický smysl, bude-li ovšem inverzní matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ nezáporná. Otázka existence výrobního plánu konzistentního s danými finálními požadavky se tedy opět redukuje na zkoumání vlastností matice technických koeficientů. Připomeňme, že jde o matici s nezápornými prvky, pro niž platí, že součet prvků kteréhokoli sloupce není větší než jednotka (viz (15.12)). Pro takové matice (leontěvovského typu) se dokazuje, že $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ je regulární a matice k ní inverzní, tj. $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ je nezáporná. Vlastnosti matice leontěvovského typu jsou souhrnně vyloženy např. ve sborníku [82].

Vyhovuje-li matice $\mathbf{A}$ uvedeným požadavkům, pak je možno inverzí matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ určit výrobní plán konzistentní s jakýmikoli konečnými požadavky:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{y} \qquad (15.15)$$

Poznámka: Existence řešení ovšem neznamená, že takový plán je realizovatelný. Realizace řešení závisí na tom, zda máme dostatek primárních činitelů (pracovních sil, popř. kapacit aj.), tj. činitelů, které jsou v daném modelu exogenní.

Všimněme si nejdříve smyslu tohoto řešení. Označme za tím účelem obecný prvek matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ symbolem A_{ij}. Maticovou rovnici (15.15) lze pak rozepsat do této soustavy:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \ldots + A_{1n}y_n \\ X_2 &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \ldots + A_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \ldots + A_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (15.16)$$

V této soustavě je produkce jednotlivých odvětví vyjádřena jako lineární funkce finální produkce (resp. finální spotřeby).

Abychom určili smysl koeficientů A_{ij}, připomeňme si nejdříve znovu význam technických koeficientů. Uvedli jsme již, že to jsou zobecněné normy spotřeby. Koeficient a_{ij} znamená to množství produkce i-tého odvětví, které se spotřebuje bezprostředně na jednotku produkce j-tého odvětví. Tak např. se v tepelných elektrárnách spotřebuje průměrně 0,4 kg měrného paliva na 1 kWh elektřiny. Jestliže i-té odvětví je uhelný průmysl a j-té odvětví energetika, pak $a_{ij} = 0{,}4$ kg/kWh (v peněžním vyjádření bude hodnota koeficientu ovšem jiná).

Vycházíme-li při plánování výroby z požadavků na konečnou spotřebu (a tak by to bylo správné), pak ovšem na každou kWh (určenou pro konečnou spotřebu) bude třeba více paliva než uvedených 0,4 kg. Kromě přímé spotřeby existuje totiž celý řetěz vyvolaných spotřeb, které mají konec konců zpětný reflex i na výrobu energie. Tak např. při výrobě uhlí potřebného na výrobu energie se spotřebuje též řada výrobních prostředků, mj. též energie. K jejich výrobě se může spotřebovat opět uhlí i energie. Řetěz těchto vyvolaných potřeb je v důsledku existence zpětných vazeb v mnoha případech nekonečný (ovšem konvergující). Výpočet těchto vyvolaných potřeb postupnou aproximací je zpravidla velmi pracný. A právě na tuto otázku dává soustava (15.16) přímou odpověď. Koeficient A_{ij} totiž znamená množství produkce i-tého odvětví potřebného na výrobu jedné jednotky finální produkce j-tého odvětví. Abychom se o tom přesvědčili, stačí vypočíst parciální derivaci

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_j} = A_{ij}$$

Je zřejmé, že koeficient A_{ij} má rovněž povahu technického koeficientu, tj. jeho číselná hodnota je určena daným stavem techniky a technologie a nezávisí na ekonomických momentech, jako například na rozsahu výroby. Koeficienty A_{ij} se nazývají obvykle koeficienty úplných materiálových nákladů.

Pro plánovací praxi má výpočet těchto koeficientů, přes zjednodušené předpoklady modelu, nesmírný význam. Umožňuje při nejmenším rychlou předběžnou orientaci o realizovatelnosti různých variant plánů finální produkce.

Uvedeme ilustrativní příklad v tab. 15.2, kde jsou uvedeny meziodvětvové proudy devítisektorového hospodářství. Je to konkretizace tab. 15.1. Z tabulky můžeme snadno odvodit technické koeficienty tak, že prvky v jednotlivých sloupcích tabulky dělíme produkcí odvětví, jehož výrobní spotřeba je v daném sloupci uvedena. Dostaneme tuto matici technických koeficientů na str. 511 a 512.

ŠACHOVNICOVÁ BILANCE MEZIODVĚTVOVÝCH VZTAHŮ (V MIL. KČS)

Tabulka 15.2

Č.	Odvětví	Výrobní spotřeba v odvětví č.									Finální produkce	Z toho vývoz	Produkce celkem
		1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1.	Paliva	105	90	120	60	100	50	60	60	40	265	40	950
2.	Energetika	20	30	50	100	100	100	30	20	50	100	10	600
3.	Hutě	50	120	900	40	400	230	—	—	—	160	20	1 900
4.	Chemie	50	—	100	550	—	150	100	150	200	200	100	1 500
5.	Strojírenství	50	50	20	30	1 500	100	—	—	50	2 900	1 200	4 700
6.	Stavebnictví	50	—	—	—	—	650	—	—	—	3 400	—	4 100
7.	Spotřební průmysl	—	—	—	200	—	200	550	150	100	1 100	200	2 300
8.	Potravinářský průmysl	—	—	—	—	40	—	60	100	100	1 900	300	2 200
9.	Zemědělství	—	—	—	—	—	—	900	1 400	1 896	104	—	4 300
Primární činitele		625	310	710	520	2 560	2 620	600	320	1 864			
z toho práce		400	80	350	250	1 200	2 000	300	180	1 660			
dovoz		—	—	200	150	400	200	200	100	100			
Produkce celkem		950	600	1 900	1 500	4 700	4 100	2 300	2 200	4 300			22 550

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}110\,5 & 0{,}150\,0 & 0{,}063\,1 & 0{,}040\,0 & 0{,}021\,3 & 0{,}012\,2 & 0{,}026\,1 & 0{,}027\,3 & 0{,}009\,3 \\ 0{,}021\,0 & 0{,}050\,0 & 0{,}026\,3 & 0{,}066\,7 & 0{,}021\,3 & 0{,}024\,4 & 0{,}013\,0 & 0{,}009\,1 & 0{,}011\,6 \\ 0{,}052\,6 & 0{,}200\,0 & 0{,}473\,7 & 0{,}026\,7 & 0{,}085\,1 & 0{,}056\,1 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 \\ 0{,}052\,6 & 0{,}000\,0 & 0{,}052\,6 & 0{,}366\,7 & 0{,}000\,0 & 0{,}036\,6 & 0{,}043\,5 & 0{,}068\,2 & 0{,}046\,5 \\ 0{,}052\,6 & 0{,}083\,3 & 0{,}010\,5 & 0{,}020\,0 & 0{,}319\,1 & 0{,}024\,4 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 \\ 0{,}052\,6 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}158\,5 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 \\ 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}133\,3 & 0{,}000\,0 & 0{,}048\,8 & 0{,}239\,1 & 0{,}068\,2 & 0{,}023\,3 \\ 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}008\,5 & 0{,}000\,0 & 0{,}026\,1 & 0{,}045\,5 & 0{,}023\,3 \\ 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}000\,0 & 0{,}391\,3 & 0{,}636\,4 & 0{,}440\,9 \end{bmatrix}$$

resp.

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}889\,5 & -0{,}150\,0 & -0{,}063\,1 & -0{,}040\,0 & -0{,}021\,3 & -0{,}012\,2 & -0{,}026\,1 & -0{,}027\,3 & -0{,}009\,3 \\ -0{,}021\,0 & 0{,}950\,0 & -0{,}026\,3 & -0{,}066\,7 & -0{,}021\,3 & -0{,}024\,4 & -0{,}013\,0 & -0{,}009\,1 & -0{,}011\,6 \\ -0{,}052\,6 & -0{,}200\,0 & 0{,}526\,3 & -0{,}026\,7 & -0{,}085\,1 & -0{,}056\,1 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 \\ -0{,}052\,6 & -0{,}000\,0 & -0{,}052\,6 & 0{,}633\,3 & -0{,}000\,0 & -0{,}036\,6 & -0{,}043\,5 & -0{,}068\,2 & -0{,}046\,5 \\ -0{,}052\,6 & -0{,}083\,3 & -0{,}010\,5 & -0{,}020\,0 & 0{,}680\,9 & -0{,}024\,4 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 \\ -0{,}052\,6 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & 0{,}841\,5 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 \\ -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}133\,3 & -0{,}000\,0 & -0{,}048\,8 & 0{,}760\,9 & -0{,}068\,2 & -0{,}023\,3 \\ -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}008\,5 & -0{,}000\,0 & -0{,}026\,1 & 0{,}954\,5 & -0{,}023\,3 \\ -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}000\,0 & -0{,}391\,3 & -0{,}636\,4 & 0{,}559\,1 \end{bmatrix}$$

Můžeme tedy vztahy mezi celkovou a finální produkcí jednotlivých odvětví popsat touto soustavou rovnic:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
+0,889\,5X_1 & -0,150\,0X_2 & -0,063\,1X_3 & -0,040\,0X_4 & -0,021\,3X_5 & -0,012\,2X_6 & -0,026\,1X_7 & -0,027\,3X_8 & -0,009\,3X_9 & = y_1 \\
-0,021\,0X_1 & +0,950\,0X_2 & -0,026\,3X_3 & -0,066\,7X_4 & -0,021\,3X_5 & -0,024\,4X_6 & -0,013\,0X_7 & -0,009\,1X_8 & -0,011\,6X_9 & = y_2 \\
-0,052\,6X_1 & -0,200\,0X_2 & +0,526\,3X_3 & -0,026\,7X_4 & -0,085\,1X_5 & -0,056\,1X_6 & -0,000\,0X_7 & -0,000\,0X_8 & -0,000\,0X_9 & = y_3 \\
-0,052\,6X_1 & -0,000\,0X_2 & -0,052\,6X_3 & +0,633\,3X_4 & -0,000\,0X_5 & -0,036\,6X_6 & -0,043\,5X_7 & -0,068\,2X_8 & -0,046\,5X_9 & = y_4 \\
-0,052\,6X_1 & -0,083\,3X_2 & -0,010\,5X_3 & -0,020\,0X_4 & +0,680\,9X_5 & -0,024\,4X_6 & -0,000\,0X_7 & -0,000\,0X_8 & -0,011\,6X_9 & = y_5 \\
-0,052\,6X_1 & -0,000\,0X_2 & -0,000\,0X_3 & -0,000\,0X_4 & -0,000\,0X_5 & +0,841\,5X_6 & -0,000\,0X_7 & -0,000\,0X_8 & -0,000\,0X_9 & = y_6 \\
-0,000\,0X_1 & -0,000\,0X_2 & -0,000\,0X_3 & -0,133\,3X_4 & -0,000\,0X_5 & -0,048\,8X_6 & +0,760\,9X_7 & -0,068\,2X_8 & -0,023\,3X_9 & = y_7 \\
-0,000\,0X_1 & -0,000\,0X_2 & -0,000\,0X_3 & -0,000\,0X_4 & -0,008\,5X_5 & -0,000\,0X_6 & -0,026\,1X_7 & +0,954\,5X_8 & -0,023\,3X_9 & = y_8 \\
-0,000\,0X_1 & -0,000\,0X_2 & -0,000\,0X_3 & -0,000\,0X_4 & -0,000\,0X_5 & -0,000\,0X_6 & -0,319\,3X_7 & -0,636\,4X_8 & +0,559\,1X_9 & = y_9
\end{array}
\tag{15.17a}
$$

Inverzí matice (**I** – **A**) dostaneme matici koeficientů úplných materiálových nákladů:

$$
(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}
1,152\,6 & 0,221\,9 & 0,162\,7 & 0,120\,7 & 0,064\,1 & 0,045\,3 & 0,074\,3 & 0,078\,7 & 0,041\,5 \\
0,043\,0 & 1,078\,6 & 0,073\,1 & 0,130\,9 & 0,044\,7 & 0,046\,5 & 0,049\,2 & 0,050\,3 & 0,039\,1 \\
0,162\,0 & 0,462\,1 & 1,963\,0 & 0,158\,6 & 0,265\,3 & 0,163\,1 & 0,041\,8 & 0,046\,4 & 0,034\,9 \\
0,117\,6 & 0,099\,5 & 0,181\,6 & 1,640\,9 & 0,031\,8 & 0,098\,4 & 0,288\,1 & 0,239\,9 & 0,158\,4 \\
0,103\,1 & 0,158\,6 & 0,057\,8 & 0,080\,1 & 1,484\,6 & 0,058\,1 & 0,035\,7 & 0,043\,2 & 0,045\,9 \\
0,072\,7 & 0,013\,8 & 0,010\,1 & 0,007\,4 & 0,004\,0 & 1,191\,2 & 0,004\,7 & 0,004\,8 & 0,002\,6 \\
0,026\,5 & 0,021\,9 & 0,033\,5 & 0,296\,1 & 0,007\,7 & 0,096\,1 & 1,384\,9 & 0,181\,1 & 0,090\,6 \\
0,006\,9 & 0,002\,0 & 0,002\,1 & 0,014\,3 & 0,013\,8 & 0,004\,9 & 0,063\,7 & 1,036\,3 & 0,049\,4 \\
0,020\,6 & 0,020\,5 & 0,026\,1 & 0,223\,5 & 0,021\,2 & 0,072\,9 & 1,041\,8 & 1,362\,6 & 1,908\,4
\end{bmatrix}
$$

Sám výpočet těchto koeficientů je velmi instruktivní. Vezměme např. energetiku. Podle technických koeficientů vidíme, že na výrobu jednotky energie (energie v hodnotě 1 Kčs) se spotřebuje bezprostředně 0,150 0 jednotek paliv, 0,050 0 jednotek energie, 0,200 0 jednotek hutních výrobků a 0,083 3 jednotek strojírenských výrobků. Z výrobků ostatních odvětví se v energetice nespotřebuje bezprostředně nic (resp. spotřebují se jen zanedbatelná množství). Jde ovšem o bezprostřední spotřebu, kterou vyjadřujeme běžně technickými normami. Bereme-li však v úvahu i vyvolané potřeby, je obraz zcela jiný, jak vidíme v druhém sloupci matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Markantní rozdíl je hned ve spotřebě paliv. Zatímco se bezprostředně na jednotku energie spotřebuje 0,15 jednotek paliv, celková potřeba paliv na výrobu jednotky energie pro konečnou spotřebu činí už 0,221 9. To je snadno pochopitelné, vždyť všechna odvětví, která dodávají energetice výrobní prostředky, jsou také spotřebiteli paliv.

Poněkud složitější je závislost energetiky na zemědělství. Vidíme totiž, že na výrobu jednotky energie pro konečnou spotřebu je třeba rovněž 0,020 5 jednotek zemědělských produktů, ačkoli se v energetice zemědělské produkty podle tab. 15.2 vůbec nespotřebovávají. Jde zde jenom o zprostředkovanou spotřebu. Uveďme aspoň jeden řetěz zprostředkovávající závislost energetiky na zemědělství. Podle tab. 15.2 spotřebuje energetika hutní výrobky, hutě zase spotřebují chemické výrobky, chemie výrobky spotřebního průmyslu a spotřební průmysl spotřebuje též zemědělské produkty.

Je-li matice (**I** – **A**) invertována, pak lze celkovou produkci vyjádřit jako funkci finální produkce touto soustavou rovnic:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 1,152\,6y_1 + 0,221\,9y_2 + 0,162\,7y_3 + 0,120\,7y_4 + 0,064\,1y_5 + \\
&\quad + 0,045\,3y_6 + 0,074\,3y_7 + 0,078\,7y_8 + 0,041\,5y_9 \\
X_2 &= 0,043\,0y_1 + 1,078\,6y_2 + 0,073\,1y_3 + 0,130\,9y_4 + 0,044\,7y_5 + \\
&\quad + 0,046\,5y_6 + 0,049\,2y_7 + 0,050\,3y_8 + 0,039\,1y_9 \\
X_3 &= 0,162\,0y_1 + 0,462\,1y_2 + 1,963\,0y_3 + 0,158\,6y_4 + 0,265\,3y_5 + \\
&\quad + 0,163\,1y_6 + 0,041\,8y_7 + 0,046\,4y_8 + 0,034\,9y_9 \\
X_4 &= 0,117\,6y_1 + 0,099\,5y_2 + 0,181\,6y_3 + 1,640\,9y_4 + 0,031\,8y_5 + \\
&\quad + 0,098\,4y_6 + 0,288\,1y_7 + 0,239\,9y_8 + 0,158\,4y_9 \\
X_5 &= 0,103\,1y_1 + 0,158\,6y_2 + 0,057\,8y_3 + 0,080\,1y_4 + 1,484\,6y_5 + \\
&\quad + 0,058\,1y_6 + 0,035\,7y_7 + 0,043\,2y_8 + 0,045\,9y_9 \\
X_6 &= 0,072\,7y_1 + 0,013\,8y_2 + 0,010\,1y_3 + 0,007\,4y_4 + 0,004\,0y_5 + \\
&\quad + 1,191\,2y_6 + 0,004\,7y_7 + 0,004\,8y_8 + 0,002\,6y_9 \\
X_7 &= 0,026\,5y_1 + 0,021\,9y_2 + 0,033\,5y_3 + 0,296\,1y_4 + 0,007\,7y_5 + \\
&\quad + 0,096\,1y_6 + 1,384\,9y_7 + 0,181\,1y_8 + 0,090\,6y_9 \\
X_8 &= 0,006\,9y_1 + 0,002\,0y_2 + 0,002\,1y_3 + 0,014\,3y_4 + 0,013\,8y_5 + \\
&\quad + 0,004\,9y_6 + 0,063\,7y_7 + 1,036\,3y_8 + 0,049\,4y_9 \\
X_9 &= 0,020\,6y_1 + 0,020\,5y_2 + 0,026\,1y_3 + 0,223\,5y_4 + 0,021\,2y_5 + \\
&\quad + 0,072\,9y_6 + 1,041\,8y_7 + 1,362\,6y_8 + 1,908\,4y_9
\end{aligned}
\tag{15.17b}
$$

Na základě této soustavy je pak možno snadno určit výrobní plán k jakékoli variantě finální produkce.

Vzhledem k řadě zjednodušujících předpokladů otevřeného statického modelu nelze sice takovému výpočtu přisoudit více než orientační význam, přesto však přináší tato metoda mnoho výhod proti klasickým metodám postupného vybilancování plánů, které vycházejí konec konců ze stejných zjednodušujících předpokladů. Všimněme si, že v soustavě rovnic (15.17b) nejde o nic jiného než o výpočet výrobního plánu konzistentního s danou konečnou spotřebou, o výpočet bilančně vyváženého plánu; přitom celý výpočet záleží v inverzi matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a v jejím násobení vektorem $\mathbf{y}$. Z toho poslední operace, tj. násobení matice vektorem, je operace velmi jednoduchá. Velmi pracná je ovšem inverze rozsáhlých matic. Pomocí soudobých počítačů lze však v přijatelném čase invertovat i matice řádu až několika set. Přitom je důležité si uvědomit, že je-li matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ jednou invertována, je pomocí ní možno snadno spočítat (pouhým násobením) různé varianty plánu. Navíc, jak uvidíme dále, poslouží inverzní matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ i při jiných aplikacích.

Naproti tomu běžná metoda postupného vybilancování plánu (bilancování a rebilancování) je vlastně aproximační metodou, kterou je nutno při každé variantě provádět znovu. Jde při ní v podstatě o tento iterační postup:

Vyjdeme ze soustavy (15.11), kterou lze stručně psát ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{y} \qquad (15.18)$$

Najdeme nějakou aproximaci vektoru $\mathbf{X}$ a dosadíme na pravou stranu (15.18). Tím dostaneme další aproximaci, již můžeme opět dosadit na pravou stranu rovnice (15.18) atd.

Za nultou aproximaci konečné produkce považujeme třeba požadovanou finální produkci,*) tj.

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{y};$$

pak první aproximace $\mathbf{X}^{(1)}$ bude

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{y},$$

druhá aproximace

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{y} \text{ atd.}$$

Obecně n-tá aproximace $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{X}^{(n-1)} + \mathbf{y}$.

Předpokládejme například, že při nezměněné struktuře hospodářství je finální produkce zadána vektorem

$$\mathbf{y}^T = [0{,}400,\ 0{,}500,\ 200,\ 1\ 000,\ 1\ 000,\ 2\ 000,\ 100]$$

---

*) V praxi ovšem začínáme obvykle hned první krok s nějakou lepší aproximací.

Násobíme-li tento vektor $\mathbf{y}$ zleva inverzní maticí $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, dostaneme hned vektor celkové produkce (tj. výrobní plán, který zaručuje uvedenou finální produkci):

$$\mathbf{X}^T = [443,\ 706,\ 618,\ 1\ 749,\ 585,\ 1\ 215,\ 2\ 011,\ 2\ 157,\ 4\ 155]$$

Aproximační metodou, která je podstatou klasické metody postupného vybilancování plánu, bychom pak museli postupovat takto:

$$\mathbf{X}^{(0)T} = [0{,}400,\ 0,\ 500,\ 200,\ 1\ 000,\ 1\ 000,\ 2\ 000,\ 100]$$

Po dosazení souřadnic $\mathbf{X}^{(0)}$ na pravou stranu soustavy (15.18) bychom pak dostali první aproximaci

$$\mathbf{X}^{(1)} = [178{,}09;\ 514{,}37;\ 166{,}47;\ 904{,}50;\ 332{,}70;\ 1\ 158{,}50;\ 1\ 493{,}28;\ 2\ 121{,}13;\ 1\ 808{,}19]$$

Opětovným dosazením souřadnic $\mathbf{X}^{(1)}$ na pravou stranu soustavy (15.18) bychom dostali $\mathbf{X}^{(2)}$ atd.

Dá se sice dokázat, že v praktických případech (tj. kdy $\sum_i a_{ij} < 1$) tento iterační postup konverguje v tom smyslu, že $\lim_{n \to \infty} \mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$, ovšem rychlost konvergence závisí na struktuře matice $\mathbf{A}$. Prakticky se dá výpočet urychlit tím, že se volí už dobrá nultá aproximace. Z druhé strany však je u rozsáhlých úloh každý krok příliš pracný a výpočty se obvykle přerušují po několika málo krocích; jsou tedy také méně přesné.

K samé aplikaci modelu na plánování výroby je třeba znovu zdůraznit, že existence řešení neznamená ještě, že toto řešení je realizovatelné. My jsme ovšem předpokládali, že exogenními (tj. mimo systém určenými) proměnnými je n souřadnic vektoru finální produkce. Jsou-li kapacity některých odvětví v počtu n_1 omezeny (tj. prakticky omezeny tak, že nestačí krýt požadavky), je možno tyto kapacity považovat za exogenní proměnné. Pak s ohledem na počet stupňů volnosti soustavy (15.11) je možno autonomně určit už jen $n - n_1$ souřadnic vektoru $\mathbf{y}$. Zbývající dostaneme právě řešením soustavy rovnic (15.11).

Řešení takových „smíšených“ úloh, jaké se v praxi mohou vyskytovat často, nepřináší však zásadně nic nového.

15.7 JINÉ APLIKACE OTEVŘENÉHO STATICKÉHO MODELU

Realizovatelnost plánu závisí především na potřebě primárních činitelů a na jejich disponibilitě. Pochopitelně vyvstává tedy otázka, jaké množství primárních činitelů je nutné k realizaci požadované finální produkce. Předpokládáme-li, že spotřeba primárních činitelů (stejně jako ostatních vstupů) je přímo úměrná produkci příslušného odvětví, tj. že platí

$$x_{ei} = a_{ei}X_i,^{*)} \qquad (15.19)$$

pak ze soustavy (15.19) je možno bez obtíží spočítat i potřebu primárních činitelů. Koeficienty a_{ei} mají zde stejný význam jako technické koeficienty, znamenají bezprostřední spotřebu primárních činitelů na výrobu jednotky produkce příslušného odvětví. Např. jde-li o primární činitel práce, pak koeficient a_{ei} znamená pracnost. Celková potřeba primárních činitelů

$$X_e = \sum_i a_{ei}X_i$$

Dosadíme-li do rovnice ze soustavy (15.15), dostaneme

$$X_e = a_{e1}\sum_{i=1}^{n} A_{1i}y_i + a_{e2}\sum_{i=1}^{n} A_{2i}y_i + \ldots + a_{en}\sum_{i=1}^{n} A_{ni}y_i, \qquad (15.20)$$

což po úpravě dává

$$X_e = y_1\sum_{i=1}^{n} a_{ei}A_{i1} + y_2\sum_{i=1}^{n} a_{ei}A_{i2} + \ldots + y_n\sum_{i=1}^{n} a_{ei}A_{in} \qquad (15.21)$$

Potřeba primárních činitelů je v posledním vzorci vyjádřena jako lineární funkce finálních produkcí. Koeficient u y_j, který stručně označíme symbolem A_{ej}, tj.

$$A_{ej} = a_{e1}A_{1j} + a_{e2}A_{2j} + \ldots + a_{en}A_{nj}, \qquad (15.22)$$

má stejný význam jako koeficienty úplných nákladů. V daném případě jde o náklady primárních činitelů na jednotku finální produkce j-tého odvětví.

Poslední výraz bylo ovšem možno odvodit přímo. Tak např. je-li primárním činitelem práce, pak vzhledem k tomu, že na jednotku finální produkce j-tého odvětví je potřeba A_{ij} jednotek produkce i-tého odvětví, je zřejmé, že celkovou potřebu práce na tuto jednotku (tj. přímou i vyvolanou) dostaneme, jestliže násobíme koeficienty A_{ij} příslušnými pracnostmi a sečteme.

---

*) Připomínáme znovu, že jsme pro jednoduchost shrnuli všechny primární činitele do jediné položky, což pro výklad příslušných propočtů stačí. Prakticky ovšem takové shrnutí různých činitelů nebude přípustné.

Příklad: Z tabulky 15.2 lze vypočíst tyto koeficienty pracnosti:

$$a_{p1} = \frac{400}{950} = 0{,}421\,1 \qquad a_{p2} = \frac{80}{600} = 0{,}133\,3$$

$$a_{p3} = \frac{350}{1\,900} = 0{,}184\,2 \qquad a_{p4} = \frac{250}{1\,500} = 0{,}166\,7$$

$$a_{p5} = \frac{1\,200}{4\,700} = 0{,}255\,3 \qquad a_{p6} = \frac{2\,000}{4\,100} = 0{,}487\,8$$

$$a_{p7} = \frac{300}{2\,300} = 0{,}130\,4 \qquad a_{p8} = \frac{180}{2\,200} = 0{,}082\,7$$

$$a_{p9} = \frac{1\,660}{4\,300} = 0{,}386\,0$$

Koeficienty a_{pi} zde znamenají pracnost v běžném smyslu slova, tj. množství práce potřebné bezprostředně na jednotku produkce i-tého odvětví. (Pracnost je zde vyjádřena v peněžních jednotkách, jde tedy vlastně o podíl mzdových nákladů.) Chceme-li však zvýšit finální produkci některého odvětví, musíme počítat nejen s přímou spotřebou práce, ale i s vyvolanou potřebou práce. Tak třeba pracnost ve spotřebním průmyslu je v našem příkladě poměrně malá $a_{p7} = 0{,}130\,4$. Chceme-li však zvýšit finální produkci spotřebního průmyslu o jednotku, je k tomu třeba práce

$$\begin{aligned} A_{p7} = {} & 0{,}421\,1 \,.\, 0{,}074\,3 + 0{,}133\,3 \,.\, 0{,}049\,2 + 0{,}184\,2 \,.\, 0{,}041\,8 + \\ & + 0{,}166\,7 \,.\, 0{,}288\,1 + 0{,}255\,3 \,.\, 0{,}035\,7 + 0{,}487\,8 \,.\, 0{,}004\,7 + \\ & + 0{,}130\,4 \,.\, 1{,}384\,9 + 0{,}082\,7 \,.\, 0{,}063\,7 + 0{,}386\,0 \,.\, 1{,}041\,8 = \\ & = 0{,}692\,972\,54 \end{aligned}$$

Poznámka: Jedna z prvních aplikací meziodvětvové analýzy v USA se týkala právě otázek zaměstnanosti. V dobách velké krize a po ní šlo o to prozkoumat, jaká finální produkce může zajistit plnou zaměstnanost.

Uvedené výsledky mohou být vhodným nástrojem též pro rozbor produktivity práce. Klasický přístup k otázce produktivity práce pomocí indexů nedává uspokojivé výsledky právě z důvodu meziodvětvové závislosti. Pro tuto závislost nelze efektivnost práce vynaložené na určitém úseku, resp. v určitém odvětví, posoudit jen podle výsledků tohoto odvětví. Společnost má zájem na určitém finálním produktu, který je jedině zdrojem blahobytu a bohatství společnosti. Z hlediska společnosti jako celku lze produktivitu práce chápat jen jako míru účinnosti vynakládání práce na tento finální produkt. Avšak následkem prohloubené dělby práce je výroba finálního produktu pouze zlomkem společenského výrobního procesu, a to čím dále, tím menším zlomkem. Větší část práce nutné k získání finálního produktu se vynakládá časově i místně odloučeně od výroby tohoto produktu. Zkoumání produktivity práce na izolovaných pracovištích pomocí klasických indexů, tj. srovnáváním produkce a práce na ni bezprostředně vynaložené (živé práce), může mít proto jen omezený význam.

Pro posouzení efektivnosti vynaložené práce je rozhodující jedině množství finální produkce připadající na jednotku práce vynaložené v celém společenském výrobním procesu. Spotřeba práce ve společenském výrobním procesu se dá vyjádřit vzorcem (15.22), kde za a_{ei} dosadíme pracnost (tj. převratnou hodnotu produktivity práce) i-tého odvětví. Celková spotřeba práce, jak je zřejmé z tohoto vzorce, závisí nejenom na velikosti konečné produkce (y_i) a na produktivitě práce v jednotlivých odvětvích (a_{ei}), ale i na koeficientech úplných nákladů (A_{ij}). Jejich prostřednictvím lze vlastně vyjádřit efektivnost dané technologie (resp. efektivnost dělby práce mezi odvětvími). Podle toho je zřejmé, že příspěvek jednotlivých odvětví k růstu společenské produktivity práce nelze posoudit jedině podle množství produkce na jednotku práce vynaložené v daném odvětví. Rozhodující význam má také, jak se mění spotřeba ostatních činitelů v daném odvětví, dále jakost dodávek daného odvětví jiným odvětvím (což má vliv na efektivnost vynakládání práce v těchto odvětvích).

15.8 ROZBOR DEVIZOVÉ VÝNOSNOSTI

Pomocí vzorce (15.21) a koeficientů (15.22) lze provést analýzu kteréhokoli primárního činitele, přesněji analýzu náročnosti jednotlivých odvětví na primární činitele.

Jak jsme již uvedli, v otevřeném modelu je vždy jistá libovůle v tom, co zařadit mezi autonomní odvětví a co považovat za primární činitele. Považujeme-li zahraniční obchod za autonomní odvětví, a dovážené výrobní prostředky tedy za primární činitele, můžeme pomocí (15.21) a (15.22) analyzovat devizovou výnosnost těchto odvětví. Tato otázka má prvořadou důležitost v ekonomii, v níž má zahraniční obchod velkou váhu. Nejprimitivnějším přístupem k této otázce je zkoumat bezprostřední spotřebu dovážených výrobních prostředků v daném odvětví a přímý vývoz tohoto odvětví. Tento přístup však může zřejmě vést k velmi zkresleným výsledkům, neboť nepřihlíží k nepřímému dovozu, popř. k nepřímému vývozu. Tak například strojírenství i v případě, že přímo žádné dovezené suroviny nespotřebuje, může být nepřímo velkým dovozcem surovin, je-li hutnictví vybudováno na dovážené rudě. Naopak hutnictví, i když přímo nevyváží, může značně přispět k zlepšení devizové bilance nepřímým vývozem přes strojírenství a jiná odvětví. V důsledku těchto nepřímých dovozů a vývozů stává se analýza devizové výnosnosti určitého odvětví pomocí klasických metod záležitostí dosti složitou.

Uvedená otázka se však řeší velmi jednoduše pomocí vzorce (15.21). Označíme-li pro rozlišení symbolem X_d potřebu dovozu ve všech výrobních odvětvích a symbolem a_{di} potřebu dovozu (přímého) na jednotku produkce i-tého odvětví, můžeme podle vzorce (15.21) napsat tuto relaci

$$X_d = y_1 \sum_{i=1}^{n} a_{di}A_{i1} + y_2 \sum_{i=1}^{n} a_{di}A_{i2} + \dots + y_n \sum_{i=1}^{n} a_{di}A_{in} \qquad (15.23)$$

Koeficient u y_j, tj.

$$A_{dj} = a_{d1}A_{1j} + a_{d2}A_{2j} + \dots + a_{dn}A_{nj}, \qquad (15.24)$$

zde znamená potřebu dovozu přímého i nepřímého na jednotku finální produkce j-tého odvětví. Znamená to vlastně devizový obsah jednotky finální produkce j-tého odvětví.

Finální produkce y_j daného odvětví se zčásti spotřebuje doma (v domácnostech, na investice atd.) – označme tuto část y_{jd} – a z části se vyváží – označme tuto část y_{jv}, tj. $y_j = y_{jd} + y_{jv}$. V části vyvezené (y_{jv}) je obsažen dovoz v hodnotě $y_{jv}A_{dj}$. Devizovou rentabilitu tohoto vývozu můžeme pak posoudit podle jeho čistého devizového výnosu, tj. podle rozdílu

$$y_{jv} - y_{jv}A_{dj} = y_{jv}(1 - a_{d1}A_{1j} - a_{d2}A_{2j} - \dots - a_{dn}A_{nj})$$

Příklad: Z tabulky 15.2 lze vypočíst tyto dovozní koeficienty:

$$a_{d1} = 0 \qquad a_{d2} = 0$$

$$a_{d3} = \frac{200}{1\,900} = 0{,}105\,2 \qquad a_{d4} = \frac{150}{1\,500} = 0{,}100\,0$$

$$a_{d5} = \frac{400}{4\,700} = 0{,}085\,1 \qquad a_{d6} = \frac{200}{4\,100} = 0{,}048\,8$$

$$a_{d7} = \frac{200}{2\,300} = 0{,}087\,0 \qquad a_{d8} = \frac{100}{2\,200} = 0{,}045\,5$$

$$a_{d9} = \frac{100}{4\,300} = 0{,}023\,3$$

Podle tabulky jsou hutě devizově pasívní, spotřebují za 200 mil. dovezených výrobků a vyvážejí pouze za 20 mil. Naopak strojírenství je devizově silně aktivní, a to o 1 200 – 400 = 800 mil. Obraz se poněkud změní, počítáme-li úplné dovozní koeficienty. U strojírenství to činí

$$\begin{aligned} A_{d5} = {} & 0{,}105\,2 \,.\, 0{,}265\,3 + 0{,}1 \,.\, 0{,}031\,8 + 0{,}085\,1 \,.\, 1{,}484\,6 + \\ & + 0{,}048\,8 \,.\, 0{,}004\,0 + 0{,}087 \,.\, 0{,}007\,7 + 0{,}045\,5 \,.\, 0{,}013\,8 + \\ & + 0{,}023\,3 \,.\, 0{,}021\,2 = 0{,}159\,415\,98 \end{aligned}$$

To znamená, že celkový dovoz strojírenství (přímý i nepřímý, zejména prostřednictvím hutí) je větší než 400 mil. Činí 2 900 . 0,159 4 $\doteq$ 462,3. Devizový přínos strojírenství je tedy pouze 1 200 – 462,3 = 737,7.

15.9 ROZBOR CENOTVORNÝCH SLOŽEK PRODUKCE

Výše uvedené aplikace otevřeného meziodvětvového modelu, jejichž počet by bylo možno rozmnožit, se týkaly jenom věcných proporcí produkce jednotlivých odvětví. Využili jsme při nich jenom soustavy bilančních rovnic (15.11) a předpokládali jsme mlčky fyzické vyjádření produkce (buď přímo ve fyzických jednotkách, anebo v peněžním vyjádření ve stálých cenách).

Jiné aplikace otevřeného modelu se týkají cen. Pro stručnost budeme v dalším textu rozumět pojmu cena poněkud šíře než obvykle. Zahrneme pod tento pojem nejenom ceny výrobků a služeb, ale i ceny primárních činitelů, tedy mzdy a platy (cena práce), daně a zisk (cena správních a řídicích služeb) atd.

Je dobře známou skutečností, že v důsledku meziodvětvových vazeb nelze libovolně měnit ceny. Změna cen produkce jednoho odvětví, resp. změna ceny některého primárního činitele, se promítá do všech odvětví. Sledovat vliv takové změny v celé soustavě klasickými metodami je však opět velmi složité. Vyjdeme-li z rovnic (15.12), dostaneme snadno potřebné vztahy mezi cenami výrobků a primárních činitelů. Protože v těchto úvahách má cena primárních činitelů důležitou úlohu, předpokládejme dále aspoň dva primární činitele, tj. rozdělme položku x_{ej} na dvě položky: na x_{mj}, pod níž si budeme pro určitost představovat práci, tj. v peněžním vyjádření mzdy, a x_{zj}, pod níž si budeme představovat služby správní, řídicí apod., tj. v peněžním vyjádření daně, dávky a zisk. Přepíšeme zkrátka soustavu (15.13) na tvar

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} + x_{mj} + x_{zj} = X_j \qquad (15.13b)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Představme si nyní, že se ceny mění a označme symbolem p_i index cen produkce i-tého odvětví a podobně symboly p_{mj} a p_{zj} indexy cen primárních činitelů v j-tém odvětví*). Ceny se pochopitelně nemusí měnit v každém odvětví; nenastane-li třeba v l-tém odvětví žádná změna, pak $p_l = 1$. Soustava (15.13b) je soustavou bilančních rovnic a musí pochopitelně platit i pro nové ceny, tj.

$$x_{1j}p_1 + x_{2j}p_2 + \ldots + x_{nj}p_{nj} + x_{mj}p_{mj} + x_{zj}p_{zj} = X_jp_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Dosadíme-li zde známé vztahy $x_{ij} = a_{ij}X_j$, dostaneme po úpravě tuto soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} X_1[(1 - a_{11})\,p_1 - a_{21}\,p_2 - \ldots - a_{n1}\,p_n] = x_{m1}p_{m1} + x_{z1}p_{z1} \\ X_2[\;- a_{12}\,p_1 + (1 - a_{22})\,p_2 - \ldots - a_{n2}\,p_n] = x_{m2}p_{m2} + x_{z2}p_{z2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n[\;- a_{1n}\,p_1 - a_{2n}\,p_2 - \ldots + (1 - a_{nn})\,p_n] = x_{mn}p_{mn} + x_{zn}p_{zn} \end{array} \qquad (15.25)$$

Stručně můžeme tuto soustavu napsat v maticovém tvaru takto:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{p}_m^T\hat{\mathbf{x}}_m + \mathbf{p}_z^T\hat{\mathbf{x}}_z, \qquad (15.25a)$$

kde

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} p_{m1} \\ p_{m2} \\ \vdots \\ p_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} p_{z1} \\ p_{z2} \\ \vdots \\ p_{zn} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & X_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} x_{m1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_{m2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{x}}_z = \begin{bmatrix} x_{z1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_{z2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{zn} \end{bmatrix}$$

Pomocí uvedené soustavy rovnic lze analyzovat vzájemnou závislost cen, ovšem jenom ve statickém pohledu, tj. při dané velikosti produkce a při dané struktuře hospodářství. Považujeme-li totiž produkci ($\mathbf{X}$) i potřebu primárních činitelů na tuto produkci ($\mathbf{x}_m$ a $\mathbf{x}_z$) za dané, má soustava (15.25) $3n$ proměnných, jimiž jsou indexy cen výrobků a primárních činitelů.

Protože soustava má $2n$ stupňů volnosti, můžeme z uvedených $3n$ cenových indexů $2n$ stanovit autonomně. Zbývajících n cenových změn je pak již určeno, je-li ovšem soustava řešitelná. Protože diagonální matice $\hat{\mathbf{X}}$ je vždy regulární (singulární by byla jedině tehdy, kdyby existovala odvětví, která nic neprodukují), závisí řešitelnost soustavy opět jenom na vlastnostech matice $\mathbf{A}$.

Ze soustavy (15.25a) je možno například určit ceny výrobků, jsou-li stanoveny ceny primárních činitelů:

$$\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}_m^T\hat{\mathbf{x}}_m + \mathbf{p}_z^T\hat{\mathbf{x}}_z)\hat{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

---

*) Předpokládáme i nadále stejnorodá odvětví, takže ceny celkové produkce určitého odvětví i ceny dodávek z tohoto odvětví jiným odvětvím se mění stejně. U cen primárních činitelů, tedy u mezd, daní, zisků apod. musíme ovšem předpokládat, že se mohou měnit pro různá odvětví různě.

Příklad: Vyjděme opět z údajů tab. 15.2 a uvažujme, že existují jen dva primární činitele, a to práce (reprezentovaná pro jednoduchost mzdami, jak je uvedeno v tabulce) a ostatní. Tak například v prvním odvětví činí mzdy 400, ostatní 225. Předpokládejme dále, že určité úvahy o nutnosti preferování základních odvětví vedou k tomu zvýšit mzdy v odvětví paliv o 10 % a v zemědělství o 20 %, při nezměněných cenách ostatních primárních činitelů. Otázka je, jaký vliv bude mít tato úprava na ceny výrobků.

Platí zde:

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\,200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\,660 \end{bmatrix}$$

Podobně $\hat{\mathbf{x}}_z$ je matice, která má v diagonále čísla 225, 230, 360, 270, 1 360, 620, 300, 140, 204;

tedy

$$\mathbf{p}_m^T\hat{\mathbf{x}}_m = [440,\ 80,\ 350,\ 250,\ 1\,200,\ 2\,000,\ 300,\ 180,\ 1\,992]$$

$$\mathbf{p}_z^T\hat{\mathbf{x}}_z = [225,\ 230,\ 360,\ 270,\ 1\,360,\ 620,\ 300,\ 140,\ 204]$$

Podle (15.25a) pak máme

$$\mathbf{p}^T = [1{,}052;\ 1{,}031;\ 1{,}007;\ 1{,}026;\ 1{,}407;\ 1{,}007;\ 1{,}141;\ 1{,}131;\ 1{,}192]$$

15.10 PROBLEMATIKA TVORBY CEN

V souvislosti s některými nedostatky metod plánování platných do r. 1965 a se snahou o zavedení exaktních metod plánování se stále častěji diskutuje o otázce cen. Byla dosavadní cenová soustava vhodná pro vyjádření určitých preferencí, umožňovala volbu optimální varianty? Odpověď na tuto

otázku je převážně záporná. Jedním z projevů nevhodnosti této cenové soustavy byla například skutečnost, že suboptimalizace, třeba na úrovni podniků, se dostávala velmi často do rozporu s optimem národohospodářským.

Uvedené nedostatky byly důsledkem cenových úprav prováděných často ad hoc, podle okamžitých potřeb, a nepodložených ekonomickým rozborem. Podle Marxovy teorie hodnoty jsou ceny peněžním vyjádřením hodnoty, tj. množství práce společensky nutné k výrobě příslušných výrobků. V kapitalistické společnosti se hodnotové relace neustále obnovují do jisté míry prostřednictvím tržního mechanismu. Cenová soustava vzniklá v důsledku volné konkurence je vhodným nástrojem optimalizace. V socialistickém hospodářství přestává tržní mechanismus působit a vzniká otázka, zda a jak je možno stanovit ekonomicky efektivní cenovou soustavu,*) tj. cenovou soustavu, která by umožnila rozumnou volbu při ekonomickém rozhodování, zejména při rozhodování o investiční výstavbě. Protože základním kritériem při rozhodování na národohospodářské úrovni je princip ekonomie práce, vznikla snaha po vytvoření takové cenové soustavy, která by nejlépe vyjadřovala obsah práce v jednotlivých výrobcích, tj. která by odpovídala hodnotovým relacím.

Podívejme se nyní, jak je možno pro účely stanovení takové soustavy cen využít otevřeného strukturálního modelu. Vraťme se za tím účelem k soustavě (15.14). Předpokládejme, že souhrn výrobních odvětví v modelu se kryje přesně se sférou hmotné výroby a že odvětvové třídění je tak podrobné, že každý výrobek reprezentuje samostatné odvětví. Řešením soustavy (15.14a) pak dostaneme vztah

$$\mathbf{p}^T = \boldsymbol{\pi}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{15.26}$$

V této soustavě jsou ceny vyjádřeny jako funkce hodnot přidaných zpracováním.

Tím pochopitelně není otázka stanovení cen vyřešena, je jenom posunuta dále hranice, kde má nastoupit ekonomická teorie, bez níž se tato otázka nedá řešit.**) Soustavou rovnic (15.26) se otázka stanovení cen redukuje na otázku určení hodnot přidaných zpracováním. Jde v podstatě o správné relativní hodnocení jednotlivých primárních činitelů, tj. o stanovení správného poměru mezi mzdami (podle druhů), jinými důchody a akumulací.

Jde zde pochopitelně jen o základní myšlenkový postup, jak může strukturální analýza být užitečným nástrojem při řešení problematiky cen. Sám vzorec (15.26) není přímo aplikovatelný. Předpokládá totiž tak podrobné odvětvové třídění, že by každý výrobek tvořil jedno odvětví. Je proto jedním z problémů, který se v této souvislosti řeší, problém postupného řešení velikých soustav, resp. dekompozice velkých matic.

Omezenost zdrojů je dalším závažným momentem, který je třeba při řešení problematiky cen brát v úvahu; zavádějí se proto příslušná omezení a prvky programování do modelu.

15.11 PŘEDPOKLADY OTEVŘENÉHO STATICKÉHO MODELU

Výklad v předchozích odstavcích byl značně zjednodušen a aplikace výsledků, kterých jsme dosáhli, není v praxi bezprostředně možná.

Otevřený statický model je založen, jak jsme již uvedli, na řadě zjednodušujících předpokladů. Výsledků, které model dává, nelze použít mechanicky, nýbrž je třeba

---

*) Je zajímavé podotknout, že tato otázka vznikla ještě dříve, než existovalo socialistické plánování. Roku 1908 se jí zabýval E. Barone. Východiskem mu byl Walrasův model hospodářské rovnováhy (viz [54]).

**) Je třeba si uvědomit, že jediným závažným postulátem, z kterého jsme vycházeli, je požadavek bilanční rovnováhy. To pochopitelně k řešení problematiky cen nemůže stačit.

interpretovat je opatrně. Zejména je třeba brát v úvahu možné meze chyb ve výsledku, způsobené zjednodušujícími předpoklady i chybami ve výchozích statistických údajích. Zde si všimneme jenom hlavních předpokladů modelu a základních problémů s tím spojených. Obecným předpokladem tu je, a to se týká nejen daného modelu, že produkce a výrobní spotřeba jsou jednotně definovány a že je lze měřit.

Model dále předpokládá, že národní hospodářství lze rozdělit na určitý počet dobře definovaných částí – odvětví. To je celkem běžný předpoklad v ekonomické teorii i v praxi. Ve způsobu provedení odvětvového třídění panuje ovšem značná nejednotnost a libovůle. Nejednotnost se týká jak klasifikačních kritérií, tak i jednotek třídění a způsobů agregace. Je přitom zřejmé, že technické koeficienty, a tím i číselné výsledky, které model dává, mohou podstatně záviset na vymezení jednotlivých odvětví. K otázce klasifikace a agregace se vrátíme proto ještě níže.

Základní předpoklad modelu je, že výrobní spotřeba a výroba v určitém odvětví jsou si přímo úměrny a že konstanta úměrnosti a_{ij} má povahu technického koeficientu, tj. závisí pouze na technologii a technice výroby; jinými slovy, má povahu technické normy. Tento předpoklad platí ovšem jen v určitých mezích, zhruba řečeno v mezích normálního využití kapacit. Přísně vzato však může platit jenom v případě, kdy každé odvětví vyrábí jediný výrobek (tj. rovná-li se odvětví vlastně výrobnímu procesu). Jinak, tj. vyrábí-li odvětví více výrobků, budou zřejmě koeficienty a_{ij} záviset na sortimentu výroby, což už není moment technický. Vzniká tím opět otázka, jak postupovat při vymezování odvětví, aby koeficienty a_{ij} byly co nejméně ovlivněny různorodostí náplně odvětví a aby si s potřebnou aproximací zachovaly ráz technických koeficientů.

Neměnné technické koeficienty dále znamenají, že se různé výrobní činitele spotřebovávají na danou výrobu v pevných proporcích. To mj. vylučuje možnost substituce, tj. záměny jedněch činitelů za jiné. Tento předpoklad je dosti omezující, neboť v praxi je s možností substituce nutno počítat. Tak například při výrobě energie je možno nahradit pevná paliva jinými druhy paliv, popřípadě vodní energií. V textilním průmyslu je možno zemědělské suroviny nahradit chemickými produkty atd. Vyloučení možnosti substituce v otevřeném Leontěvově modelu je zvlášť citelným nedostatkem při aplikacích na plánování. Je otázka, zda a jak je možno (vhodným roztříděním odvětví) efekt tohoto nedostatku zmírnit.

Možností substituce v Leontěvově modelu se zabývala řada autorů. Ve Frischově modelu (viz kap. 17) je pak možnost substituce uvedena explicite mezi základními předpoklady.

O technických koeficientech se předpokládá, zejména při aplikacích v plánování, že jsou stabilní v čase (aspoň v určitém časovém úseku). To je pochopitelně opět jen určitá aproximace k realitě. Ve skutečnosti má na tyto koeficienty nutně vliv technický pokrok i pokroky v organizaci výroby. Je totiž třeba mít na zřeteli, že technické koeficienty jsou pro dané odvětví určitým průměrem a že jejich číselné

hodnoty budou jiné pro velké, moderně organizované podniky a jiné pro drobné podniky.

Uvedli jsme již, že samo pojetí otevřeného hospodářství neodpovídá zcela skutečnosti. Ve skutečnosti neexistují plně autonomní odvětví. Například spotřeba takového „odvětví“, jako je domácnost, závisí rovněž na jeho produkci („produkcí“ tohoto odvětví v peněžním vyjádření jsou mzdy a jiné pracovní příjmy). Otevřený model jako nástroj ekonomické analýzy je tedy jednostranný. Všímá si v podstatě pouze technologické struktury ekonomie (pouze technologických vztahů v reprodukčním procesu). Nechává bez povšimnutí vztahy chování. V tomto směru může pro plánovací praxi poskytnout vhodný nástroj pro sestavení technicky vybilancovaných plánů. Sotva však může dát podklady k plánování spotřebitelského koše a k opatřením v oblasti rozdělení. V různých modifikacích Leontěvova modelu se proto zavádějí poptávkové funkce.

Model je deterministický, tj. předpokládá se, že koeficienty jsou určité konstanty a že vztahy mezi výrobou a výrobní spotřebou jsou dány reálnými (nikoli náhodnými) funkcemi. Ve skutečnosti musíme u ekonomických jevů počítat s náhodnými vlivy. Výstižnějšími prostředky pro popis ekonomické skutečnosti by byly modely stochastické, v nichž by v jednotlivých rovnicích byla i složka náhodová.

Konečný model je statický, tj. popisuje realitu za určité časové období. Vývoj v čase není v modelu zachycen a čas jako proměnná se v modelu ani nevyskytuje. Je sice možno vývoj v čase aproximovat řadou statických modelů, avšak zejména pro potřeby dlouhodobého plánování by bylo výhodnější postihnout vývoj přímo v čase. V takovém dynamickém modelu pak prvořadé místo náleží investiční výstavbě (a akumulaci vůbec) jakožto hlavnímu faktoru vývoje.

Všem uvedeným problémům byla věnována řada prací teoretických i empirických studií.*)

Tyto práce mají dvojí zaměření. Jednak se zkoumá, za jakých okolností je otevřený statický model přes uvedené nedostatky použitelný a jak dalece aproximují získané výsledky skutečnost, jednak se jeví snaha o konstrukci dokonalejších modelů. Jde přitom především o dynamizaci modelu.

Důležitost prvního směru vyplývá z toho, že přes zjednodušující předpoklady je otevřený statický model stále velmi přitažlivý a v aplikacích převládá. Důvodem pro to je především jednoduchost modelu samého a jednoduchost matematického aparátu, jehož používá (jde pouze o řešení soustav lineárních rovnic). Je však možno uvést i další závažné důvody vztahující se ke statistice a výpočetní technice.

Otevřený statický model se dá poměrně snadno statisticky naplnit.

Předpoklad přímé úměrnosti výroby a výrobní spotřeby a stabilnosti technických koeficientů dovoluje tyto koeficienty poměrně snadno odhadnout. V praxi se tyto koeficienty odhadují z ročních údajů.

---

*) Podrobně se o nich lze dočíst ve sbornících [5], [6], [9], [88], [94].

Konečně i otázky výpočetně technické hrají zatím ještě úlohu při volbě modelu. Při současném stavu výpočetní techniky by řešení rozsáhlých modelů se složitějšími vztahy než lineárními činilo potíže.

Všimněme si nejdříve stručně dvou otázek, a to otázky zjišťování produkce a výrobní spotřeby a otázky klasifikace a agregace odvětví.

15.12 Produkce a výrobní spotřeba v meziodvětvových bilancích

Sestavení meziodvětvové bilance je velmi složitou statistickou operací a běžná statistická šetření neobsahují všechny údaje potřebné v bilanci. Podrobný popis problémů, na které se tu naráží, by daleko přesahoval rámec této učebnice; dotýká se takřka celé problematiky ekonomické statistiky a je předmětem samostatných monografií.*) Omezíme se jen na základní otázky a začneme otázkami zjišťování produkce a výrobní spotřeby.

O produkci existuje u nás podrobné a takřka vyčerpávající výkaznictví různé periodicity, nicméně je tu i řada mezer, a to jak v definici ukazatelů produkce a v jejich ocenění, tak i ve způsobu sběru údajů.

Ideální by bylo, kdyby existovaly o veškeré produkci údaje ve fyzických jednotkách. Usnadnilo by to rozčlenění produkce na odvětví. Přitom přepočet fyzických jednotek na peněžní (v jakémkoli ocenění) je velmi snadný. Ve skutečnosti však by byla taková statistika nejen neúnosná svým rozsahem, ale nebyla by ani možná. V řadě případů nelze totiž produkci vůbec vyjádřit ve fyzických jednotkách, resp. je toto vyjádření velmi podmíněné. Týká se např. obchodu, dopravy, převážně i stavebnictví i některých produktů průmyslu. Musíme tedy v zásadě vycházet z peněžních ukazatelů produkce a tu velmi mnoho závisí na definici těchto ukazatelů a na způsobu ocenění.

Pro potřeby meziodvětvové analýzy se hodí zřejmě jenom ukazatele hrubé výroby. Naše statistika je nedefinuje zcela jednotně.

V průmyslu je běžným ukazatelem produkce tzv. hrubá výroba počítaná podnikovou metodou. Při této metodě se z produkce vylučují vnitropodnikové dodávky. Tento ukazatel má však zřejmě některé nedostatky a jeho použití v meziodvětvové analýze vyžaduje určitou opatrnost. Závisí na způsobu organizace podniků i na mezipodnikové kooperaci. Vertikálně integrovaný podnik (např. přádelna, tkalcovna, úpravna nebo vysoká pec, ocelárna, válcovna) má menší hrubou výrobu než samostatně vzaté jednoduché provozy. Podnik s rozsáhlými kooperačními vztahy má při téže produkci jiné vstupy než podnik bez těchto vztahů. Podobné rozdíly na straně vstupu jsou mezi podniky lišícími se vybaveností vedlejších a pomocných provozů. Hrubá výroba nedovoluje dále rozčlenit produkci podniku, který svou povahou patří do několika odvětví.

To jsou momenty, které mohou značně zkreslit meziodvětvové toky. Proto je nutno tyto ukazatele pro potřeby meziodvětvové analýzy upravit. Je to nutné již z toho důvodu, že hospodářský organismus je dynamický a organizační formy nejsou ustálené. Neustálé organizační změny by se pak promítaly do meziodvětvových toků. Je to nutné i proto, že tento ukazatel není jednotný. Ve stavebnictví se počítá v podstatě metodou odvětvovou, tj. vylučují se vnitroodvětvové dodávky, a v zemědělství se oceňují jednotlivé výrobky.

Údaje potřebné pro meziodvětvovou bilanci se čerpají z různých pramenů, pokud se ovšem neprovádí samostatné šetření přímo pro potřeby této bilance. Tak údaje o celkové produkci se čerpají ze statistiky výroby, údaje o rozdělení produkce podle odvětví z různých pramenů, jako jsou statistiky materiálně technického zásobování, obchodu, výkupu, vlastních nákladů, dále z různých bilančních propočtů a odhadů. Tyto statistiky nejsou přesně koordinovány ani v odvětvové klasifikaci, ani ve způsobu ocenění. Důsledkem je, že nelze v tabulkách přesně rozdělit produkci. Proto se v mnoha tabulkách setkáváme se zvláštním sloupcem, kde se soustřeďuje nerozdělený zbytek produkce, popřípadě se zvláštní řádkou obsahující odvětvově neidentifikovaný vstup.

Pokud jde o ocenění, uvedli jsme, že pro potřeby meziodvětvové analýzy se hodí stálé ceny. Ne všechny údaje jsou však v takovém ocenění k dispozici. Ve stálých cenách jsou k dispozici údaje o celkové produkci základních odvětví. Tyto údaje však nejsou vždy spolehlivé, např. při velkém podílu nových výrobků a individuálních výrobků (zejména ve stavebnictví), u nichž samo pojetí stálé ceny je dosti mlhavé.

Údaje o rozdělení produkce jsou k dispozici jen zčásti ve stálých cenách. U zbývajících údajů je nutný přepočet.

Potíže se sběrem údajů vedou k tomu, že v některých bilancích je vnitroodvětvový obrat vůbec vynechán, tj. že se uvádí produkce zjištěná odvětvovou metodou. Matice technických koeficientů má v takovém případě na hlavní diagonále samé nuly. S ohledem na to, že jde o analýzu meziodvětvových vztahů, nelze proti vynechání meziodvětvového obratu nic namítat. Vyžaduje to ovšem důsledné dodržování téže odvětvové klasifikace a téhož stupně agregace údajů.

Pokud jsou k dispozici potřebné údaje, je konečně možno technické koeficienty snadno přepočítat, přecházíme-li z údajů „odvětvových“ na „podnikové“.

15.13 Klasifikace odvětví

Jak jsme již uvedli, otevřený statický model teoreticky předpokládá, že národní hospodářství se skládá z elementárních odvětví, tj. z takových odvětví, z nichž

---

*) Velmi podrobně popisují metody sestavení rozsáhlé americké bilance z r. 1947 Evans a Hoffenberg ve studii „The Interindustry Relations Study for 1947“ The Review of Economics and Statistics, č. 2/1952.

každé vyrábí jediný výrobek. V praxi je možno takový „výrobkový“ model zkonstruovat pouze pro omezené úseky národního hospodářství (například pro některé podniky). Zkonstruovat takový model za celé národní hospodářství by znamenalo nezvládnutelnou soustavu o desítkách tisíc rovnic. Řešení takové soustavy je zatím nemyslitelné. Konstrukce takového modelu by kromě toho narazila i na nepřekonatelné překážky při sběru a zpracovávání potřebných údajů. Prakticky jsou odvětví vždy více či méně nestejnorodá, nikdy neodpovídají přesně teoretickým požadavkům.

K problematice klasifikace i agregace je nutno přistupovat ze dvou hledisek. Jednak je třeba brát v úvahu omezené možnosti statistického zjišťování, jednak požadavky zpracování. Základním požadavkem bude přitom stejnorodost odvětví, a to stejnorodost jak pokud jde o výstup (stejnorodost podle určení produkce), tak i pokud jde o vstup (stejnorodost ve zpracované surovině i v technologii). Jinak budou „technologické koeficienty“ záviset též na sortimentním složení odvětví. Jak ale uvidíme dále, stejnorodost vstupu a výstupu jsou požadavky někdy protichůdné.

Problematika klasifikace odvětví patří v podstatě do ekonomické statistiky. Zde se zmíníme jenom stručně o některých otázkách, které úzce souvisí s konstrukcí meziodvětvových tabulek.

Abychom splnili požadavek stejnorodosti, bylo by účelné vycházet z výrobkového pojetí odvětví, tj. slučovat výrobu příbuzných výrobků. Prakticky se však údaje zjišťují u organizačních jednotek, jakými jsou např. podnik, závod, farma nebo jiné organizační buňky. Každá taková organizační buňka je složitým celkem většinou s nestejnorodou výrobou. Tak například hutní výroba bývá spojena s výrobou chemickou, energetickou i strojírenskou. Čím vyšší organizační jednotka, tím je výrobně méně stejnorodá.

Při každém statistickém šetření se definuje tzv. statistická jednotka, tj. jednotka, na niž se vztahují zjišťované údaje. U průmyslu bývá touto jednotkou obvykle závod. Zjišťované údaje se pak třídí do odvětví, která jsou souhrnem závodů s příbuznou výrobou (hlavní). S ohledem na existenci vedlejší výroby nejsou tato odvětví nikdy „čistá“. Převzetí takto odvětvově tříděných údajů do meziodvětvových tabulek by mohlo vnést značné zkreslení do meziodvětvových toků a činilo by je závislými na organizační struktuře výroby. Proto musí být odvětví nejdříve „očištěna“.

Povaha vedlejší výroby je velmi rozmanitá. Někdy jde o výrobu pomocnou, technologicky nesouvisící s hlavní výrobou (vlastní výroba energie, výroba obalů, pomocná stavební výroba apod.). Takovou výrobu není těžké z odvětví vyčlenit, je-li ovšem o ní vedena samostatná evidence. Jiný druh vedlejší výroby je výroba přidružená, jako např. zpracování odpadu a vedlejších zplodin. Zde je už delimitace složitější, zejména na straně vstupu (spotřeba různých činitelů je společná), a neobejde se bez odhadů. Dále existují výrobky sdružené, kdy výsledkem technologického procesu je několik výrobků nebo služeb (např. v živočišné výrobě maso, mléko, tažná síla, v koksárnách koks, plyn, různé chemické produkty atd.). Patří-li tyto sdružené produkty svým spotřebitelským určením do různých odvětví, vznikají při jejich vyčlenění do příslušných odvětví potíže při rozdělení vstupu. Chybí zde totiž objektivní hledisko pro určení, jaký díl spotřebovaných činitelů připadá na ten který výrobek. V některých případech se nejeví vůbec účelným rozdělit sdruženou výrobu do různých odvětví (např. výrobu živočišnou). Jindy, jestliže je jeden výrobek hlavní a ostatní sdružené výrobky jsou málo podstatné, více méně v konstantním poměru k hlavnímu výrobku (např. u vysokých pecí), je možno obtíž obejít třeba tak, že se sdružené výrobky považují za záporný vstup.

V praxi bývá vhodná delimitace odvětví ztížena tím, že se jednotlivé organizační buňky, které jsou statistickými jednotkami, někdy podstatně liší, jak co do stupně vertikální integrace, tak pokud jde o vybavení vedlejšími a pomocnými provozy. Přitom nelze často statisticky podchytit vzájemné dodávky mezi různými složkami téhož závodu. Navíc týž vstup (zejména výrobní služby) bývá často různě oceněn v závislosti na tom, zda je nakupován zvenčí, či poskytnut vlastním závodem.

Již zde je zřejmé, že odvětvovou klasifikaci nelze provést přesně podle požadavků teorie a jde vždy o určitý kompromis mezi různými, někdy protichůdnými požadavky a možnostmi. Požadavek stejnorodosti na straně výstupu, přesněji požadavek vzájemné zastupitelnosti výsledných produktů, vede k velmi jemné odvětvové klasifikaci s množstvím úzkých odvětví. Avšak čím jemněji chceme provést klasifikaci na straně výstupu, tím větší potíže vznikají s roztříděním vstupu podle odvětví.

Nejsou to však jenom potíže se sběrem údajů, které vedou vždy ke kompromisnímu řešení při odvětvové klasifikaci. Teoreticky se požaduje, aby výrobky téhož odvětví byly navzájem zastupitelné (stejnorodost na straně výstupu), aby byly vyráběny podle téže technologie (stejnorodost na straně vstupu), a aby výrobky různých odvětví nebyly navzájem zastupitelné. Poslední požadavek je nutným předpokladem stability meziodvětvových toků. Avšak stejnorodost a zastupitelnost jsou pojmy relativní a u výrobků, které mají různé použití, nelze tyto pojmy jednoznačně vymezit. Tak např. různé druhy pevných, kapalných a plynných paliv jsou navzájem do značné míry zastupitelné jako energetická surovina. Podstatně jiný obraz vzniká, používáme-li jich jakožto chemických surovin.

Dále současné splnění tří uvedených požadavků není obvykle možné. Čím lépe splňujeme jeden z nich, tím hůře jsou splněny ostatní. Vezměme např. opět paliva. Protože jsou navzájem zastupitelná, měla by tvořit jediné odvětví; technologie jejich získání (a tím i technické koeficienty) je však natolik odlišná, že jejich shrnutí do jediného odvětví by bylo příliš zkreslující. Podobně textilie z přirozených a umělých vláken patří podle použití (jsou zastupitelné) do jednoho odvětví, avšak podle použité suroviny do odvětví různých. Čím podrobnější je odvětvová klasifikace, tím lépe se vyhovuje požadavku zastupitelnosti uvnitř odvětví, zároveň se tím však zvyšuje pravděpodobnost, že se stanou navzájem zastupitelnými výrobky různých odvětví.

Počet odvětví i způsob jejich vymezení je nutno konec konců podřídit jak možnostem statistického zjišťování, tak i konkrétním úkolům, které chceme pomocí meziodvětvového modelu řešit. U národních tabulek dosud sestavených se počet odvětví pohybuje mezi deseti až několika sty.

Poznamenejme konečně, že odvětvovou klasifikaci nelze chápat strnule; může a musí se časem měnit. Jednak tu působí změny v technologii, zavádění nových výrobků apod. směrem k další diferenciaci odvětví, jednak se mění také technika sběru a zpracování údajů, a tím i naše znalosti o výrobě.

15.14 OBCHOD A DOPRAVA V SOUSTAVĚ MEZIODVĚTVOVÝCH BILANCÍ

Zvláštní úvahu vyžaduje zařazování odvětví v podstatě distribučních, jako jsou doprava, obchod, výkup atd. Tato odvětví samostatné výrobky nevyrábějí, poskytují jenom služby jiným odvětvím. Produkci těchto odvětví nelze dobře vyjádřit ve fyzických jednotkách. V peněžním vyjádření jsou produkcí dopravy tržby za přepravu zboží, u obchodu a u podobných odvětví pak obchodní rozpětí. V žádném případě se nepovažuje za produkci obchodu tržba. To by zřejmě zkreslovalo meziodvětvové vztahy.

V praxi se náklady za dopravu počítají různě. Někdy jdou náklady k tíži dodavatele (ceny franko spotřebitel), jindy k tíži spotřebitele (ceny franko vyrábějící závod), popř. se dopravní náklady různým způsobem rozdělují (např. ceny franko ústřední sklad). V meziodvětvových bilancích však taková rozmanitost není přípustná, vedlo by to ke zkreslením, stejně jako v případě nestejnorodých odvětví. Existují dvě různé koncepce, jak rozdělit produkci dopravy:

a) Konzumentem služeb dopravy je dodavatelské odvětví. V tomto případě se v řádce dopravy tržby za přepravu píší do sloupců dodavatelských odvětví. Produkce jednotlivých odvětví se počítá včetně dopravních nákladů.

b) Konzumentem služeb dopravy jsou spotřebitelská odvětví. V tomto případě se náklady za přepravu píší do sloupců spotřebitelských odvětví. Produkce jednotlivých odvětví se počítá bez dopravních nákladů.

Praktické provedení kterékoli z obou koncepcí vyžaduje řadu přepočtů, neboť údaje, s ohledem na různorodost praxe, nejsou k dispozici. Navíc přistupuje ta okolnost, že neexistuje ani jednotná evidence přepravních nákladů. Značná část výrobků se přepravuje vlastními prostředky (kde se evidují náklady za přepravu jinak), přičemž je často velmi mlhavá hranice mezi vnitropodnikovou a ostatní dopravou.

U obchodu (vnitřního) existuje podobná alternativa. Za konzumenta služeb obchodu lze považovat dodavatele; v tom případě bude produkce všech odvětví v bilanci uvedena v maloobchodních cenách. Považujeme-li za konzumenta těchto služeb odběratele, bude bilance sestavena ve velkoobchodních cenách. Navíc u obchodu přistupuje určitá potíž s vyjádřením ve stálých cenách. Vždyť je tu obtížné definovat nějaké srovnatelné služby.

Něco podobného platí i o zahraničním obchodě. Považujeme-li zahraniční obchod za výrobní odvětví, pak jeho produkcí je dovoz a jeho spotřebou vývoz. Tuto koncepci však nelze bezprostředně aplikovat, neboť by tím vznikly určité nesnáze. Předpokládejme, že určité odvětví zpracovává nějakou surovinu, kterou částečně dostává z domácí výroby, částečně dováží. Pro výrobu je provenience suroviny lhostejná a může se jí použít v jakémkoli poměru. Považujeme-li dovezenou surovinu za výrobek samostatného odvětví, povede zřejmě změna v poměru domácí suroviny k dovezené ke změnám „technických" koeficientů. Z tohoto důvodu se obvykle rozlišuje dvojí dovoz, tzv. dovoz výlučný, kam patří suroviny a výrobky, které se získávají výlučně ze zahraničí (u nás např. bavlna aj.), a dovoz konkurující, tj. dovoz výrobků a surovin, které se vyrábějí i doma. Dovoz výlučný se rozděluje přímo spotřebitelským odvětvím. Dovoz konkurující je účelnější rozdělit těm odvětvím, která příslušný výrobek sama vyrábějí, a o tuto položku zvýšit produkci těchto odvětví. Tak např. předpokládejme, že odvětví paliv má produkci 10 mld Kčs. Kromě toho se dováží za 1 mld Kčs paliv. Pak se tato 1 mld zapíše do sloupce odvětví paliv jako nákladová položka (v řádce dovozu) a zároveň se produkce odvětví paliv zvýší na 11 mld Kčs, tj. v řádce pro odvětví paliv se rozdělí 11 mld podle spotřebitelských odvětví.

15.15 AGREGACE ODVĚTVÍ

Problematika agregace (shrnování) odvětví úzce souvisí s problematikou klasifikace. Vždyť konec konců každé odvětví si můžeme představit jako agregované z elementárních odvětví. Problematika agregace je však závažná i z praktického důvodu. Při různých aplikacích se totiž jeví účelným snížit rozsah meziodvětvových bilancí spojením několika odvětví do jednoho. Vzniká pak otázka, která odvětví je možno navzájem slučovat, aby tím nebyly porušeny základní závislosti.

Předpokládejme, že systém skládající se z n odvětví splňuje všechny předpoklady leontěvovského modelu, tj. platí $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{y}$ pro jakékoli hodnoty $\mathbf{y}$. Sloučíme-li některá odvětví, je otázkou, zda a za jakých okolností splňuje též agregovaný systém uvedené požadavky.

Zkoumejme proto, jak se změní matice technických koeficientů, spojíme-li prvních m odvětví v odvětví jediné.*) Ponechme za tím účelem pro původní (neagregovanou) matici technických koeficientů označení

---

*) Protože pořadí odvětví je irelevantní, neutrpí tím naše úvaha na obecnosti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a označme matici technických koeficientů agregovaného systému

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{bmatrix},$$

kde $k = n - m + 1$.

Koeficienty b_{ij} není obtížné vyjádřit pomocí koeficientů a_{ij}. Platí tyto relace:*)

a)

$$b_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} X_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j}{\sum_{j=1}^{m} X_j}$$

Označíme-li $\frac{X_j}{\sum_{j=1}^{m} X_j} = v_j$, pak můžeme horní relaci psát ve tvaru

$$b_{11} = \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \qquad (15.27)$$

kde v_j znamená podíl j-tého odvětví na produkci agregovaných odvětví; zřejmě platí

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = 1$$

b) Pro $r \neq 1$ platí, že

$$b_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i,r+m-1}}{X_{r+m-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i,r+m-1} X_{r+m-1}}{X_{r+m-1}},$$

nebo po krácení

$$b_{1r} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,r+m-1} \quad (r \neq 1) \qquad (15.28)$$

---

*) Předpokládáme že vnitroodvětvový obrat není vynechán.

Dále

$$b_{r1} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{r+m-1,j}}{\sum_{j=1}^{m} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{r+m-1,j} X_j}{\sum_{j=1}^{m} X_j},$$

což můžeme psát stručněji

$$b_{r1} = \sum_{j=1}^{m} a_{r+m-1,\, j} v_j \qquad (r \neq 1) \qquad (15.29)$$

Jinými slovy, technické koeficienty vztažené na agregované odvětví (b_{r1}) jsou váženými aritmetickými průměry neagregovaných koeficientů, přičemž váhami jsou podíly jednotlivých odvětví na produkci agregovaného odvětví.

c) Konečně je zřejmé, že pro $r, s \neq 1$ platí

$$b_{rs} = a_{r+m-1,s+m-1}, \qquad (15.30)$$

tj. hodnota technických koeficientů se nemění (mění se jenom očíslování).

Názorně můžeme transformaci matice technických koeficientů **A** v důsledku sloučení prvních m odvětví v odvětví jediné popsat takto:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & \dots a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots a_{mn} \\ \hline a_{m+1,1} & \dots a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots a_{m+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots a_{nn} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & & b_{kk} \end{array}\right]$$

Technické koeficienty prvního kvadrantu (zahrnujícího prvních m řádků a m sloupců) se mění v jediný koeficient b_{11}, který se rovná váženému aritmetickému průměru sloupcových součtů. Váhy jsou přitom podíly slučovaných odvětví na produkci agregovaného odvětví.

Místo koeficientů druhého kvadrantu máme v transformované matici příslušné sloupcové součty.

Místo koeficientů třetího kvadrantu máme v transformované matici vážené aritmetické průměry koeficientů příslušné řádky. Váhy jsou tytéž jako výše.

Koeficienty čtvrtého kvadrantu se nemění.

Uvedenou transformaci je možno zapsat stručně i v maticové formě. Definujme za tím účelem matici $\mathbf{C}$ typu $[(n - m + 1) \, . \, n]$ a matici $\mathbf{C}^*$ typu $[n \, . \, (n - m + 1)]$ takto:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{r} \\ \\ n - m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{1\;1 \ldots 1}^{m} & \overbrace{0\;0 \ldots 0}^{n-m} \\ \hline 0\;0 \ldots 0 & 1\;0 \ldots 0 \\ 0\;0 \ldots 0 & 0\;1 \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \\ & \\ 0\;0 \ldots 0 & 0\;0 \ldots 1 \end{array} \right] \qquad \mathbf{C}^* = \begin{array}{r} m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ n - m \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left[\begin{array}{c|c} v_1 & \overbrace{0\;0 \ldots 0}^{n-m} \\ v_2 & 0\;0 \ldots 0 \\ \vdots & \cdots\cdots \\ v_m & 0\;0 \ldots 0 \\ \hline 0 & 1\;0 \ldots 0 \\ 0 & 0\;1 \ldots 0 \\ \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\;0 \ldots 1 \end{array} \right]$$

Z definice vah v_j plyne, jak se snadno přesvědčíme násobením, že

$$\mathbf{C} \, . \, \mathbf{C}^* = \mathbf{I}_{n-m+1},$$

kde $\mathbf{I}_{n-m+1}$ je jednotková matice řádu $n - m + 1$. Násobením se dále snadno přesvědčíme, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^* \tag{15.31}$$

Všimněme si ještě, že n-rozměrný vektor produkce $\mathbf{X}$ se mění sloučením prvních m odvětví na $(n - m + 1)$-rozměrný vektor $\mathbf{X}^*$, přičemž platí

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{C}\mathbf{X} \tag{15.32}$$

Podobně označíme-li vektor finální produkce po sloučení $\mathbf{y}^*$, platí

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{C}\mathbf{y} \tag{15.33}$$

Je důležité si povšimnout, že matice $\mathbf{C}^*$ závisí na $\mathbf{X}$ $\left(v_j = \dfrac{X_j}{\Sigma X_j}\right)$, to znamená, že pro agregovaný systém nemusí obecně platit relace

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{X}^* = \mathbf{y}^*,$$

třebaže pro neagregovaný systém obdobná relace platí.

Má-li agregovaný systém splnit rovněž požadavky leontěvovského otevřeného modelu, nesmí se slučováním odvětví měnit meziodvětvové toky; z platnosti

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{y} \tag{15.34}$$

musí tedy plynout platnost

$$(\mathbf{I}_{n-m+1} - \mathbf{B})\mathbf{X}^* = \mathbf{y}^* \tag{15.35}$$

při současné platnosti (15.32) a (15.33) při libovolném $\mathbf{y}$, popř. $\mathbf{X}$. Dosadíme-li (15.32) a (15.33) do (15.35), dostaneme

$$(\mathbf{I}_{n-m+1} - \mathbf{B})\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{y}$$

Dosadíme-li na pravou stranu z (15.34), dostaneme po malé úpravě

$$(\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{X} = (\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{X}$$

Poslední relace platí pro jakékoli $\mathbf{X}$ tehdy, a jen tehdy, jestliže platí

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{A} \tag{15.36}$$

Rovnice (15.36) je tedy nutnou a postačující podmínkou pro to, aby se v důsledku agregace nerušila platnost modelu.

Abychom zjistili věcný obsah uvedené podmínky, provedeme v (15.36) násobení a dostaneme

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{b_{11}\;\; b_{11} \ldots b_{11}}^{m} & \overbrace{b_{12} \ldots b_{1k}}^{n-m} \\ \hline b_{21}\;\; b_{21} \ldots b_{21} & b_{22} \ldots b_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ b_{k1}\;\; b_{k1} \ldots b_{k1} & b_{k2} \ldots b_{kk} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i2} \;\cdots & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{im} & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,m+1} \;\cdots & \sum\limits_{i=1}^{m} a_{in} \\ \hline a_{m+1,1} & a_{m+1,2} \;\cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} \;\cdots & a_{m+1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \;\cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} \;\cdots & a_{nn} \end{array} \right]$$

Rovnost prvků posledních $n - m$ sloupců na obou stranách rovnic nepřináší nic nového; dává znovu výsledky uvedené pod (15.28) a (15.30). Avšak z rovnosti prvků v prvních m sloupcích plyne, že teoreticky je agregace přípustná tehdy, jsou-li splněny podmínky

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} = a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{m2} = \\ & = \ldots = a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{mm} \end{aligned} \tag{15.37}$$

a dále

$$a_{r1} = a_{r2} = \ldots = a_{rm} \qquad (r = m + 1, \, m + 2, \ldots, n) \tag{15.38}$$

Slovy můžeme podmínky (15.37) a (15.38) vyjádřit takto: je přípustné slučovat jen taková odvětví, která na jednotku produkce potřebují stejné dodávky od kteréhokoli odvětví (i slučovaného). Stručněji (i když méně přesně): slučovat je možno odvětví se stejnými technickými koeficienty.

Pro praktické potřeby je požadavek neměnnosti meziodvětvových toků při agregaci zřejmě příliš přísný. Podmínky (15.37) a (15.38) nejsou totiž nikdy přesně splněny. Navíc odvětví jsou v praxi až na výjimky vždy již agregovaná a neexistuje možnost přešetřit, zda pro tato odvětví jsou ve vztahu k elementárním odvětvím splněny podmínky (15.37) a (15.38).

Většinou se spokojujeme s tím, že slučujeme v jedno odvětví výroby s podobnou (nikoli přesně stejnou) strukturou nákladů, tj. výroby používající stejné suroviny a podobné technologie. To je kritérium používané již dříve v ekonomické statistice.

Nejsou-li podmínky (15.37) a (15.38) splněny, pak stálost meziodvětvových toků bude zaručena tehdy, jestliže podíl slučovaných odvětví na produkci sloučeného odvětví zůstane stálý (formálně to plyne ze struktury vzorců (15.27) a (15.29)). Tato stálost sortimentního složení je v některých případech aspoň velmi přibližně splněna již v důsledku použité technologie u výrob, které na sebe navazují (např. prvotní zpracování vlny, přádelny, tkalcovny), a u některých vedlejších výrob (např. koks, plyn, ostatní vedlejší produkty). Je možno tedy i taková odvětví výroby slučovat v jediné.

Znovu uvádíme, že odvětví vytvářená v praxi nikdy nesplňují přesně podmínky (15.37) a (15.38). Z toho vyplývá určitá potíž při interpretaci změn technických koeficientů. Změní-li se technické koeficienty, nemusí to být důsledek technologických změn, nýbrž důsledek změny v sortimentu jednotlivých odvětví, popř. důsledek současného působení změn technologických i sortimentních.

Poznámka: S ohledem na to, že je požadavek stálosti meziodvětvových toků při agregaci příliš přísný a v praxi přesně neuskutečnitelný, zkoumal Yamada možnosti agregace při mírnějším požadavku stability (ve smyslu statistickém) technických koeficientů (viz [120]).

15.16 DALŠÍ ÚVAHY O APLIKABILITĚ MODELU

Hlavní směry aplikace strukturální analýzy jsou plánování národního hospodářství, národohospodářské projekce* a národohospodářské prognózy. S ohledem na zjednodušující předpoklady i na nedokonalosti otevřeného statického modelu, o nichž už byla řeč, je třeba při všech těchto aplikacích postupovat opatrně.

Zkoumejme opět otázku plánování nebo prognózy produkce jednotlivých odvětví podle požadavků (resp. odhadu) na finální produkci. V otevřeném statickém modelu je produkce dána vzorcem

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y} \tag{15.39}$$

Pokud jsou technické koeficienty ($\mathbf{A}$) propočteny ze stejného souboru údajů jako finální produkce ($\mathbf{y}$) a celková produkce ($\mathbf{X}$), hořejší vzorec pochopitelně platí přesně (je to identita). V praxi ovšem máme matici technických koeficientů určenu ze statistických údajů za určité období (popř. doplněných a korigovaných technologickými propočty a odhady) a pomocí ní získáme propočty podle vzorce (15.39) za jiná období. Označme skutečné údaje o celkové produkci $\mathbf{X}^*$ a finální produkci $\mathbf{y}^*$. Vypočteme-li celkovou produkci podle vzorce (15.39), dostaneme poněkud jiné hodnoty, a to

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}^*$$

Rozdíl obou vektorů celkové produkce dává vektor chyb

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}^* - \mathbf{X} \tag{15.40}$$

$\mathbf{X}^*$ je možno psát ve tvaru

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{y}^*,$$

kde $\mathbf{A}^*$ je matice technických koeficientů odvozená ze stejné řady statistických údajů jako $\mathbf{X}^*$ a $\mathbf{y}^*$. Vektor chyb je pak dán ve formě

$$\mathbf{u} = [(\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\,\mathbf{y}^*,$$

tj. závisí především na změnách technických koeficientů. Jde tedy v podstatě o otázku stálosti technických koeficientů.

Při aplikacích je důležité znát prameny těchto chyb a umět odhadnout jejich velikost, popřípadě posoudit použitelnost modelu vůbec.

Leontěv již u svého prvního modelu zkoumal možnosti projekce výroby a zaměstnanosti. Jeho postup byl tento: pomocí koeficientů vypočtených z údajů za r. 1939 odhadoval zpětně celkovou produkci r. 1929, za předpokladu, že finální produkce je dána. Šlo tehdy o silně agregovaný desetiodvětvový model a výsledky srovnání vypočtených (odhadnutých) údajů od skutečných byly u různých odvětví dosti odlišné. U takových srovnávacích studií je ovšem třeba z celkové produkce vyloučit finální produkci (a brát tedy v úvahu jenom vyvolanou produkci). Je totiž zřejmé, že jinak bude odhad u odvětví, u nichž je podíl finální produkce v celkové produkci velký, vždy lepší.

U Leontěvova desetiodvětvového modelu byla dobře odhadnuta produkce surovinových odvětví (velikost chyby 0,7 až 3,5 %). Značné odchylky byly u kolejové dopravy (33 %), u kovozpracujícího průmyslu aj. Tyto odchylky jsou důsledkem řady činitelů a je obvykle obtížné je identifikovat, a tím podat správnou interpretaci změn. Tak např. velká chyba při odhadu produkce kolejové dopravy se dá do značné míry vysvětlit strukturálními změnami. U silně agregovaných odvětví, jako je kovozpracující průmysl, může jít o strukturální změny i o změny ve složení (v sortimentu) odvětví atd.

Později byla otázka odhadu technických koeficientů a vlivů působících na změny těchto koeficientů zkoumána teoreticky i empiricky mnoha autory. Sevaldson podrobil rozboru matici $[k_{ij}] = \mathbf{A}^* - \mathbf{A}$ a předpokládal, že každý prvek této matice se skládá ze šesti složek:

---

*) Pojem národohospodářské projekce je ražen jako slabší obměna plánování v kapitalistických státech, ve kterých přímé zásahy státu do hospodářství jsou bezvýznamné. Je to něco mezi plánováním a pouhou prognózou. Hlavním předmětem těchto projekcí bývá otázka zaměstnanosti.

1. trendu,
2. složky závislé na velikosti produkce,
3. složky závislé na exogenních činitelích,
4. složky závislé na jiných (endogenních) proměnných modelu (např. na ocenění),
5. chyby pozorování,
6. zbytku (neidentifikovaný).

Pokud jde o změny, je zřejmé, že technické koeficienty se časem mění i při ideální odvětvové klasifikaci (i v neagregovaném modelu). Souvisí to v podstatě s technologickými změnami. I když vynecháme revoluční změny v technologii, jejichž vliv je snadné eliminovat přepočtem technických koeficientů, každá nová kapacita má zpravidla nikoli průměrné parametry, ale nejlepší existující. Tak např. nová elektrárna postavená podle nejnovějších poznatků techniky bude mít menší měrnou spotřebu paliva, popř. i jinou měrnou spotřebu ostatních činitelů, než je dosavadní průměr. Je-li podíl nové kapacity v daném odvětví velký, bude mít za následek významnou změnu příslušných technických koeficientů. Vliv technologických změn na technické koeficienty se dá odhadnout zpravidla propočtem (nenastanou-li ovšem neočekávané revoluční změny). Ovšem technické změny souvisí velmi často se změnami v objemu produkce; pak se oba tyto vlivy prolínají.

Objem produkce může mít vliv na technické koeficienty potud, že předpoklad o přímé úměrnosti výrobní spotřeby a produkce není vždy dosti výstižný. V mnoha případech je odůvodněnější při různých položkách nákladů počítat se složkou fixní a úměrnou, tj. místo přímé úměrnosti popisovat závislost výrobní spotřeby na produkci obecnou lineární funkcí tvaru

$$x_{ij} = c_{ij} + a_{ij}X_j$$

Výpočetně technicky by se tím plánování (resp. prognózy) produkce a primárních činitelů nijak nezkomplikovalo (zkomplikoval by se rozbor cenotvorných složek produkce). Ovšem záměna přímé úměrnosti obecnými lineárními funkcemi klade podstatně větší nároky na statistiku.

Rozlišení složek ad 3. a 4. není vždy jasné, prolínají se navzájem. Jako příklad se uvádí vliv změn v cenových relacích. Ceny se obecně v tržním hospodářství považují za činitele exogenní, dané systému zvenčí (tržním mechanismem). Avšak v mnoha případech jsou závislé na endogenních činitelích (např. na objemu produkce).

Rozlišení mezi změnami způsobenými exogenními a endogenními vlivy má význam potud, že exogenní vlivy, pokud jsou známy, mohou být propočtem eliminovány.

Ze změn způsobených endogenními činiteli jsou nejdůležitější změny v důsledku změn ve vstupech (zastupitelnost) a v sortimentu produkce jednotlivých odvětví. Už jsme uvedli, že Leontěvův model nebere na zastupitelnost činitelů zřetel. Variace technických koeficientů vznikající v důsledku záměny činitelů nelze z modelu dobře eliminovat. Jde totiž o to, že v tržním hospodářství se volba vstupních činitelů a jejich ceny navzájem ovlivňují.

Chyby pozorování jsou známé ze statistiky. Většinou jde o chyby registrační, které lze zredukovat pečlivou kontrolou a vyřazením pochybných údajů. U mezi-odvětvové analýzy jde ovšem také o chyby při odhadech, jimž se nelze při poněkud podrobném odvětvovém třídění vyhnout.

Empirické studie provedené v různých zemích analyzují význam jednotlivých složek změn technických koeficientů. Jde přitom o to, že část těchto chyb, zejména chyb uvedených pod 1., 2. a 3. lze do značné míry eliminovat přepočtem koeficientů, resp. nepatrnou změnou ve formulaci modelu. Tyto studie se provádějí tak, že pro vybraná odvětví (pokud možno s jednoduchou strukturou) se podrobně zjišťují koeficienty podle jednotlivých závodů za řadu po sobě následujících období. Analyzuje se variabilita koeficientů a též příčiny variability (ukazuje se např., což se dalo očekávat, že technické koeficienty závisí na velikosti závodů). Takové studie mohou být ovšem provedeny jen v omezeném měřítku, a nelze je proto generalizovat.

Při praktických aplikacích strukturální analýzy se pracuje někdy se stovkami rovnic. Při řešení takových soustav, tj. při inverzi matice koeficientů, se neobejdeme bez zaokrouhlování. Užívá se také aproximačních metod. Vedle chyb pozorování si zasluhují tedy aspoň zmínky i chyby vzniklé zaokrouhlováním a použitím aproximačních metod. I těmto otázkám byla věnována řada prací. Uvedeme stručně jen některé výsledky.

Pokud jde o chyby ze zaokrouhlování, technické koeficienty jsou výsledkem měření a dělení, jsou to tedy nutně čísla neúplná, zaokrouhlená na určitý počet desetinných míst. Nepřesnost v koeficientech a_{ij} se projeví v nepřesnosti prvků matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Neumann a Goldstine si kladli otázku, kolik zaručených desetinných míst mají mít prvky výchozí matice, aby prvky inverzní matice byly přesné na požadovaný počet desetinných míst.*) Vycházeli přitom z pesimistického předpokladu (jehož uskutečnění je v praxi málo pravděpodobné), že chyba ze zaokrouhlování je všude maximální, tj. činí 0,5 posledního platného čísla. Došli k závěru, že i při tomto přísném předpokladu stačí, aby prvky výchozí matice měly o $\log 2\,000\ n^4$ platných míst více, než je požadovaná přesnost výsledku, přičemž n je počet řádků matice (tj. počet odvětví). Tak při $n = 100$ je třeba, aby prvky výchozí matice měly o 11 platných míst více než prvky inverzní matice. Výpočetně technicky je to pomocí výkonných počítačů sice proveditelné, jiná je ovšem otázka, zda můžeme technické koeficienty tak přesně stanovit.

Druhý možný pramen chyb vyplývá z použití aproximačních postupů při inverzi matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Pro inverzi matic byly vypracovány různé numerické metody, vesměs velmi pracné. Avšak pro inverzi leontěvovských matic, pro něž platí $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$, se nabízí poněkud jednodušší aproximační postup, který nejlépe vysvětlíme analogií

---

*) Von Neumann, J.—Goldstine, H. H.: Numerical Inverting of Matrices of High Order. Bulletin of the American Mathematical Society, XI. 1947.

k výpočtu převratné hodnoty výrazu $(1 - a)$. Jestliže je číslo a v absolutní hodnotě menší než 1, tj. $|a| < 1$, pak platí

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots,$$

přičemž řada na pravé straně rovnice zřejmě konverguje, a to tím rychleji, čím menší je $|a|$. Můžeme tedy zlomek $\frac{1}{1-a}$ vypočíst s libovolnou přesností, sečteme-li konečný počet členů řady na pravé straně (s jak velkým počtem členů řady musíme počítat, závisí zřejmě na požadované přesnosti a na rychlosti konvergence řady).

Něco podobného platí i pro matice. Jestliže je $\mathbf{A}$ leontěvovská matice, tj. čtvercová matice, jejíž prvky jsou nezáporné a součet prvků kteréhokoli sloupce není větší než jednotka, pak nekonečná řada $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots$*) konverguje k matici $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Můžeme tedy matici $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ aproximovat tak, že vypočteme určitý počet členů řady $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots$ Jak veliká je chyba vzniklá tím, že zanedbáváme všechny mocniny vyšší než n, lze zjistit ze součinu

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \,.\, (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^n)$$

Kdyby prvních $n + 1$ členů řady dalo přesně inverzní matici $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, musel by se uvedený součin rovnat jednotkové matici. Velikost chyby bude vždy určena velikostí rozdílu jednotlivých prvků tohoto součinu a prvků jednotkové matice.

Největším pramenem chyb jsou nepřesné výchozí údaje. Ze statistických údajů, které jsou k dispozici, nelze technické koeficienty určit zcela přesně. Jednak jsou statistické údaje samy zatíženy chybami registračními i chybami zjišťování, jednak se při podrobném odvětvovém třídění nelze vyhnout některým odhadům. Obvykle je však možno odhadnout, v jakých mezích se pohybují chyby těchto údajů. Vzniká otázka, zda je možno určit velikost chyb, které obsahují prvky inverzní matice, za předpokladu, že jsou známy meze chyb prvků původní matice. Podle Christových vývodů nejsou chyby inverzní matice (vyplývající z chyb původní matice) řádově pravděpodobně větší než chyby původní matice.

Z toho vyplývá, že vlastní početní chyby lze při rozboru meziodvětvových vztahů udržet v mezích chyb vznikajících při zjišťování a nemohou zásadně ovlivnit použití metody.

---

*) Mocnina čtvercové matice se definuje podobně jako mocnina čísel; je to násobení, při němž se matice násobí sama sebou. Tak např. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}$; $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \,.\, \mathbf{A}$; atd.

15.17 OBLASTNÍ PROBLEMATIKA V MEZIODVĚTVOVÉ ANALÝZE

V původních pracích o meziodvětvové analýze bylo předmětem zkoumání národní hospodářství jako celek. Brzy se však ukázalo, že tento pohled je neúplný a že je nutno při rozborech tohoto druhu respektovat též hledisko oblastní.

Území státu bývá obvykle rozděleno na zeměpisné oblasti, mezi nimiž (podobně jako mezi odvětvími) existují dodavatelsko-odběratelské vztahy, a to buď přímé nebo zprostředkované. Tyto mezioblastní vztahy bývají dosti stabilní. Je to důsledek odlišné hospodářské struktury jednotlivých oblastí. Je přitom lhostejné, zda tyto odlišnosti vznikly v důsledku historického vývoje nebo v důsledku specifických přírodních a jiných podmínek.

Je zřejmé, že zejména při plánování národního hospodářství nelze tyto mezioblastní vztahy zanedbat. Vždyť při plánování jde velmi často výslovně o plánování vývoje jednotlivých oblastí.

Ukazuje se, že metody strukturální analýzy lze použít i pro zkoumání mezioblastních vztahů. Byla zkonstruována řada mezioblastních modelů (např. Leontěvem a jeho spolupracovníky, Isardem, Chenerym), které popisují mezioblastní problematiku z různých hledisek. V dalším výkladu podáme jen velmi stručný popis některých metod mezioblastní analýzy.

Teoreticky nejjednodušší přístup k mezioblastní analýze je zavést do tabulky meziodvětvové bilance též třídění podle oblastí (tj. kombinovat třídění odvětvové s oblastním). Nevýhodou tohoto postupu však je, že se bilance rozrůstá do nezvladatelných rozměrů, protože počet položek roste se čtvercem počtu oblastí. Kromě toho naráží sestavení takové bilance i na nedostatek statistických údajů.

Jeden z oblastních modelů Leontěvových je založen na následující úvaze: Z n odvětví národního hospodářství se část, dejme tomu prvních h, vybilancuje v rámci oblastí. Zbývající odvětví jsou povahy celostátní, tj. vyrábějí zboží a služby, které jsou předmětem mezioblastních dodávek, a bilancují se v rámci celostátním.

Soustavu bilančních rovnic (15.11) pak můžeme psát ve tvaru

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1h} & a_{1,h+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \ldots & a_{hh} & a_{h,h+1} & \ldots & a_{hn} \\ \hline a_{h+1,1} & \ldots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & \ldots & a_{h+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nh} & a_{n,h+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_h \\ \hline X_{h+1} \\ \vdots \\ X_n \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_h \\ \hline y_{h+1} \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_h \\ \hline X_{h+1} \\ \vdots \\ X_n \end{array}\right],$$

nebo stručně ve tvaru

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{oo} & \mathbf{A}_{os} \\ \hline \mathbf{A}_{so} & \mathbf{A}_{ss} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_o \\ \hline \mathbf{X}_s \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{y}_o \\ \hline \mathbf{y}_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_o \\ \hline \mathbf{X}_s \end{array}\right], \tag{15.41}$$

popř. po úpravě

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo} & -\mathbf{A}_{os} \\ \hline -\mathbf{A}_{so} & \mathbf{I} - \mathbf{A}_{ss} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_o \\ \hline \mathbf{X}_s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{y}_o \\ \hline \mathbf{y}_s \end{array}\right], \tag{15.41a}$$

kde $\mathbf{X}_o$ je vektor celkové produkce oblastně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{X}_s$ — vektor celkové produkce celostátně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{y}_o$ — vektor finální produkce oblastně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{y}_s$ — vektor finální produkce celostátně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{A}_{oo}$ — matice typu $(h \,.\, h)$ technických koeficientů oblastně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{A}_{ss}$ — matice typu $(n - h) \,.\, (n - h)$ technických koeficientů celostátně bilancovaných odvětví,
$\mathbf{A}_{os}$ — matice typu $(h \,.\, (n - h))$ obsahující koeficienty dodávek oblastních odvětví celostátním,
$\mathbf{A}_{so}$ — matice typu $((n - h) \,.\, h)$ obsahující koeficienty dodávek celostátních odvětví oblastním.

Soustava rovnic (15.41) popisuje bilanční rovnováhu národního hospodářství vcelku.

Je-li dán vektor finální produkce, je možno z ní určit celkovou produkci, tj. $\mathbf{X}_o$ a $\mathbf{X}_s$.

Obdobné rovnice platí i pro produkci jednotlivých oblastí. Označme symbolem $\mathbf{X}_o^j$ celkovou produkci oblastně bilancovaných odvětví vyrobenou v oblasti j-té;
symbolem $\mathbf{X}_s^j$ celkovou produkci celostátně bilancovaných odvětví vyrobenou v oblasti j-té;
symbolem $\mathbf{y}_o^j$ finální produkci oblastně bilancovaných odvětví v j-té oblasti;
symbolem $\mathbf{y}_s^j$ finální produkci celostátně bilancovaných odvětví v j-té oblasti.

Pak za předpokladu, že se technické koeficienty nemění podle oblastí, platí

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo} & -\mathbf{A}_{os} \\ \hline -\mathbf{A}_{so} & \mathbf{I} - \mathbf{A}_{ss} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_o^j \\ \hline \mathbf{X}_s^j \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{y}_o^j \\ \hline \mathbf{y}_s^j \end{array}\right], \tag{15.42}$$

tj.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo})\, \mathbf{X}_o^j - \mathbf{A}_{os} \mathbf{X}_s^j = \mathbf{y}_o^j \tag{15.43}$$

Předpokládejme dále, že je dán podíl jednotlivých oblastí na celkové produkci celostátně bilancovaných odvětví. Označme symbolem k_{h+1}^j podíl j-té oblasti na celkové produkci $(h + i)$-tého odvětví:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} k_{h+1}^j & 0 & \dots 0 \\ 0 & k_{h+2}^j & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots k_n^j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_s^j = \mathbf{K}_j \mathbf{X}_s$$

Dosadíme-li tento vztah do (15.43) a řešíme-li podle $\mathbf{X}_o^j$, dostaneme

$$\mathbf{X}_o^j = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo})^{-1} (\mathbf{y}_o^j + \mathbf{A}_{os} \mathbf{K}_j \mathbf{X}_s) \tag{15.44}$$

Poslední rovnici interpretujeme takto:

Vyvážíme nejdříve bilanci produkce v celostátním měřítku. Bilanční rovnováha je popsána soustavou rovnic (15.41). Z ní je možno ze zadaného vektoru finální produkce určit $\mathbf{X}_s$. Pak ale je bilanční rovnováha oblasti popsána soustavou (15.44). Z ní je možno podle zadaného $\mathbf{y}_o^j$ určit $\mathbf{X}_o^j$. Jinými slovy, na základě soustavy (15.44) lze zaručit bilanční vyváženost jednotlivých oblastí, jestliže je celostátní bilance již vyvážena.

Lze ovšem volit i postup opačný, tj. vycházet z bilanční rovnováhy oblastí a na tomto základě stanovit bilanční rovnováhu národního hospodářství vcelku. Vyjděme za tím účelem ze soustavy (15.43) a pišme ji ve tvaru

$$\mathbf{A}_{os} \mathbf{X}_s^j = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo}) \mathbf{X}_o^j - \mathbf{y}_o^j \tag{15.45}$$

Tuto soustavu interpretujeme takto:
Množství produkce dodané oblastně bilancovanými odvětvími j-té oblasti na výrobu celostátně bilancovaných výrobků v téže oblasti ($\mathbf{A}_{os} \mathbf{X}_s^j$) se rovná celkové produkci oblastně bilancovaných odvětví v j-té oblasti ($\mathbf{X}_o^j$), zmenšené o vnitřní obrat těchto odvětví ($\mathbf{A}_{oo} \mathbf{X}_o^j$) a o finální produkci těchto odvětví v j-té oblasti ($\mathbf{y}_o^j$).

Dosadíme-li v (15.45) za $\mathbf{X}_o^j$ vektor výrobních kapacit oblasti, lze podle zadaného $\mathbf{y}_o^j$ určit $\mathbf{X}_s^j$, a tedy $\mathbf{X}_s$. To znamená, že na základě znalosti výrobních kapacit oblastí je možno podle požadavků na finální produkci oblastně bilancovaných odvětví ($\mathbf{y}_o$) určit celkovou produkci celostátně bilancovaných odvětví ($\mathbf{X}_s$), odpovídající bilanční rovnováze oblastí.

Dosadíme-li takto určené hodnoty do (15.41a), vypočteme vektory $\mathbf{X}_o$ a $\mathbf{y}_s$, zaručující bilanční vyváženost celostátní. Ze soustavy (15.41a) totiž plyne, že

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo}) \mathbf{X}_o \quad & - \mathbf{A}_{os} \mathbf{X}_s = \mathbf{y}_o \\ - \mathbf{A}_{so} \mathbf{X}_o \quad & + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{ss}) \mathbf{X}_s = \mathbf{y}_s \end{aligned}$$

a z toho

$$\mathbf{X}_o = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo})^{-1} (\mathbf{A}_{os} \mathbf{X}_s + \mathbf{y}_o) \tag{15.46}$$

$$\mathbf{y}_s = [-\mathbf{A}_{so}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo})^{-1} \mathbf{A}_{os} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{ss})] \mathbf{X}_s - \mathbf{A}_{so}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{oo})^{-1} \mathbf{y}_o \tag{15.47}$$

Popsaný model je velmi jednoduchý, nediferencuje technické koeficienty podle oblastí, tj. předpokládá jednotné koeficienty pro celé státní území. Na základě tohoto modelu je možno určit bilanční rovnováhu oblastí, bylo-li předem bilančně vyváženo národní hospodářství vcelku. Je možno také naopak určit bilanční rovnováhu celostátní, byly-li předem vybilancovány jednotlivé oblasti.

V jiných meziobl astních modelech (např. Isard, Chenery) se zavádějí odlišné technické koeficienty pro jednotlivé oblasti. Pokud jde o podrobnosti, musíme čtenáře odkázat na speciální literaturu (viz [5], [27], [60], [89]).

15.18 POUŽITÍ STRUKTURÁLNÍ ANALÝZY PŘI VNITROPODNIKOVÉM PLÁNOVÁNÍ

Rozbor meziodvětvových vztahů (a na základě toho plánování národního hospodářství) je pouze jeden z oborů aplikace strukturální analýzy. Jak jsme již uvedli na počátku, hodí se tato metoda analýzy všude, kde zkoumaný celek lze rozdělit na dobře definované a vzájemně závislé části. Jednou z vhodných oblastí použití je právě vnitropodnikové plánování.

Soudobý průmyslový podnik je složitý organismus, skládající se obvykle z mnoha složek: závodů, dílen, provozů, se složitými vzájemnými vazbami. Složité vazby jsou často i přímo mezi jednotlivými technologickými procesy, takže je velmi obtížné postihnout kvantitativně klasickými metodami tyto vztahy.

Chceme-li analyzovat činnost podniku pomocí otevřeného strukturního modelu, pak místo jednotlivých výrobních odvětví zde mohou figurovat buď jednotlivé organizační součásti podniku (závody, dílny atd.), nebo přímo jednotlivé technologické procesy. Primárními činiteli zde budou kromě práce a služeb získaných zvenčí též všechny nakupované suroviny a polotovary. Finálním produktem podniku je vše, co tvoří součást odbytu mimo podnik.

Je zřejmé, že takto konstruovaný podnikový model se formálně nebude příliš lišit od modelu národohospodářského. Sama problematika sestavení modelu může být ovšem dosti odlišná. Z jedné strany zde v podstatě odpadá složitá problematika klasifikace a agregace a jednodušší je i sběr údajů; v případech, kdy jde o výrobu bez zpětných vazeb, je i inverze matice ($\mathbf{I} - \mathbf{A}$) podstatně jednodušší. Z druhé strany však nelze podnikový model sestavit bez podrobné znalosti technologií a strukturní koeficienty je třeba odvozovat převážně z technologických podkladů. Takový je v podstatě postup při zkoumání struktury (materiálové, energetické, pracovní) uvnitř podniku, jež je předmětem dalšího odstavce.

Jistou modifikací strukturální analýzy je modelování výrobních procesů (resp. operací).

Při operativním plánování výroby v podniku je jednou ze základních otázek, jak určit strukturu produkce. Problém je obdobný jako u plánování výroby v národohospodářském měřítku. Je dán vektor finální produkce podniku (např. podle požadavků odbytu) a jsou dány normy přímé spotřeby. Je třeba určit celkovou produkci (tj. finální produkci plus polotovary) a celkovou potřebu prvotních činitelů (v daném případě to jsou suroviny, energie, kapacity a práce) na tuto produkci.

Zřejmě jde matematicky o úlohu úplně stejnou jako v čl. 15.3. Formální úprava bývá v podniku jiná.

Předpokládejme, že podnik vyrábí n výrobků $P_1, P_2, \ldots, P_n$, z nichž část jsou finální výrobky, část meziprodukty. Pro obecnost můžeme předpokládat, že všechny výrobky jsou i meziprodukty i finálními výrobky. Předpokládejme dále, že v podniku se spotřebuje m prvotních činitelů $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Každému výrobku P_i můžeme pak přiřadit $(m + n)$-rozměrný vektor spotřebních norem

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a^s_{1i} \\ a^s_{2i} \\ \vdots \\ a^s_{mi} \\ a^P_{1i} \\ a^P_{2i} \\ \vdots \\ a^P_{ni} \end{bmatrix},$$

jehož souřadnicemi jsou přímé normy spotřeby jednotlivých prvotních činitelů a jednotlivých výrobků (v určeném pořadí) na výrobek P_i (řada těchto norem se může ovšem rovnat nule).

Matice typu $((m + n) \,.\, n)$, jejíž sloupce jsou právě uvedené vektory, tj. matice

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} a^s_{11} \ldots a^s_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a^s_{m1} \ldots a^s_{mn} \\ a^P_{11} \ldots a^P_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a^P_{n1} \ldots a^P_{nn} \end{bmatrix},$$

popisuje zcela strukturu produkce daného podniku.

Matici $\mathbf{A}$ můžeme vhodně psát ve formě dělené matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s \\ \hline \mathbf{A}^P \end{bmatrix},$$

kde

$$\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} a^s_{11} \ldots a^s_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a^s_{m1} \ldots a^s_{mn} \end{bmatrix}$$

je matice norem spotřeby primárních činitelů,

$$\mathbf{A}^P = \begin{bmatrix} a^P_{11} \ldots a^P_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a^P_{n1} \ldots a^P_{nn} \end{bmatrix}$$

je matice norem spotřeby meziproduktů.

V praxi nás bude zajímat především struktura finální produkce podniku (struktura hrubé výroby, resp. odbytu), tj. kolik surovin, energie, práce a jiných činitelů je obsaženo v každé jednotce finálního produktu. Je to úloha podobná, jako bylo určení koeficientů úplných nákladů.

Nechť je finální produkce podniku dána vektorem

$$\mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n],$$

hrubý obrat (tj. finální výroba plus meziprodukty) nechť je dán vektorem

$$\mathbf{X}^T = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

a celková potřeba primárních činitelů nechť je dána vektorem

$$\mathbf{s}^T = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$$

Pak zřejmě platí relace

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^P\mathbf{X} + \mathbf{y} \tag{15.48}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}^s\mathbf{X} \tag{15.49}$$

První rovnice vyjadřuje, že se hrubý obrat rovná součtu vnitřního obratu a finální produkce, přičemž vnitřní obrat je součinem hrubého obratu a norem spotřeby meziproduktů ($\mathbf{A}^P\mathbf{X}$).

Druhá rovnice vyjadřuje, že celková spotřeba prvotních činitelů (nakupovaných surovin, energie, práce, kapacit atd.) je součinem hrubého obratu a technických norem.

Z rovnice (15.49) dostaneme podobně jako v článku 15.6

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}\mathbf{y} \tag{15.50}$$

a z rovnice (15.48) pak plyne

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}^s(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}\mathbf{y} \tag{15.51}$$

Protože jde o vztahy známé již z čl. 15.6, není je třeba podrobněji analyzovat. Prvky matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}$ jsou tzv. komplexní normy spotřeby meziproduktů, tj. normy vztažené na jednotku finální produkce (zahrnující tedy jak přímou, tak i vyvolanou potřebu). Podobně prvky matice $\mathbf{A}^s(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}$ jsou komplexními normami spotřeby primárních činitelů. Vcelku tedy matice

$$\left[\frac{\mathbf{A}^s(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}}{(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}}\right] \tag{15.52}$$

popisuje úplně strukturu (materiálovou, energetickou, pracovní aj.) produkce daného podniku.

Znalost matice komplexních norem má nesmírný význam pro operativní plánování v podniku. Umožňuje rychlý a vskutku operativní rozpis plánu (resp. objednávek) na jednotlivá pracoviště, popř. umožňuje rychle zjistit, zda daný plán je konzistentní s možnostmi podniku. Tím zároveň umožňuje přechod na mechanizaci, resp. automatizaci operativního plánování výroby. Kromě toho je znalost strukturních závislostí, které dává matice komplexních norem, podkladem pro další optimalizační procesy.

Příklad: Předpokládejme, že v podniku lze vyrábět tři různé výrobky, P_1, P_2, P_3, a spotřebují se tam čtyři primární činitele, S_1, S_2, S_3 a S_4. Matice přímých norem spotřeby bude vypadat takto:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & P_1 & P_2 & P_3 \\
\hline
S_1 & 12 & 5 & 2 \\
S_2 & 0 & 4 & 8 \\
S_3 & 2 & 6 & 0 \\
S_4 & 5 & 0 & 0 \\
P_1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}12 \\
P_2 & 0 & 0 & 0{,}08 \\
P_3 & 0{,}1 & 0 & 0
\end{array}$$

Abychom určili matici komplexních norem, vypočteme nejdříve komplexní normy spotřeby meziproduktů, tj.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}12 \\ 0 & 1 & -0{,}08 \\ -0{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{0{,}986\,4} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}136 \\ 0{,}008 & 0{,}988 & 0{,}08 \\ 0{,}1 & 0{,}02 & 1 \end{bmatrix}$$

Dále pak snadno určíme komplexní normy spotřeby primárních činitelů

$$\mathbf{A}^s(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}014\,1 & 0{,}202\,8 & 0{,}137\,9 \\ 0{,}008\,1 & 1{,}001\,6 & 0{,}081\,1 \\ 0{,}101\,4 & 0{,}020\,3 & 1{,}014\,1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12{,}412\,5 & 7{,}482\,2 & 4{,}088\,5 \\ 0{,}843\,6 & 4{,}168\,8 & 8{,}436\,5 \\ 2{,}076\,8 & 6{,}415\,2 & 0{,}762\,4 \\ 5{,}070\,5 & 1{,}014\,0 & 0{,}689\,5 \end{bmatrix}$$

Spojením obou matic dostaneme matici komplexních norem

$$\left[\frac{\mathbf{A}^s(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}}{(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)^{-1}}\right] = \begin{bmatrix} 12{,}412\,5 & 7{,}482\,2 & 4{,}088\,5 \\ 0{,}843\,6 & 4{,}168\,8 & 8{,}436\,5 \\ 2{,}076\,8 & 6{,}415\,2 & 0{,}762\,4 \\ 5{,}070\,5 & 1{,}014\,0 & 0{,}689\,5 \\ 1{,}014\,1 & 0{,}202\,8 & 0{,}137\,9 \\ 0{,}008\,1 & 1{,}001\,6 & 0{,}081\,1 \\ 0{,}101\,4 & 0{,}020\,3 & 1{,}014\,1 \end{bmatrix}$$

Je-li zadán vektor finální produkce, zjistíme celkovou potřebu primárních činitelů a meziproduktů pouhým násobením tohoto vektoru výše uvedenou maticí.

Význam matice komplexních norem spotřeby je tedy především v tom, že lze její pomocí velmi rychle zjistit, jaká má být celková produkce podniku (včetně vnitřního obratu) při daných požadavcích na finální produkci. Tím lze také zjistit, zda požadovaná finální produkce je konzistentní s možnostmi podniku (kapacitními, lidskými atp.). Její význam tkví i v tom, že k požadované finální produkci lze snadno zjistit potřebu primárních činitelů (surovin, materiálů, práce), a tím zároveň vypočítat vlastní náklady na požadovanou finální produkci, jsou-li známy ceny primárních činitelů.

Pro ilustraci předpokládejme, že v předchozím příkladě jsou požadavky odbytu dány vektorem

$$\mathbf{Q}^T = [5\,000,\quad 2\,000,\quad 800]$$

a ceny prvotních činitelů vektorem

$$\mathbf{c}^T = [50,\quad 25,\quad 20,\quad 10]$$

Potřeba prvotních činitelů a meziproduktů na uvedený odbyt je dána maticí

$$\begin{bmatrix} 12{,}412\,5 & 7{,}482\,2 & 4{,}088\,5 \\ 0{,}843\,6 & 4{,}168\,8 & 8{,}436\,5 \\ 2{,}076\,8 & 6{,}415\,2 & 0{,}762\,4 \\ 5{,}070\,5 & 1{,}014\,0 & 0{,}689\,5 \\ 1{,}014\,1 & 0{,}202\,8 & 0{,}137\,9 \\ 0{,}008\,1 & 1{,}001\,6 & 0{,}081\,1 \\ 0{,}101\,4 & 0{,}020\,3 & 1{,}014\,1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5\,000 \\ \\ \\ 2\,000 \\ \\ \\ 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80\,298 \\ 19\,305 \\ 23\,824 \\ 27\,932 \\ 5\,586 \\ 2\,109 \\ 1\,359 \end{bmatrix}$$

Konečně vlastní náklady na požadovanou produkci jsou dány součinem

$$[50,\ 25,\ 20,\ 10] \begin{bmatrix} 12{,}412\,5 & 7{,}482\,2 & 4{,}088\,5 \\ 0{,}843\,6 & 4{,}168\,8 & 8{,}436\,5 \\ 2{,}076\,8 & 6{,}415\,2 & 0{,}762\,4 \\ 5{,}070\,5 & 1{,}014\,0 & 0{,}689\,5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5\,000 \\ 2\,000 \\ \\ 800 \end{bmatrix} = 5\,253\,325$$

Model struktury produkce, který jsme uvedli výše, je jednoduchý model se zpětnými vazbami. Praktické případy mohou být poněkud odlišné, a to jak jednodušší, neexistují-li zpětné vazby, tak i složitější, existují-li sdružené výrobky, popř. jsou-li strukturní koeficienty závislé na technických parametrech výroby.

Neexistují-li zpětné vazby, pak lze vhodným seřazením sloupců matici $\mathbf{A}^P$ převést na tvar trojúhelníkový s nulovými diagonálními prvky. Inverze matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^P)$ je pak velmi jednoduchá. Komplexní normy spotřeby lze totiž v takovém případě určit postupným propočtem (dosazováním). Vyjdeme z norem spotřeby výrobků, do nichž nevchází žádný výrobek podniku jako meziprodukt. Na základě toho pak vypočteme komplexní normy pro výrobky, do nichž vcházejí jako meziprodukt jen výrobky první skupiny atd.

Příklad: Uvádíme matici přímých norem spotřeby pro případ pěti výrobků a dvou primárních činitelů:

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

V daném příkladě výrobky P_1 a P_3 nepoužívají meziproduktů. To znamená, že komplexní normy spotřeby jsou u nich totožny s přímými normami spotřeby.*)

Komplexní normy spotřeby pro výrobky P_2 a P_5 vypočteme snadno tak, že určíme, jaké množství S_1 a S_2 reprezentuje spotřeba meziproduktů P_1 a P_3 na tyto výrobky. Vektor komplexních norem spotřeby pro P_2 se bude rovnat

$$\begin{bmatrix} 5 + 2.2 + 1.3 \\ 1 + 2.4 + 1.2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podobně pro P_5

$$\begin{bmatrix} 4 + 1.2 + 3.3 \\ 4 + 1.4 + 3.2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konečně vektor komplexních norem pro P_4 vyjadřuje vztah

$$\begin{bmatrix} 6 + 1.2 + 2.12 + 2.3 + 5.15 \\ 0 + 1.4 + 2.11 + 2.2 + 5.14 \\ 1 \qquad\quad + 2.2 \qquad\quad + 5.1 \\ 2 \\ 2 \qquad\quad + 2.1 \qquad\quad + 5.3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 113 \\ 100 \\ 10 \\ 2 \\ 19 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

---

*) Rozdíl je jenom ve formě, jak píšeme vektor přímých a komplexních norem spotřeby. Protože u posledních jde o to určit potřebu na jednotku finální produkce, bude u vektoru komplexních norem spotřeby výrobku P_1 třetí souřadnice jednotka (nikoli nula), neboť na jednotku finálního produktu P_1 je pochopitelně třeba jednotky tohoto výrobku. Podobně u výrobku P_3 bude pátá souřadnice jednotka.

Tím je určena celá matice komplexních norem spotřeby:

$$\begin{bmatrix} 2 & 12 & 3 & 113 & 15 \\ 4 & 11 & 2 & 100 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

V obecném případě nelze výrobní proces podniku tak jednoduchým modelem popsat. Dosud jsme totiž předpokládali, že výrobní činnost podniku se skládá z jednotlivých jednoduchých procesů, při nichž se určitý počet vstupů transformuje v jediný výstup. Přitom objem jednotlivých vstupů je přímo úměrný výstupu. Dále jsme mlčky předpokládali, že každý výrobek se vyrábí jedinou technologií. V praxi nejsou tyto podmínky zdaleka vždy splněny. Platí to zejména o provozech chemických a energetických, resp. o provozech, kde probíhají chemické reakce. Stručně řečeno, ve velké části praktických případů nelze popsat jednotlivým vektorem výrobu jednoho výrobku a musíme vycházet z výrobního procesu.

Zde však nastupují některé komplikace, z nichž uvedeme aspoň nejznámější:

a) Úroveň výroby určitého výrobku, jak jsme ji popsali výše vektorem, lze charakterizovat jediným číslem, např. množstvím produkce nebo spotřebou hlavní suroviny apod. Všechny ostatní veličiny závisí na takto určené úrovni výroby. Obecně však úroveň procesu nelze určit jedním číslem. Vezměme např. vysokopecní proces. Hlavní charakteristikou je tu vsázka rudy. Jí však není úroveň procesu určena. Spotřeba ostatních činitelů i výnos produktů (sur. železa, plynu) závisí např. na spotřebě kyslíku nebo koksu (které jsou navzájem do určité míry zastupitelné) a na kvalitativních parametrech rudy. U různých jiných procesů existuje též závislost na okolní teplotě, na rychlosti průběhu procesu a na různých jiných technologických parametrech.*)

b) Výsledkem procesu často není jediný produkt, ale řada sdružených výrobků (např. výsledkem koksárenského procesu je koks, plyn a řada chemických surovin), které se získávají v pevném poměru.

c) Týž výrobek lze často vyrobit různými technologiemi.

Pokud zůstávají v platnosti lineární vztahy mezi vstupy a výstupy procesu, je možno i tyto složitější případy popsat maticovými modely, rozpracovanými O. Pichlerem.

---

*) Technologickým parametrem může být kromě teploty, tlaku, různých kvalitativních ukazatelů apod. též čas. Např. musí-li být kotel udržen pod párou, spotřebuje se palivo, i když se nic nevyrábí. Spotřeba paliva pak závisí na čase.

KAPITOLA 16 DYNAMICKÉ MODELY

16.1 DYNAMICKÉ MODELY — ÚVOD

Víme již, že jedním z nedostatků statických modelů je neschopnost brát v úvahu faktor času. Statické modely počítají s určitou danou technologií, a tedy se stabilními technickými koeficienty, které se časem nemění. Pomocí statických modelů nelze brát v úvahu vývoj, technický pokrok. Každá změna v technických koeficientech se jeví jako strukturální změna, tj. jako změna základních vztahů v modelu, a nutí model přeformulovat. Tento nedostatek je zvlášť citelný při aplikacích v perspektivním plánování a při dlouhodobých prognózách. Je proto pochopitelná snaha o dynamizaci strukturních modelů. Jde vlastně o to zavést čas jako explicitní proměnnou modelu. Návrhů na dynamické modely bylo mnoho; my se omezíme jen na stručný výklad některých z nich. Abychom však pochopili složitost problematiky a potíže, na které se při konstruování takových modelů naráží, všimneme si nejdříve některých důležitých momentů vývoje.

Obecně se předpokládá, že hlavním pramenem změn v technologii jsou investiční výstavba, nové stroje a zařízení s pokrokovými parametry. Proto mají investice ve všech dynamických modelech významné místo. Jde v nich o to vyjádřit, jak část produkce, určená v určitém období na investice, ovlivňuje meziodvětvové toky v následujících obdobích.

První potíž spočívá v tom, že mechanismus působení investic je podstatně složitější než běžná transformace výrobních činitelů na výsledný produkt a je podstatně méně prozkoumán. Zajímá nás především, jaké požadavky na výrobní činitele kladou samy investice. Na první pohled vidíme, že pro menší opakovatelnost a menší stejnorodost jsou to vztahy složitější než u spotřeby pracovních předmětů v běžném provozu, a je otázka, zda tu vystačíme s lineárními funkcemi.

Sám proces investování se dále rozprostírá na kratší či delší (někdy i mnohaleté) období. Mezi dobou investování a uvedením investic do normálního provozu je kratší či delší časový posuv. Jak doba výstavby, tak i uvedený časový posuv závisí přitom nejen na druhu a rozměrech investic, ale i na mnoha činitelích, jejichž kvantitativní vyjádření činí potíže (např. činitel organizační, disponibilita různých prostředků a kvalifikovaných sil aj.) a které se stávají teprve v poslední době předmětem zkoumání.*)

Konečně účinnost výstavby, tj. vliv nového objektu na meziodvětvové toky, se dá často velmi těžko odhadnout, zejména u investic vývojových, kde se uplatňují nové, dosud nevyzkoušené prvky.

Dosud jsme předpokládali, že jediným pramenem technologických změn jsou nové základní fondy. Ve skutečnosti tomu tak ovšem není. Stále větší význam mají pro výrobu věda, výzkum a vývoj, jejichž výsledky se projevují nejen v nových, dokonalejších strojích a technologických postupech, ale i v nových zdrojích energie, v nových hmotách apod., které mají často revoluční význam. Projevují se také v racionalizaci výroby a ve zdokonalení organizace práce, které mohou mít na technické koeficienty (zejména na koeficienty spotřeby práce) větší vliv než nové stroje.

Pojem investic by se měl pro dynamický model chápat poněkud šíře. Pod tento pojem by se měly zahrnout i investice vynakládané na činitele, jako je školství, věda, výzkum, vývoj, ale i člověk. Stanovit kvantitativní vztahy mezi takto chápanými investicemi a technologickými vztahy v širším smyslu slova (tj. změnami v meziodvětvových tocích) je věc nesmírně složitá – jednak pro značný časový posuv (např. výchova kvalifikovaného odborníka trvá několik let a výsledky této výchovy se pak projevují v průběhu několika desetiletí), jednak proto, že velmi často jde o vztahy zprostředkované (zejména u základního výzkumu). Zatím se uskutečňují jenom nesmělé pokusy o kvantitativní vyjádření vztahů mezi náklady na výzkum a vývojem výroby.

Konečně je třeba dodat, že u dynamických modelů je otázka zaměnitelnosti ještě závažnější než u modelů statických. Vývoj, zejména v současné době, se např. projevuje velmi často v záměně jedněch materiálů za jiné.

Na druhé straně je třeba si povšimnout, že ve statickém modelu jsou investice cizorodým prvkem a jejich zařazení do statického modelu vede k určitým rozporům. Předpokládejme pro jednoduchost, že jde jenom o investice do základních fondů. Vzhledem k dlouhému cyklu obnovy základních fondů nelze zřejmě jejich opotřebení považovat za součást běžné výrobní spotřeby. Nelze tedy potřebu základních fondů na jednotku produkce zahrnout do technických koeficientů. Investice jsou ve statickém modelu nutně exogenním činitelem. Na straně výroby, tj. v jednotlivých řádkách strukturní matice, jsou investiční statky součástí finální produkce a na straně spotřeby, tj. ve sloupcích, patří mezi primární činitele.

Bylo by možno se pokusit určit potřebu investic stejným způsobem jako potřebu jiných primárních činitelů, např. obdobně jako potřebu práce (viz čl. 15.7). Narážíme tu však na jednu potíž vyplývající přímo z povahy statického modelu: Předpokládejme, že známe objem základních fondů v členění podle odvětvového původu, potřebných na výrobu produkce $\mathbf{X}$. Označme F_{ij} množství základních fondů, pocházejících z i-tého odvětví a potřebných k výrobě produkce X_j v j-tém odvětví. Pak je možno podobně jako u jiných primárních činitelů definovat měrné koeficienty

$$b'_{ij} = \frac{F_{ij}}{X_j},$$

které udávají, kolik základních fondů původem z i-tého odvětví je nutných k výrobě jednotky produkce v j-tém odvětví. Nazveme je koeficienty základních fondů (v západní literatuře mají název kapitálové koeficienty). Jestliže je zadán vektor produkce $\mathbf{X}$, pak je možno ze známých koeficientů b'_{ij} vypočíst celkovou potřebu základních fondů podle odvětví původu. Vektor základních fondů $\mathbf{F}$ je zřejmě dán vztahem

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}'\mathbf{X},$$

kde

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{m1} & b'_{m2} & \dots & b'_{mn} \end{bmatrix}$$

je maticí koeficientů základních fondů. (Počet řádků m v matici $\mathbf{B}'$, a tedy i rozměr vektoru $\mathbf{F}$ je menší než n, neboť základní fondy vyrábějí pouze odvětví prvního oddělení. Formálně je ovšem možno dosáhnout vždy $m = n$ zavedením potřebného počtu nulových koeficientů.)

Vycházíme-li z relace $\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$, můžeme na finální produkci formálně vztahovat i koeficienty základních fondů, tj. určit i zde „úplné“ koeficienty, koeficienty vyjadřující přímou i vyvolanou potřebu základních fondů potřebných na jednotku finální produkce. Násobíme-li totiž hořejší relaci zleva maticí $\mathbf{B}'$, máme

$$\mathbf{B}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y};$$

potřeba základních fondů na finální produkci $\mathbf{y}$ činí podle toho

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y} \tag{16.1}$$

To znamená, že prvky matice $\mathbf{B}'(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ udávají, jaké množství základních fondů (přímých i vyvolaných) je nutných na jednotku finální produkce.

Avšak tento vztah, tj. maticová rovnice (16.1), platí jako identita pouze pro období, z něhož byly koeficienty b'_{ij} odvozeny. Nelze je však extrapolovat na následující období, tj. nelze jich použít např. k plánování investic. I když nepřihlížíme k závažným námitkám proti koeficientům b'_{ij} (viz čl. 16.4), vadí tu okolnost, že výroba základních fondů, která má krýt zvýšenou potřebu těchto fondů na vyšší plán finální produkce, stává se sama částí finální produkce. O tuto část je pak třeba

---

*) Tak např. u tzv. metod kritické cesty se mj. zkoumá efekt časového posunutí (v tom či onom směru) dílčích úseků výstavby na celkovou dobu výstavby, na náklady výstavby i na návratnost investic.

plánovanou finální produkci zvýšit.*) Potřebu základních fondů by pak bylo třeba vypočíst na základě takto zvětšeného plánu finální produkce a celou úvahu pak můžeme opakovat. Jinými slovy, investice nelze považovat za činitel exogenní.

Je tedy zřejmé, že i při silně zjednodušených předpokladech je možno na základě statického modelu potřebu investic určit jenom aproximativně.

16.2 Leontěvův dynamický model

Ve statických modelech se zkoumá struktura produkce, resp. vzájemná závislost mezi složkami produkce v určitém období, za předpokladu, že výroba je stacionární, neměnná. Dodávky pro investice jsou považovány za dodávky do autonomního sektoru a neuvažuje se o jejich vlivu na výrobu v dalších obdobích. V Leontěvově dynamickém modelu se vzájemné dodávky výrobních odvětví v určitém období dělí na dvě části: na část spotřebovanou na běžnou výrobu daného období a na část určenou k zvýšení výroby, tj. na část investovanou.**)

Bilance produkce i-tého odvětví ($i = 1, 2, \ldots, n$) za určité období bude mít tedy tvar

$$X_i(t) = x_{i1}(t) + x_{i2}(t) + \ldots + x_{in}(t) + z_{i1}(t) + \\ + z_{i2}(t) + \ldots + z_{in}(t) + y_i(t), \tag{16.2}$$

kde symbolem t jsme označili období (t může tedy nabýt jen celých hodnot).

Přitom $X_i(t)$ je celková produkce v t-tém období; $x_{ij}(t)$ je dodávka i-tého odvětví j-tému odvětví ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) na běžnou výrobní spotřebu v t-tém období;

$z_{ij}(t)$ je dodávka i-tého odvětví na investice v j-tém odvětví v t-tém období;

$y_i(t)$ je finální produkt i-tého odvětví v t-tém období.

Stejně jako ve statickém modelu se předpokládá i zde, že výrobní činitele vcházejí do produktu v pevných proporcích. Platí

$$x_{ij}(t) = a_{ij}X_j(t), \tag{16.3}$$

kde technický koeficient a_{ij} je konstanta.

Předpokládá se dále, že podobný vztah jako mezi výrobou a výrobní spotřebou platí i mezi přírůstkem výroby v daném odvětví a tokem investic do daného odvětví. To znamená, že

$$z_{ij}(t) = b_{ij}\Delta X_j(t) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{16.4}$$

kde $\Delta X_j(t) = X_j(t + 1) - X_j(t)$ je přírůstek produkce v j-tém odvětví za jedno období.

Čísla b_{ij} jsou konstanty úměrnosti, které nazveme investičními koeficienty. Konkrétně koeficient b_{ij} znamená to množství investic vyrobených v i-tém odvětví, jehož je zapotřebí, aby se v j-tém odvětví zvýšila výroba o jednu jednotku.

Dosadíme-li (16.3) a (16.4) do bilančních rovnic (16.2), dostaneme

$$X_i(t) = a_{i1}X_1(t) + a_{i2}X_2(t) + \ldots + a_{in}X_n(t) + b_{i1}\,\Delta X_1(t) + \\ + b_{i2}\,\Delta X_2(t) + \ldots + b_{in}\,\Delta X_n(t) + y_i(t)$$

nebo

$$X_i(t) = a_{i1}X_1(t) + a_{i2}X_2(t) + \ldots + a_{in}X_n(t) + \\ + b_{i1}[X_1(t + 1) - X_1(t)] + b_{i2}[X_2(t + 1) - X_2(t)] + \\ + \ldots + b_{in}[X_n(t + 1) - X_n(t)] + y_i(t) \tag{16.5}$$

Je to tzv. diferenční rovnice. Soustava těchto n diferenčních rovnic (pro každé odvětví máme jednu rovnici) tvoří právě dynamický meziodvětvový model.

Převedeme-li v rovnicích typu (16.5) všechna X_i na levou stranu, dostaneme po úpravě tento běžný tvar dynamického modelu ve tvaru lineárních diferenčních rovnic nehomogenních:

$$\begin{aligned}
&b_{11}X_1(t + 1) + b_{12}X_2(t + 1) + \ldots + b_{1n}X_n(t + 1) - \\
&- (1 - a_{11} + b_{11})\,X_1(t) + (a_{12} - b_{12})\,X_2(t) + \ldots + \\
&+ (a_{1n} - b_{1n})\,X_n(t) = -y_1(t) \\
&b_{21}X_1(t + 1) + b_{22}X_2(t + 1) + \ldots + b_{2n}X_n(t + 1) + \\
&+ (a_{21} - b_{21})\,X_1(t) - (1 - a_{22} + b_{22})\,X_2(t) + \ldots + \\
&+ (a_{2n} - b_{2n})\,X_n(t) = -y_2(t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (16.6) \\
&b_{n1}X_1(t + 1) + b_{n2}X_2(t + 1) + \ldots + b_{nn}X_n(t + 1) + \\
&+ (a_{n1} - b_{n1})\,X_1(t) + (a_{n2} - b_{n2})\,X_2(t) + \ldots - \\
&- (1 - a_{nn} + b_{nn})\,X_n(t) = -y_n(t)
\end{aligned}$$

Stručně můžeme tuto soustavu psát též ve tvaru

$$\mathbf{B}\mathbf{X}(t + 1) - (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{X}(t) = -\mathbf{y}(t), \tag{16.6a}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice n-tého řádu,

$\mathbf{A}$ — matice technických koeficientů,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

je tzv. matice investičních koeficientů.

---

*) Nepřihlíželi jsme přitom pro jednoduchost ani k tomu, že základní fondy potřebné v určitém období se vyrábějí z velké části v předchozích obdobích.

**) Pojem investice je tu chápán šíře než obvykle; zahrnují se sem nejen investice do základních fondů, ale též investice do zvýšené potřeby zásob pracovních předmětů.

Dále

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

jsou vektory celkové produkce, resp. finální produkce v t-tém období.*)

V dynamickém Leontěvově modelu se předpokládá, kromě znalosti technických koeficientů (které jsou stejné jako ve statickém modelu), též znalost investičních koeficientů. Z povahy věci přitom plyne, že investiční koeficienty jsou nezáporné ($b_{ij} \geqq 0$).

Řešením dynamického modelu se rozumí celková produkce jednotlivých odvětví pro jednotlivá po sobě jdoucí období. Předpokládá to ovšem znalost $y_i(t)$, tj. znalost vývoje finální produkce (např. na základě odhadu budoucí poptávky).

Leontěvův dynamický model je znám ještě i v jiné podobě, třeba méně realistické, a to ve formě soustavy lineárních diferenciálních rovnic. Předpokládá se přitom, že výroba v jednotlivých odvětvích je spojitou diferencovatelnou funkcí času.**)

Soustava diferenciálních rovnic tvořících Leontěvův model má tvar

$$\begin{aligned} (1-a_{11})X_1(t) - a_{12}\,X_2(t) - \ldots - a_{1n}X_n(t) - b_{11}\dot{X}_1(t) - b_{12}\dot{X}_2(t) - \ldots - b_{1n}\dot{X}_n(t) &= y_1(t) \\ -a_{21}X_1(t) + (1-a_{22})X_2(t) - \ldots - a_{2n}X_n(t) - b_{21}\dot{X}_1(t) - b_{22}\dot{X}_2(t) - \ldots - b_{2n}\dot{X}_n(t) &= y_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad & (16.7) \\ -a_{n1}X_1(t) - a_{n2}X_2(t) - \ldots + (1-a_{nn})X_n(t) - b_{n1}\dot{X}_1(t) - b_{n2}\dot{X}_2(t) - \ldots - b_{nn}\dot{X}_n(t) &= y_n(t) \end{aligned}$$

nebo stručně

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{y}(t) \qquad (16.7a)$$

Zde ovšem proměnná t už neznamená období, ale čas a může nabýt jakýchkoli reálných hodnot.

$X_i(t)$ znamená zde intenzitu výroby (nebo výrobní tok) v čase t.)***

---

*) Vektory jsme definovali jako uspořádané soustavy reálných čísel, které jsou souřadnicem vektoru. Zde však jsou souřadnicemi vektoru funkce. Je to tedy zobecnění pojmu vektor. Tímto zobecněním se však nemění pravidla, jimiž se řídí elementární operace s vektory.

**) To je však silně napadatelný předpoklad, neboť výroba je většinou sledem řady diskrétních operací.

***) Je to pojem podobný pojmu okamžikové rychlosti ve fyzice, je to mezní hodnota poměru produkce a času. Je-li intenzita výroby konstantní, pak je to produkce za jednotku času (za jedno období). Obecně dostaneme produkci za určitý časový interval (0, T) jako

$$\int_0^T X_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Podobně $y_i(t)$ znamená intenzitu finální produkce v čase t.

Tečkou nad symbolem X jsme označili jako ve fyzice první derivaci podle času, tj.

$$\dot{X}_i(t) = \frac{dX_i(t)}{dt}$$

Soustavy rovnic (16.6), popř. (16.7) představují otevřený dynamický model, ve stejném smyslu, jako jsme mluvili o otevřeném statickém modelu. Podobně jako tam lze i dynamický model uzavřít, víme-li, jaké jsou funkční vztahy mezi $\mathbf{y}(t)$ a $\mathbf{X}(t)$. Máme-li např. mezi autonomními odvětvími pouze domácnosti, jde-li tedy veškerá finální produkce do domácností na spotřebu a investice (což jsou v daném případě předměty dlouhodobého užívání a zásoby), pak můžeme soustavu uzavřít pomocí spotřebních funkcí. Za předpokladu, že spotřeba je přímo úměrná pracovním důchodům (což je produkce domácností), můžeme v uvedených modelech zahrnout domácnosti jako další výrobní odvětví. Odpadne tím v příslušných modelech $\mathbf{y}(t)$. Uzavřený dynamický model bude pak mít tvar

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X}(t) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{0}, \qquad (16.8)$$

což je soustava homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty; ve formě diferenčních rovnic bude mít popř. tvar

$$\mathbf{B}\,\mathbf{X}(t+1) - (\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \qquad (16.9)$$

16.3 MODIFIKACE LEONTĚVOVA MODELU

Po Leontěvovi se pokusilo o konstrukci dynamických modelů více autorů. Většina jich přitom navazuje přímo na model Leontěvův, který jen v některých směrech upravuje.*) Jedním ze zjednodušení popsaných modelů je předpoklad, že investice mají okamžitý účinek (resp. že se jejich účinek projevuje hned v následujícím období). Ve skutečnosti, jak jsme již uvedli, nelze u investic zanedbat časový posuv (lag). Tento časový posuv, totiž období, které uplyne od okamžiku investování (pokud lze o okamžiku investování vůbec mluvit, jde-li o proces rozložený v čase) až k okamžiku, kdy se investice projevuje v růstu výroby, bývá různě dlouhý (někdy i deset let a více). Dále účinek nové investice trvá v průběhu mnoha období.

Časový posuv je právě jedním z momentů, na který se zaměřují modifikace Leontěvova modelu. Sám Leontěv bral v upraveném dynamickém modelu tento posuv v úvahu.

---

*) Stručný přehled o dynamických modelech obsahuje Výzkumná práce č. 50 Výzk. ústavu národohospodářského plánování, Praha 1963 (interní tisk cyklostylovaný).

O. Lange bere zase ve svém modelu v úvahu životnost investic (dobu jejich upotřebitelnosti). Jde mu přitom o tuto úvahu: Chceme-li dosáhnout růstu výroby v následujícím období, musíme investovat. Tyto investice pak ovšem působí řadu let, a proto na přírůstek výroby v následujícím období připadá jenom alikvotní část těchto investic. Označme jako dříve objem investic dodaných z i-tého odvětví do j-tého odvětví v období t $z_{ij}(t)$ a T_{ij} nechť je průměrná doba upotřebitelnosti těchto investic, vyjádřená třeba v létech. Pak se za jeden rok spotřebuje část těchto investic v objemu $z_{ij}(t)/T_{ij}$. A právě tato část má být úměrná přírůstku produkce v následujícím období, tj. rozdílu $[X_j(t + 1) - X_j(t)]$. Silným předpokladem u Langeho dále je, že koeficient úměrnosti je zde stejný jako mezi výrobou a výrobní spotřebou v uplynulém období, tj. že je to technický koeficient a_{ij}. Tím se dostáváme ke vztahům

$$\frac{z_{ij}(t)}{T_{ij}} = a_{ij}[X_j(t + 1) - X_j(t)],$$

$$z_{ij}(t) = a_{ij}T_{ij}[X_j(t + 1) - X_j(t)]$$

Srovnáváme-li je se vzorcem (16.4), vidíme, že jediná změna oproti Leontěvovu dynamickému modelu je v tom, že investiční koeficienty se tu rovnají součinu technických koeficientů a průměrných dob upotřebitelnosti investic

$$b_{ij} = a_{ij}T_{ij}$$

To je sice výhodné, neboť doby upotřebitelnosti investic lze určit snadněji než přímo investiční koeficienty, avšak předpoklad, z něhož tento důsledek plyne, není dost realistický. I když zde chápeme investice šířeji – jako akumulaci základních i oběžných fondů – pak předpoklad, že přírůstek produkce a přírůstek výrobní spotřeby jsou ve stejném poměru jako produkce a výrobní spotřeba (chápaná zde ovšem včetně spotřeby základních fondů) v uplynulém období, znamená přinejmenším, že technická úroveň investic se rovná průměrné úrovni existujících fondů.

Pomíjíme zde otázku řešení dynamických modelů popsaných výše. Potřebný matematický aparát přesahuje totiž rámec této učebnice.

16.4 INVESTIČNÍ KOEFICIENTY

Základem dynamických modelů, které jsme popsali, je existence stálých investičních koeficientů. Znamená to předpoklad, že změna produkce v určitém odvětví je přímo úměrná investicím (specifikovaným podle odvětvové provenience) do tohoto odvětví. Tento předpoklad nepřipouští ani v investicích záměnu (substituci). Není to předpoklad úplně realistický. V určitém ohledu ho korigoval sám Leontěv. Tak například v případě, že produkce v některém odvětví klesá, vychází podle (16.4) v tomto odvětví investice záporná (tj. desinvestice), úměrná poklesu výroby. Ve skutečnosti tomu tak obvykle není. Jestliže některé výrobní odvětví upadá, dojde obvykle k nevyužití základních fondů, nikoli k jejich okamžité likvidaci (třeba odprodejem) v poměru k poklesu výroby.

Obecněji, je zřejmé, že předpoklad přímé úměrnosti přírůstku produkce a investic zahrnuje v sobě i předpoklad úplného využití kapacit (popř. předpoklad nějaké standardní míry využití kapacit). Je totiž jasné, že růst produkce je možný i bez investic, jestliže se předtím kapacit dostatečně nevyužilo. Přitom sám pojem kapacita zařízení je ve většině případů do značné míry relativní. Kapacita totiž většinou není určena jenom technickými parametry zařízení, nýbrž závisí též na pracovním režimu. Je známo, že vhodnou dělbou práce, vhodnými racionalizačními opatřeními apod. je možno kapacity zařízení rozšířit. Konečně u složitých zařízení bývá kapacita omezena tzv. úzkými místy. Jejich rozšíření může být v mnoha případech investičně velmi nenáročné.*)

Uvedené námitky nepopírají důležitost dynamických modelů jako analytického nástroje. Poukazují spíše na potíže, které bude třeba ještě překonat, potíže související především s pojmem investiční koeficienty.

S konstrukcí investičních koeficientů je zatím málo zkušeností.**) Vycházíme-li z analogie s výpočtem technických koeficientů ve statických modelech, můžeme investiční koeficienty vypočíst podle vzorce

$$b'_{ij} = \frac{F_{ij}}{X_j},$$

kde F_{ij} je střední objem základních fondů pocházejících z i-tého odvětví a fungujících v j-tém odvětví v daném období, X_j je produkce j-tého odvětví v tomto období. Jsou to zřejmě koeficienty základních fondů, o nichž jsme mluvili výše. I když zatím nepřihlížíme k problematice zjišťování těchto koeficientů, je zřejmé, že analogie s výpočtem technických koeficientů má značné nedostatky. Technické koeficienty vypočtené z produkce a výrobní spotřeby za jedno období jsme mohli s určitými výhradami extrapolovat na období následující, popř. na několik dalších období. Vycházeli jsme přitom ze zkušenosti, že struktura výroby se nemění skokem. U základních fondů je však situace poněkud jiná. Základní fondy fungují ve výrobě delší dobu, od několika let až po několik desetiletí. Technická úroveň základních

---

*) Za zmínku stojí, že ani v odvětví tak stejnorodém, jako je energetika, není kapacita úplně určena technickým parametrem (výkonem v kW). Kapacita v ekonomickém smyslu slova závisí též na vhodném propojení celého energetického systému i na pracovním režimu odběratelských odvětví.

**) První matice investičních koeficientů ze silně agregovaných údajů (pro 10 odvětví) byla zkonstruována v USA. Podrobnější matice byly v minulých letech zkonstruovány v SSSR. Suvorov [111] publikuje podrobné údaje o struktuře investic a o investičních koeficientech za Karelskou ASSR podle stavu v letech 1960 až 1961. Investice jsou zde roztříděny podle původu do 51 odvětví.

fondů fungujících v určitém okamžiku odpovídá jakési průměrné technické úrovni za cyklus obnovy těchto fondů. Tak jestliže je např. průměrná doba upotřebitelnosti určitého druhu základních fondů deset let, pak průměrná technická úroveň základních fondů fungujících dnes ve výrobě odpovídá zhruba stavu před pěti lety. Avšak investiční výstavba, která má zaručit růst produkce, se děje vždy na soudobé technické úrovni. Použijeme-li však koeficientů základních fondů b'_{ij} v dynamickém modelu, extrapolujeme tím vlastně technickou úroveň dnes již zastaralou na budoucí období. Přitom je známo, že vývoj základních fondů je v některých odvětvích velmi rychlý, a přitom složitý. Z jedné strany mechanizace a automatizace vedou k růstu nároků na základní fondy na jednotku produkce (ruční práce se čím dále, tím více nahrazuje stroji), z druhé strany zdokonalování strojů a odlehčení konstrukcí snižují potřebu základních fondů na jednotku produkce. To jsou ovšem jen povšechné tendence. Významné vynálezy mohou úplně změnit strukturu a měrnou potřebu základních fondů.

Z uvedených úvah plyne nutně závěr, že postup, jehož jsme použili při výpočtu technických koeficientů, se pro výpočet investičních koeficientů nehodí. Koeficienty základních fondů b'_{ij} mohou dát jen velmi hrubý odhad nároků na investice pro daný plán produkce, zejména u základních fondů s dlouhodobým cyklem obnovy. Nicméně se těchto koeficientů užívá, protože je lze snadněji určit než vlastní investiční koeficienty. Investiční koeficienty v dynamickém modelu znamenají potřebu nových základních fondů na jednotkový růst produkce. Je tedy správné tuto potřebu počítat na základě soudobé úrovně techniky.

Důsledně vzato, je to argument proti konstantním investičním koeficientům vůbec. Mají-li se investiční koeficienty počítat na základě nejnovější techniky, pak je jejich platnost omezena jen na dobu, dokud tato technika není překonána jinou, ještě novější technikou. Z toho plyne, že výsledky, které dává Leontěvův dynamický model, mají přinejmenším časově velmi omezenou platnost.*)

Podle (16.4) je tedy třeba počítat investiční koeficienty podle vzorce

$$b_{ij} = \frac{z_{ij}(t)}{\Delta X_j(t)},$$

kde $z_{ij}(t)$ je objem investic vyrobených v i-tém odvětví v období t-tém, které potřebuje j-té odvětví, má-li tam produkce stoupnout o $\Delta X_j(t)$. Protože jde, jak jsme již uvedli, o investice na soudobé technické úrovni, je možno $z_{ij}(t)$, a tedy i b_{ij} určit – přísně vzato – jen na základě znalostí nejnovější technologie. Příslušné údaje by bylo možno získat například anketou provedenou s odborníky, což je jednak pracné, jednak mohou být získané údaje subjektivní.

---

*) Úvahy o nahrazení konstantních investičních koeficientů proměnlivými mají zatím jen zcela povšechný ráz.

Nepřímo je možno příslušné údaje získat ze statistik za dvě po sobě jdoucí období (získáme tím ovšem koeficienty za uplynulé období).

16.5 STATISTICKÉ ZJIŠŤOVÁNÍ INVESTIČNÍCH KOEFICIENTŮ

Výpočet investičních koeficientů i koeficientů základních fondů pro mnohaodvětvový model vyžaduje velmi podrobné informace o základních fondech, jaké nelze získat z běžné evidence (nevyhovuje zde ani klasifikace, ani ocenění základních fondů). Výchozím materiálem pro výpočet koeficientů základních fondů v SSSR byly údaje o generální inventarizaci základních fondů (která se ovšem provádí jen jednorázově).*) Avšak ani tyto údaje plně nevyhovují a výpočet se neobejde bez řady přepočtů i odhadů. Uvedeme zde jenom hlavní problémy, na které se při výpočtu koeficientů naráží.

Především je tu problém využití kapacit, o němž jsme se už zmínili. Aby koeficienty základních fondů mohly dát jen orientaci v problematice plánování investic, musí být základní fondy vztaženy na produkci odpovídající plnému využití kapacit. K tomu je třeba kapacitu různých druhů základních fondů určit, a to v jednotkách produkce. Zmínili jsme se už stručně, jak je určení kapacit v mnoha případech problematické.

Při výpočtu koeficientů základních fondů nezbývá často nic jiného než přistoupit na nějakou vhodnou konvenci (týkající se organizace práce, směnnosti i základní definice kapacity), kterou je pak nutno jednotně dodržovat.

Dalším problémem je roztřídění základních fondů podle odvětví, která je vyrábějí, i podle odvětví, v nichž jsou v činnosti. První otázka nečiní zásadních potíží, jsou-li po ruce dosti podrobné údaje. Avšak v podniku, jehož produkce spadá do několika odvětví, nelze každou jednotku základních fondů přiřadit určitému odvětví. Týká se to například budov a staveb, energetických zařízení, zařízení pro vnitropodnikovou dopravu apod. Nezbývá než tyto základní fondy podle určitého klíče rozdělit na jednotlivá odvětví (např. podle podílu jednotlivých odvětví na hrubé produkci). To je již jen určitý způsob odhadu.

Velmi konvenční je v mnoha případech ocenění základních fondů. Pro výpočet koeficientů se hodí zřejmě jen reprodukční ceny, jejichž přesné určení není však v mnoha případech možné.

Z podrobných údajů o základních fondech je pak možno určit jenom koeficienty základních fondů. Aby bylo možno určit investiční koeficienty, bylo by třeba údajů za další období. To je možno zhruba určit výpočtem, jestliže lze současně s údaji o celkovém objemu základních fondů získat údaje o nových základních fondech.

---

*) Podstatně chudším zdrojem informací o základních fondech jsou údaje cenzů ve vyspělých kapitalistických státech.

Jiný přístup k určení investičních koeficientů je vypočíst koeficienty z údajů za nové závody. Tento postup je však možný jen při velmi hrubém odvětvovém třídění, jinak se stane, že u velké části odvětví nebudou nové závody, a nebude tedy možno pro ně určit investiční koeficienty. Dále je tu třeba zkoumat otázku, zda nové závody dostatečně reprezentují celý přírůstek základních fondů.

16.6 ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA K DYNAMICKÉMU MODELU

Základní otázkou u Leontěvova dynamického modelu je určení investičních koeficientů b_{ij}. Jak jsme uvedli, je tyto koeficienty třeba určit podle soudobé úrovně techniky. To je však v rozporu s tím, že se v dynamickém modelu používá konstantních technických koeficientů. Technické koeficienty a_{ij}, vypočtené podle statistických údajů za dané období, jsou jakýmsi průměrem. V každém odvětví pracuje totiž zařízení různé technické úrovně (různého stáří). Rozšiřujeme-li výrobu investicemi do zařízení nejnovější technické úrovně, nebudou pro tuto část výroby platit technické koeficienty uplynulého období, ale nějaké jiné – marginální koeficienty a'_{ij}. Skutečné technické koeficienty v novém období budou průměrem (váženým třeba podíly nových i starých základních fondů) z těchto marginálních koeficientů a ze skutečných koeficientů za uplynulé období. To je základní myšlenka při úpravě Leontěvova dynamického modelu u A. Carterové.*) Zde vyvstává nový technický problém – určení marginálních technických koeficientů. V citované práci se Carterová zabývá také odhadem těchto koeficientů. Prakticky byly však tyto odhady provedeny jen ve velmi omezeném měřítku. (V citované práci je odhad dvou koeficientů – pracnost a spotřeba elektřiny – ve dvou odvětvích.)

Kritický rozbor konstantních technických i investičních koeficientů ukazuje, že Leontěvův dynamický model zdaleka nevystihuje skutečnost a vyžaduje korektury v několika směrech. Z druhé strany však řada úprav původního Leontěvova modelu komplikuje jednak statistické naplnění modelu, jednak ho činí těžkopádným pro operativní rozhodování.

Poněkud jinou a zdá se realističtější cestou postupuje při konstrukci dynamického meziodvětvového modelu R. Frisch a jeho škola. V další kapitole je uveden stručný popis tzv. modelu „Oslo“.**)

---

*) Carter, A. P.: Incremental Flow Coefficients for a Dynamic Input-Output Model ve Sborníku [6].

**) Své názory na meziodvětvové modelování a na plánování publikoval R. Frisch v řadě prací vydávaných ve formě rozmnožených memorand universitou v Oslo. Následující výklad je založen v podstatě na dvou takových memorandech, a to:

a) Frisch, R.: A Survey of Types of Economic Forecasting and Programming and a Brief Description of the Oslo Channel Model. Oslo, 1961.

b) Frisch, R.: An Implementation System for Optimal National Economic Planning without Detailed Quantity Fixation from a Central Authority. Oslo, 1963.

KAPITOLA 17 MODEL „OSLO“

17.1 ZÁKLADNÍ ZÁSADY MODELU „OSLO“

Model „Oslo“ byl konstruován výslovně pro účely národohospodářského plánování.*)

Dříve než přejdeme k popisu tohoto modelu, je třeba uvést některé základní myšlenky, z nichž vychází.

Při plánování není správné vycházet z apriorně stanovených cílů, jichž se má dosáhnout. Jednak se může ukázat, že tyto cíle nejsou konzistentní s omezeními, která máme, tj. že jsou nad naše možnosti (surovinové, kapacitní, pracovní atd.), jednak, i v případě konzistence, apriorně stanovené cíle nemusí být a (zpravidla nejsou) optimální. Vycházíme-li z apriorně stanovených cílů, pak musíme dodatečně zkoumat, zda tyto cíle nepřesahují rámec daný omezenými zdroji národního hospodářství. To se však podobá „bloudění v mlze“.

Správně má plán vycházet ze struktury národního hospodářství, tj. z nezbytných souvislostí a zákonitostí daného hospodářství. Pro zkoumání struktury národního hospodářství a k určení optimální varianty v rámci dané struktury a při daných kritériích (preferencích) se hodí matematické prostředky.

Při reálném plánování nelze se spoléhat jenom na technické koeficienty. Inverze matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ může dát nejvýše jen hrubou orientaci. Nepřihlíží se přitom totiž k možnosti substituce, k omezenosti kapacit, popř. k jiným podmínkám (např. k dolním mezím výroby u některých odvětví).

Matematika nemůže nahradit vedoucí kádry, jejich schopnosti a intuici (matematický model, který by zahrnul všechny činitele, byl by nezvladatelný), může však podstatně posunout hranici, kde má zasahovat schopný vedoucí.

Frisch zásadně rozlišuje mezi tzv. selekčním modelem a prováděcím (implementačním) modelem.

Selekční model je vlastní popis vzájemných vztahů v národním hospodářství, bez ohledu na existující instituce. Ze selekčního modelu vyplývá, jaké varianty

---

*) Prof. Frisch je jedním z nejhorlivějších propagátorů národohospodářského plánování na Západě.

dalšího vývoje jsou vůbec možné. Zvolíme-li v rámci těchto možností jednu variantu jako optimální (na základě určitých kritérií), pak nastává tzv. prováděcí problém (implementation problem), tj. otázka, jakými nástroji a institucemi lze daný plán realizovat. Ukáže-li se například, že při daných institucích (vlastnických, organizačních apod.) není možno cíle plánu uskutečnit, je nutno přistoupit buď ke změně institucí, nebo ke změně plánu. V dalším výkladu se budeme zabývat jenom selekčním modelem.

Model Oslo je konstruován tak, aby jej bylo možno podle potřeby zjednodušit agregací různých položek nebo rozšířit zaváděním dalších klasifikačních hledisek a desagregací.

Podstatný rozdíl modelu Oslo proti předchozím modelům tkví v tom, že výslovně vychází z reálného předpokladu možnosti substituce. Místo obyčejných technických koeficientů, vyjadřujících potřebu určitého zdroje na jednotku daného produktu, se v modelu Oslo zavádějí tzv. substituční okruhy (substitution ring). Tím se model sice do jisté míry komplikuje (jak uvidíme níže), není už lineární – má však více stupňů volnosti. Tím je umožněno zavést do modelu prvky programování, tj. optimalizace.

Dále je podstatný rozdíl ve způsobu, jak jsou investice zařazeny do modelu. Investice jsou klíčovým prvkem rozhodovacího procesu a přesné určení druhů investic je základní otázkou, o níž se má na úrovni národního hospodářství rozhodovat. Je proto nesprávné považovat investice za agregovanou veličinu (jako např. úspory) a je nezbytné uvažovat o různých kategoriích investic. V modelu Oslo se investice klasifikují podle určitých hledisek (která se dají podle praktických potřeb měnit) na jednotlivé „investiční kanály" (podle Frische je vhodné rozlišovat 30 až 100 kanálů). Při zařazení investic do modelu se berou v úvahu čtyři charakteristiky, a to doba spuštění (starting), provozní aktivita (carry-on activity), tj. spotřeba činitelů na vlastní investice, dále kapacitní efekt, tj. přírůstek kapacit v důsledku investic, a konečně vliv investic na technické koeficienty (infraefekt).

17.2 SUBSTITUČNÍ OKRUHY

V Leontěvově modelu jsou produkce j-tého odvětví (X_j) a spotřeba výrobků i-tého odvětví na tuto produkci svázány vzorcem

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \tag{17.1}$$

kde a_{ij} je konstanta – technický koeficient. Zmínili jsme se už na několika místech o tom, že tento vzorec ve skutečnosti obecně neplatí. Obecně není produkcí jednoznačně určena výrobní spotřeba. Nelze totiž vždy říci, že na výrobu jednotky A se spotřebuje určité množství B; v obecném případě bude spíše platit, že na výrobu jednotky A se spotřebuje buď určité množství B, anebo nějaké jiné množství C, popřípadě jiná určitá množství D, E atd. Stručně říkáme, že různé zaměnitelné suroviny patří do jednoho substitučního okruhu. Typickým příkladem je spotřeba energie. Na výrobu určitého výrobku je třeba jistého množství energie. Tato energie může být získána z pevných, kapalných nebo plynných paliv. Může to být hydroenergie, jaderná energie, popřípadě i svalová energie (práce). V současné době jsou ovšem široké možnosti záměny nejen ve spotřebě energie, ale i ve spotřebě různých surovin a materiálů. Existuje-li možnost záměny, pak tím zřejmě vzroste počet stupňů volnosti soustavy. Místo jednoduché rovnice (17.1), svazující výrobu určitého výrobku se spotřebou určité suroviny, dostaneme rovnici svazující výrobu daného výrobku a spotřebu zaměnitelných surovin (tzv. ring equation u Frische). Aby v takovém případě byla spotřeba některé suroviny jednoznačně určena, je k tomu třeba autonomně stanovit nejen výrobu příslušného výrobku, ale i spotřebu surovin, jež přicházejí v úvahu.

Zachováváme-li předpoklad linearity vztahů mezi výrobou a výrobní spotřebou, pak místo jednoduché rovnice (17.1) budeme mít obecně tuto tzv. okružní rovnici (ring equation):

$$\sum_i a_{ij}^{(r)} x_{ij} = a_{rj} X_j;\text{*)} \tag{17.2}$$

Zde význam symbolů X_j a x_{ij} je stejný jako předtím, konstanta a_{rj} je obdobou technických koeficientů, ovšem v daném případě už nikoli ve vztahu k určitému dodavatelskému odvětví, ale ve vztahu k určitému substitučnímu okruhu (první index r znamená okruh). Koeficienty $a_{ij}^{(r)}$ jsou konstanty, tzv. ekvivalenční koeficienty. Sumace na levé straně se vztahuje na všechna i (tj. na všechny možné dodavatele daného substitučního okruhu).

Pro každé odvětví spotřebovávající produkty jiných odvětví existuje určitý počet takových substitučních okruhů definovaných rovnicemi tvaru (17.2). Obecně bude těchto rovnic méně než rovnic tvaru (17.1) v otevřeném Leontěvově modelu. Proto také počet stupňů volnosti v nich bude větší než n (jak tomu bylo v otevřeném Leontěvově modelu).

Zatímco v Leontěvově modelu bylo možno všechny proměnné vyjádřit jako funkci n vybraných proměnných (např. produkcí n odvětví), je zde možno volně vybrat $v > n$ proměnných, např. n produkcí a $v-n$ vstupů (tzv. referenční vstupy) a vyjádřit všechny proměnné jako jejich funkce.

Obecně je tedy možno okružní rovnice (17.2) transformovat na tvar

$$x_{ij} = \sum_k a_{ijk} X_k + \sum_{\alpha\beta} a_{ij\alpha\beta} x_{\alpha\beta}, \tag{17.3}$$

kde první součet se vztahuje na všechna odvětví (k) a druhý na všechny referenční vstupy ($\alpha\beta$).

---

*) Navazujeme zde na symboliku předchozích odstavců, a pomíjíme proto poněkud nezvyklou symboliku Frischovu. Pro jednoduchost vynecháme zatím také index t (čas), neboť zatím nám nejde o dynamický problém.

Prostá rovnice $x_{ij} = a_{ij}X_j$ je zvláštním případem rovnice (17.3) pro případ, kdy neexistuje možnost substituce. Dostaneme ji z rovnice (17.3), položíme-li $a_{ijk} = a_{ij}$ pro $k = j$, $a_{ijk} = 0$ pro $k \neq j$ a $a_{ij\alpha\beta} = 0$ pro všechny dvojice indexů (ij) i $(\alpha\beta)$.

Protože i ve spotřebě domácností ,stejně jako i ve spotřebě správy, jsou možnosti substituce, je i pro tyto spotřeby možno zkonstruovat okružní rovnice tvaru (17.3).

Zavedením substitučních okruhů se zkomplikuje pochopitelně model. Jsou-li však po ruce údaje o možnostech substituce, je to pouze otázka výpočtová. Z druhé strany ignorovat možnosti substituce znamená ochuzení modelu a značné omezení možnosti volby (a tím i možnosti optimalizace), která ve skutečnosti existuje.

17.3 INVESTICE V MODELU „OSLO“

Různé investice se navzájem liší někdy velmi podstatně z mnoha hledisek. Není proto přípustné zařadit investice do modelu globálně a je nutno rozlišovat různé kategorie investic. Jinými slovy, diskuse problematiky investic má začít klasifikací investic. V modelu Oslo se rozlišují tzv. investiční „kanály“. Investiční kanál je určitá třída investic charakterizovaných společnými znaky. V teoretickém modelu se klasifikační znaky nespecifikují (to se přenechává praktické konvenci), jenom se předpokládá jejich existence a to, že v každém kanálu existuje zásoba projektů. V určitém kanálu jsou všechny charakteristiky investic již zprůměrovány. Počet kanálů, do nichž se všechny investice přicházející v úvahu roztřídí, se může řídit podle praktických potřeb a možností. Pro velké jedinečné projekty je vhodné rezervovat samostatný kanál.

Vtělením investic se model dynamizuje. To se u všech veličin vyznačuje dalším indexem (obecně indexem t), který se píše vpravo nahoře a značí příslušné období. Např. X_j^t znamená produkci j-tého odvětví v období t. Podobně a_{ij}^t znamená příslušný technický koeficient platný v období t.

Jako rozhodovací proměnné se do modelu zavádějí: objem investic specifikovaný podle jednotlivých investičních kanálů i podle doby zahájení výstavby investice (investment starting). Symbolem H_g^d se označuje v modelu celkový objem investic z kanálu g, jejichž začátek je načasován na d-té období od počátku programu (plánu). Index d tedy vlastně udává časový posuv zahájení výstavby investic od počátku programu. Aby bylo možno správně rozhodovat o velikosti a načasování jednotlivých investic, tj. rozhodovat o číselné hodnotě jednotlivých H_g^d, je třeba analyzovat, jaké budou mít důsledky, a výsledek vyjádřit v modelu. V úvahu přicházejí důsledky trojího druhu:

a) Důsledky pořizování investic (tzv. carry-on activity), tj. spotřeba produktu různých odvětví v době budování investice.

b) Důsledky kapacitní; v důsledku určité investice poroste zpravidla kapacita jednoho odvětví. Důsledkem určité investiční akce může být ovšem i současná změna kapacit několika odvětví, popřípadě žádná taková změna.

c) Vliv investic na technické koeficienty, resp. na okružní strukturu, tj. zmíněný již infraefekt.

Pokud jde o spotřebu produkce jiných odvětví při provádění investic, byl by nejjednodušší předpoklad, že spotřeba je přímo úměrná objemu investic. Tento předpoklad však je, stejně jako v případě provozní spotřeby, omezující. Vylučuje možnost substituce. Je tedy nutno i zde, stejně jako u provozní spotřeby, počítat se substitučními okruhy.

Stejnou úvahou, jakou jsme dospěli ke vzorci (17.3) pro provozní spotřebu, je možno i pro investiční spotřebu transformovat okružní rovnice tak, aby jednotlivé vstupy byly vyjádřeny jako lineární funkce všech investičních akcí a několika vybraných referenčních vstupů. Příslušné vzorce budou mít tvar

$$Z_{ig}^{td} = \sum_{G,D} b_{igG}^{tdD} H_G^D + \sum_{\alpha} \sum_{\Gamma,\Delta} b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta} Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta} \tag{17.4}$$

Zde Z_{ig}^{td} znamená dodávku i-tého odvětví v t-tém období pro investiční akci H_g^d (tj. pro investici objemu H z kanálu g, jejíž zahájení je stanoveno na d-té období). b_{igG}^{tdD} je konstanta; první čtyři indexy $\binom{td}{ig}$ ukazují, že se vztahuje na vstup Z_{ig}^{td}; další dva indexy $\binom{D}{G}$ jsou sumační, tj. ukazují, že se má sumarizovat přes všechny investiční akce, tj. přes všechny kanály (G) a všechny časové posuvy (zahrnutí všech investičních akcí do sumarizace je jenom formální, prakticky bude řada koeficientů b_{igG}^{tdD} rovna nule).

Druhý součet se vztahuje na všechny referenční vstupy (tj. ty, které je možno volit). $Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta}$ znamená referenční vstup v období t-tém z dodávajícího odvětví α do investiční akce H_Γ^Δ a $b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta}$ je příslušná konstanta úměrnosti. Sumarizace se vztahuje na všechny kombinace α, Γ, Δ, které byly vybrány jako referenční vstupy. Všechny koeficienty b se odvozují z projektové dokumentace.

Symbolika a potom i sumarizace se dají poněkud zjednodušit, přijímáme-li celkem realistický předpoklad, že průběh dodávek pro investice nezávisí na okamžiku zahájení výstavby (investice). Nastane-li změna v okamžiku zahájení výstavby (investice), posune se tím jenom celá křivka znázorňující investiční dodávky. Za tohoto předpokladu pak jednotlivé veličiny ve vzorci (17.4) nezávisí zvlášť na indexech t a d, nýbrž pouze na jejich rozdílu (tak např. velikost určité dodávky v období t pro konkrétní investiční akci závisí na tom, jak je referenční období t vzdáleno od období zahájení výstavby (investic) a nezávisí zvlášť na celkem libovolné numeraci referenčního období a období zahájení investiční akce). Lze tedy dvojici indexů t, d nahradit u všech veličin, kde se vyskytují, jediným indexem, jejich rozdílem.

Sumarizací vzorce (17.4) podle všech investičních akcí, tj. podle g a d, dostaneme úhrn dodávek z i-tého odvětví v období t-tém pro investice, které jsou důsledkem našeho rozhodování v daném programu. Tím však nejsou všechny investiční dodávky z *i*-tého odvětví vyčerpány. Je nutno brát v úvahu též investice, které nejsou důsledkem rozhodování v daném programu, tj. investiční akce, které jsou již v běhu, resp. o nichž bylo již dříve rozhodnuto. Stručně budeme mluvit o nerozhodovacích investicích.

Celkové investiční dodávky z *i*-tého odvětví v *t*-tém období Z_i^t se rovnají tedy součtu z dodávek pro nerozhodovací investice $Z_{i)}^t$ a z dodávek pro investice, o nichž se má rozhodovat, tj. ze součtu výrazu (17.4) pro všechny dvojice *g*, *d*. Tedy

$$Z_i^t = Z_{i)}^t + \sum_{G,D}(\sum_{g,d} b_{igG}^{tdD})\, H_G^D + \sum_{\alpha}\sum_{\Gamma,\Delta}(\sum_{g,d} b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta})\, Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta} \tag{17.5}$$

To jsou celkové investiční dodávky z *i*-tého odvětví v období *t*-tém. Rozhodovacími proměnnými v tomto vzorci, tj. proměnnými, o jejichž velikosti je třeba rozhodnout a na nichž pak závisí velikost potřebných investičních dodávek z jednotlivých odvětví, jsou jednak H_G^D, tj. objemy a doby zahájení plánovaných investic, jednak referenční vstupy $Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta}$, jejichž výběr je do jisté míry libovolný.

Výrazy v závorkách vzorce (17.5) jsou konstanty. Podkladem pro jejich určení je projektová dokumentace. Pro kontrolu správnosti výpočtu těchto konstant je možno odvodit zajímavé vztahy. Převedeme-li totiž první člen z pravé strany (tj. $Z_{i)}^t$) na levou, pak zbývající výraz na pravé straně znamená dodávky z *i*-tého odvětví na investice podle daného programu v *t*-tém období. Sečteme-li tento výraz za všechna dodávající odvětví (*i*) a za všechna období přicházející v úvahu (*t*), dostaneme vlastně úhrnný objem investic, o nichž máme podle plánu rozhodovat, tj. součet všech H_G^D. Máme tedy

$$\sum_{G,D}(\sum_{i,t}\sum_{g,d} b_{igG}^{tdD})\, H_G^D + \sum_{\alpha,t}\sum_{\Gamma,\Delta}(\sum_{i}\sum_{g,d} b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta})\, Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta} = \sum_{G,D} H_G^D$$

nebo po úpravě

$$\sum_{G,D}(\sum_{i,t}\sum_{g,d} b_{igG}^{tdD} - 1)\, H_G^D + \sum_{\alpha,t}\sum_{\Gamma,\Delta}(\sum_{i}\sum_{g,d} b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta})\, Z_{\alpha\Gamma}^{t\Delta} = 0$$

Poslední vzorec je identita, která musí platit pro jakékoli hodnoty proměnných. To znamená, že platí

$$\sum_{i,t}\sum_{g,d} b_{igG}^{tdD} = 1 \quad \text{pro všechny dvojice } G,\, D \tag{17.6}$$

a

$$\sum_{i}\sum_{g,d} b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta} = 0 \quad \text{pro každou kombinaci } \alpha,\, \Gamma,\, \Delta \text{ a pro každé období } t. \tag{17.7}$$

Konstanty určené z projektové dokumentace musí splnit všechny vzorce (17.6) a (17.7).

Pokud jde o kapacitní efekt investic, předpokládá se obecně, že daná investice může mít vliv na kapacitu několika odvětví. Přitom se dále předpokládá, že přírůstek kapacit je přímo úměrný objemu dané investice a že účinek různých investic na kapacitu daného odvětví se prostě sčítá. Za těchto předpokladů, které jsou přinejmenším dobrou aproximací skutečnosti, platí

$$K_i^t = K_{i)}^t + \sum_{g,d} k_{ig}^{td} H_g^d, \tag{17.8}$$

kde K_i^t znamená kapacitu (vyjádřenou jako maximální objem produkce) *i*-tého odvětví v období *t*-tém, $K_{i)}^t$ je kapacita téhož odvětví, jaká by byla v období *t*-tém bez nových investic, a k_{ig}^{td} jsou kapacitní koeficienty, tj. koeficienty vyjadřující přírůstek kapacity v *i*-tém odvětví a v *t*-tém období, který je důsledkem investice jednotkového objemu z kanálu *g*, zahájené v *d*-tém období. Tyto kapacitní koeficienty se určují opět z projektové dokumentace.

Největší komplikace v modelu nastávají zaváděním infraefektu investic. V důsledku infraefektu přestává být model lineárním, jak uvidíme níže.

Infraefektem rozumíme, jak jsme již uvedli, modifikační vliv investic na koeficienty modelu. Investice jsou totiž obvykle zaměřeny nejen na rozšíření kapacit, ale i na zvýšení efektivnosti výroby, někdy dokonce jenom na zvýšení efektivnosti výroby. Zvýšení efektivnosti je právě charakterizováno změnou parametrů, tj. změnou konstant modelu. Změny přitom mohou být oboustranné, kladné i záporné. Tak např. určitá investice může mít za následek snížení pracnosti při současném zvýšení energetické náročnosti.

Infraefektu mohou podléhat zásadně všechny konstanty ve vzorcích (17.3), (17.5) a (17.8) i dodávky pro nerozhodovací investice ($Z_{i)}^t$).*) V důsledku infraefektu vlastně všechny uvedené koeficienty přestanou být konstantami a budou závislé na objemu investičních záměrů. Tato závislost je podle předpokladu lineární.

V důsledku infraefektu se mění koeficienty takto:

Ve vzorci (17.3) bude
místo a_{ijk}^t výraz

$$a_{ijk)}^t + \sum_{\gamma,\delta} a_{ij\gamma}^{\prime t\delta} H_\gamma^\delta, \tag{17.9}$$

místo $a_{ij\alpha\beta}^t$ výraz

$$a_{ij\alpha\beta)}^t + \sum_{\gamma,\delta} a_{ij\alpha\beta\gamma}^{\prime t\delta} H_\gamma^\delta \tag{17.10}$$

Ve vzorci (17.5) bude
místo b_{igG}^{tdD} výraz

$$b_{igG)}^{tdD} + \sum_{\gamma,\delta} b_{igG\gamma}^{\prime tdD\delta} H_\gamma^\delta, \tag{17.11}$$

---

*) Že infraefektu podléhají i dodávky $Z_{i)}^t$, vyplývá z toho, že potřebné dodávky pro investice, o nichž bylo již dříve rozhodnuto, závisí na technických parametrech jejich výroby. Tyto parametry se však v důsledku nových investic modifikují.

místo $b_{ig\alpha\Gamma}^{td\Delta}$ výraz

$$b_{ig\alpha\Gamma)}^{td\Delta} + \sum_{\gamma,\delta} b_{ig\alpha\Gamma\gamma}^{\prime td\Delta\delta} H_{\gamma}^{\delta} \tag{17.12}$$

a místo $Z_{i)}^{t}$ výraz

$$Z_{i))}^{t} + \sum_{\gamma,\delta} c_{i\gamma}^{t\delta} H_{\gamma}^{\delta} \tag{17.13}$$

Konečně ve vzorci (17.8) bude místo k_{ig}^{td} výraz

$$k_{ig)}^{td} + \sum_{\gamma,\delta} k_{ig\gamma}^{\prime td\delta} H_{\gamma}^{\delta} \tag{17.14}$$

Dosadíme-li výrazy (17.9) až (17.14) do vzorců (17.3), (17.5) a (17.8) místo konstantních koeficientů, nebudou už uvedené vzorce lineární, bude v nich řada kvadratických členů.

17.4 MODEL

Zatím jsme se zabývali dílčími otázkami Frischova modelu. Můžeme si nyní udělat hrubou představu o modelu vcelku. Jako každý jiný model vychází i Frischův model z požadavku bilanční rovnováhy. Kromě toho se v modelu bere v úvahu i omezenost kapacit, popř. požadavek, že produkce určitého odvětví nesmí klesnout pod danou mez, a jiné požadavky.

Vezměme zjednodušenou bilanční rovnici pro *i*-té odvětví

$$X_i^t = x_{i1}^t + x_{i2}^t + \dots + x_{in}^t + Z_i^t + y_i^t$$

Dosadíme-li do této bilanční rovnice za x_{ij}^t podle vzorce (17.3), v němž jsou konstanty nahrazeny výrazy (17.9) a (17.10), a za Z_i^t podle vzorce (17.5), upraveného podle (17.11) až (17.13), dostaneme zřejmě kvadratickou rovnici.

Podobně bereme-li v úvahu vzorce (17.14), bude mít i kapacitní omezení

$$X_i^t \leqq K_i$$

kvadratický tvar.

Dostaneme tak soustavu kvadratických rovnic a nerovností, v nichž neznámými jsou celkové produkce jednotlivých odvětví, jejich finální produkce, jednotlivé investiční záměry (H_g^d) a v důsledku substitučních možností též vybrané meziodvětvové dodávky a vybrané dodávky na investice (referenční vstupy). Právě v důsledku možnosti záměny má tato soustava větší počet stupňů volnosti (v) než leontěvovská soustava stejného rozměru. Při vhodné úpravě okružních rovnic (vyjadřujících možnost substituce) lze uvedenou soustavu upravit tak, aby všechny proměnné byly vyjádřeny jako kvadratické funkce volných proměnných.*) To znamená, že je možno obecně rovnice soustavy vyjádřit ve tvaru

$$X_i = b_{io} + \sum_j b_{ij} X_j + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k b_{ijk} X_j X_k, \tag{17.15}$$

kde b_{io}, b_{ij}, b_{ijk} jsou konstanty a sčítání se provádí přes všechny volné proměnné.

Dostaneme tak soustavu omezení modelu ve formě kvadratických rovnic.

Poznámka: V modelu jsme brali v úvahu pouze omezení bilanční, kapacitní a technologické. Je však možno zavést do modelu i omezení na straně finální produkce, pokud jsou známy příslušné spotřební funkce. Je konečně možno i u finální produkce zavést substituční okruhy.

S ohledem na větší počet stupňů volnosti existují v této soustavě i v případě, že finální produkce je exogenně určena, různé varianty řešení (teoreticky nekonečně mnoho) a můžeme mezi nimi volit optimální. Kritérium optimalizace je možno volit různě. Volíme-li za kritérium optimalizace nějaký objemový ukazatel (např. maximum spotřebních statků v určitém sortimentu), bude obecně i účelová funkce s ohledem na infraefekt kvadratická.

Jde tedy obecně v modelu Oslo o nalezení extrému kvadratické funkce při kvadratických omezeních.

Model Oslo je výslovně plánovacím modelem. Jeho přístup k problematice plánování je nesporně realističtější než u ostatních modelů. Bere totiž explicite v úvahu řadu důležitých momentů, které je možno do ostatních modelů vtělit jen dosti uměle nebo dodatečnými korekturami. Jde zejména o možnosti záměny při výrobní a nevýrobní spotřebě i při spotřebě investiční, dále o infraefekt investic. Realističtější je též samo pojetí investic.

Z druhé strany však je zřejmé, že model sám je poněkud složitý a jeho řešení je při realistickém rozsahu úlohy problém sám o sobě.**)

Problém však není jenom v řešení modelu. Model klade podstatně větší nároky na výchozí údaje, zejména technologické. Tak konstrukce substitučních okruhů vyžaduje pochopitelně dokonalou znalost možností substituce a kvantitativních poměrů při substituci. Ještě větší nároky na technické údaje klade vymezení investičních kanálů a určení příslušných koeficientů (různých investičních koeficientů

---

*) Frisch užívá termínu základní proměnné (basic variables). Tento termín však může vést k nedorozuměním, protože v lineárním programování jsme pojem základní proměnná zavedli tak říkajíc v opačném smyslu.

**) Např. norská škola věnuje značnou pozornost metodám řešení úloh nelineárního programování.

a koeficientů infra). Předpokládá to existenci zásoby dokonale propracovaných projektů. Jsou to jistě požadavky velmi oprávněné a nesouvisí ani přímo s daným modelem. Každé seriózní plánování by mělo být založeno na takových údajích. Ve skutečnosti však budou v tomto směru značné mezery a daný model se bez uvedených údajů neobejde.

VÝSLEDKY ÚLOH

Cvičení 3.16

1. a) [11, 16, 6, 6], b) [11, 16, 6, 6]
   c) [5, —30, 0, 40], d) [5, —30, 0, 40]

2. $\mathbf{u}^T = [27, 30, 15]$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

   Náklady na suroviny ve výrobku $A = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 = 204$.

3. $\mathbf{a}_1^T = [20, 22, 21]$, $\mathbf{a}_2^T = [18, 0, 20]$, $\mathbf{a}_3^T = [0, 22, 19]$, $\mathbf{x}^T = [60, 10, 40]$
   Program není možný.

4. a), c) Ne.
   b) Ano.

6. Např. v_7, v_8, v_9. Není jediná.

7. a) Ano (3 . 6). b) Ano (5 . 4).

8. P_1 obsahuje 1 920 j. $\check{Z}_1$ a 1 740 j. $\check{Z}_2$,
   P_2 obsahuje 2 040 j. $\check{Z}_1$ a 1 560 j. $\check{Z}_2$,
   P_3 obsahuje 2 070 j. $\check{Z}_1$ a 1 410 j. $\check{Z}_2$,
   P_4 obsahuje 1 880 j. $\check{Z}_1$ a 1 760 j. $\check{Z}_2$.

9. a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; b) neexistuje; c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{-1}$$

11. $\mathbf{x}^T = [20, 10, 5]$

12. a)

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{b}$
2	1	2	1	1	35
0	2	2	2	4	32
2	1	0	1	0	17

v bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

b) $\mathbf{a}_4 = 0\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3$,

c) $\mathbf{b} = 5\mathbf{a}_1 + 7\mathbf{a}_2 + 9\mathbf{a}_3$,

d) [5, 7, 9, 0, 0]

Cvičení 4.4

1. Není.

2. a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_1' &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_2' &= 12 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_1' &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_2' &= 18 \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_1' &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_2' &= 6 \end{aligned}$$

3. a) $\mathbf{x}^T = [600, 100]$, $z = 17\,000$
b) $\mathbf{x}^T = [600, 0]$, $\mathbf{x}'^T = [0{,}600, 300{,}2, 200{,}0]$, $z = 15\,000$
c) $\Delta z = 6\,000$

4. $\mathbf{x}^{(1)T} = [1, 1, 0, 0]$, $\mathbf{x}^{(2)T} = [0, 1, 1, 0]$, $\mathbf{x}^{(3)T} = \left[0, 0, 1, \frac{8}{5}\right]$

Cvičení 5.12

1. $\mathbf{x}^T = \left[25, 200, 27\frac{7}{9}, 0, 0\right]$, $z = 17\,500$

2. $\mathbf{x}^T = [2\,400, 3\,200, 4\,800, 4\,000, 0{,}0]$, $z = 1\,843\,200$

3. $\mathbf{x}^T = [200, 300, 150]$, $z = 122\,500$

4. $\mathbf{x}^T = [0, 650, 560, 480]$, $\mathbf{x}'^T = [0, 0, 0, 840]$, $z = 113\,240$

5. $\mathbf{x}^{(1)T} = [320, 0, 0, 0]$, $\mathbf{x}^{(1)\prime T} = [1\,000, 0, 470]$, $z = 21\,120$
$\mathbf{x}^{(2)T} = [0, 320, 0, 0]$, $\mathbf{x}^{(2)\prime T} = [360, 0, 1\,100]$, $z = 21\,120$
$\mathbf{x}^{(3)T} = [0, 0, 320, 0]$, $\mathbf{x}^{(3)\prime T} = [680, 0, 790]$, $z = 21\,120$
$\mathbf{x}^{(4)T} = [0, 0, 0, 320]$, $\mathbf{x}^{(4)\prime T} = [1\,320, 0, 150]$, $z = 21\,120$

6. $\mathbf{x}^T = [0, 0{,}5\,000{,}0]$, $z = 1\,250\,000$

7. $\mathbf{x}^T = [810, 810, 810{,}00]$, $z = 48\,600$

8. $\mathbf{x}^T = [0, 0, 0, 0, 0, 4\,200]$, $z = 344\,400$

Cvičení 6.7

1. a)
$$\begin{aligned} 4u_1 + 3u_2 + u_3 &\geqq 25 \\ 5u_1 + u_2 + 2u_3 &\geqq 20 \\ u_1 + 3u_2 + u_3 &\geqq 22 \\ u_1 + u_2 + u_3 &\geqq 23 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &\geqq 24 \\ u_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$
$f = 1\,295u_1 + 1\,305u_2 + 1\,105u_3 \ldots$ min.

b)
$$\begin{aligned} 7u_1 + u_2 - u_3 &\geqq 30 \\ 2u_1 + 2u_2 - u_3 &\geqq 35 \\ 3u_1 + u_2 - u_3 &\geqq 30 \\ 4u_1 + u_2 - u_4 &\geqq 35 \\ u_1 + u_2 - u_4 &\geqq 30 \\ u_1 + u_2 - u_4 &\geqq 35 \\ u_i &\geqq 0 \qquad (i = 1,2,3,4) \end{aligned}$$
$f = 1\,980u_1 + 1\,895u_2 - 1\,950u_3 - 2\,195u_4 \ldots$ min.

c)
$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 - u_3 &\leqq 15 \\ 3u_1 - u_3 &\leqq 16 \\ u_1 + u_2 &\leqq 19 \\ u_1 + u_2 &\leqq 15 \\ u_1 - u_3 &\leqq 20 \\ u_i &\leqq 0 \qquad (i = 1,2,3) \end{aligned}$$
$f = 165u_1 + 125u_2 - 185u_3 \ldots$ max.

2. I. úloha nemá konečné optimální řešení.
II. úloha nemá přípustné řešení.

3. Úloha 5.1: $\dim u_i = \dfrac{\text{odbyt v Kčs}}{\text{kg suroviny}}$

Úloha 5.8: $\dim u_i = \dfrac{\text{náklady v Kčs}}{\text{dkg složky}}$

Cvičení 7.6

1. $\mathbf{x}^T = [35, 20, 700/9, 0, 0]$
$z = 7\,880 \qquad \Delta z = -9\,620$

2. a) $t \in \left\langle -10, \frac{1\,850}{139} \right\rangle$
b) $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3]$

3. a) $\mathbf{x}^T = [200, 250, 300, 0]$, $z = 84\,500$
b) $\mathbf{x}^T = [150, 275, 300, 0]$, $\Delta z = -1\,250$
c) 1. Nezmění. Není jediný.
2. $\Delta z = -4\,000$

d) Nezmění.

$$\frac{\text{cena v Kčs}}{\text{elektrická energie ve Wh}}$$

e) Nezmění. $x_4' = 400$.

Cvičení 8.14

1. $x_{11} = 650 \qquad x_{14} = 820$
$x_{15} = 740 \qquad x_{22} = 320$
$x_{23} = 240 \qquad x_{f3} = 120$
$x_{f5} = 60 \qquad z = 14\,660$

Existuje více optimálních řešení.

2. a) $x_{11} = 5\,200 \qquad x_{23} = 5\,320$
$x_{12} = 7\,320 \qquad x_{24} = 6\,750$
$x_{13} = 6\,250 \qquad x_{2f} = 3\,200$
$z_1 = 44\,975$

Existuje více optimálních řešení.

Na $\overline{V_1S_f}$, $\overline{V_1S_4}$, $\overline{V_2S_2}$ je $c' - c = 0$

b) Nezmění.

$z_2 = 476\,310 \qquad z_2 - z_1 = 431\,335$

c) Nezmění.

$z_3 = 63\,144\,910$

Optimální řešení není jediné.

3. $x_{15} = 1 \qquad x_{32} = 1$
$x_{21} = 1 \qquad x_{43} = 1$
$x_{54} = 1$
$z = 10 + 10 + 5 + 5 + 12 = 42$

4. $x_{11} = 1 \qquad x_{33} = 1$
$x_{22} = 1 \qquad x_{44} = 1$
$z = 7$, resp. 10 500 (63 000 celkem)

5. $x_{12} = 1 \qquad x_{33} = 1$
$x_{21} = 1 \qquad x_{44} = 1 \qquad z = 59\,750$

Cvičení 9.9

1. $x_{11} = 135 \qquad y_{11} = 120$
$x_{21} = 25 \qquad y_{22} = 115$
$x_{32} = 180 \qquad y_{31} = 40$
$x_{33} = 115 \qquad y_{33} = 80$
$x_{43} = 65 \qquad y_{42} = 65 \qquad z = 6\,880$
$x_2 = 15 \qquad y_{53} = 100 \qquad z_{DM} = 1\,475$
$y_1 = 20 \qquad z_{MS} = 5\,405$

2. $x_{12} = 70 \qquad x_{34} = 30$
$x_{21} = 30 \qquad x_{41} = 30$
$x_{22} = 105 \qquad x_{43} = 100$
$x_{33} = 60 \qquad x_{54} = 40 \qquad z = 8\,880$

3. $x_{11} = 8\,700 \qquad x_{44} = 4\,400$
$x_{23} = 8\,700 \qquad x_{45} = 4\,300$
$x_{32} = 8\,700 \qquad x_{4f} = 36 \qquad z = 4\,998\,000$

Degenerované optimální řešení není jediné.

Cvičení 10.10

1. $\mathbf{x}'^T = [5\,880, 0, 3\,220, 0; 1\,000, 0]$, $\mathbf{x}'^T = \mathbf{0}^T$, $z = 825\,080$

2. $x_{11} = 125 \qquad x_{28} = 40$
$x_{13} = 480 \qquad x_{31} = 550$
$x_{16} = 25 \qquad x_{35} = 310$
$x_{17} = 135 \qquad x_{36} = 150 \qquad z = 231\,900$
$x_{22} = 530 \qquad x_{37} = 295$
$x_{23} = 720 \qquad x_{38} = 55$
$x_{24} = 650$
$x_{25} = 540$

3. Maximální průtok = 10.
Minimální řez = 10
(hrana $(\oplus, u_1)$ o kapacitě 3
$(\oplus, u_3)$ o kapacitě 1
$(\oplus, u_5)$ o kapacitě 2
(u_2, u_7) o kapacitě 1
(u_4, u_8) o kapacitě 2
(u_6, u_9) o kapacitě 1).

4. Maximální průtok = 180.
Minimální řez = 180
(hrana $(\oplus, 1)$ o kapacitě 45
$(\oplus, 2)$ o kapacitě 45
$(\oplus, 3)$ o kapacitě 45
$(\oplus, 4)$ o kapacitě 45).

5. $x_{16} = 3 \qquad x_{44} = 3$
$x_{21} = 3 \qquad x_{53} = 3$
$x_{32} = 3 \qquad x_{65} = 3 \qquad z = 3 \,.\, 5\,340 = 16\,020$

Cvičení 12.7

2. Pro $a > 0$ je účelová funkce ryze konvexní, pro $a < 0$ ryze konkávní, pro $a = 0$ lineární. Je-li $a > 0$, pak výrobní náklady na jednotku s rozsahem produkce rostou, pro $a < 0$ klesají, pro $a = 0$ jsou konstantní.

3. Viz příklady v pojednání o konvexních a konkávních funkcích v 12.6. Úloha by byla zmíněnou metodou řešitelná např. v případě $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

4. $\bar{x}_1 = 89/35$; $\bar{x}_2 = 611/35$; $\bar{x}_3 = 93/70$

5. $\bar{x}_1 = 2/23$; $\bar{x}_2 = 10/23$

6. $\bar{x}_1 \doteq \dfrac{e}{5}$; $\bar{x}_2 \doteq \dfrac{1}{5}$; $\bar{x}_3 \doteq \dfrac{2}{5}$

SEZNAM LITERATURY

1. *Ackoff, R. L. aj.:* Progress in Operations Research. New York, Wiley 1961
2. *Adam, A. aj.:* Anwendungen der Matrizenrechung auf wirtschaftliche und statistische Probleme. Wuerzburg, Physica Verlag 1959
3. *Allen, R.:* Mathematical economics. 2. ed. London, Macmillan 1960 (též ruský překlad)
4. Balans narodnogo chozjajstva: Stat. metody izučenija proizvodstva. Moskva, Izd. AN SSSR 1959
5. *Barna, T. (red.).:* Structural Interdependence and Economic Development. London, Macmillan 1962
6. *Barna, T. (red.):* The Structural Interdependence of the Economy. New York, Wiley 1956
7. *Barsov, A. S.:* Čto takoje linejnoje programmirovanije. Moskva, Fizmatgiz 1959
8. *Barsov, A. S.:* Linejnoje programmirovanije v techniko-ekonomičeskich zadačach. Moskva, Izd. Nauka 1964
9. *Baummol, W.:* Economic Theory and Operations Analysis. New York, Prentice-Hall 1961
10. *Beckmann, M.:* Lineare Planungsrechnung. Ludwigshafen am Rhein, Fachverlag für Wirtschaftstheorie und Ökonometrie 1959
11. *Bellman, R.:* Dynamic Programming. Princeton, N. Y. 1957
12. *Bellman, R.:* Adaptive Control Processes. Princeton, Princeton University Press 1961
13. *Bellman, R.—Dreyfus, S.:* Applied Dynamic Programming. Princeton, Princeton University Press 1962
14. *Berge, C.:* Théorie des graphes et ses applications. Paris, Dunod 1958
15. *Berri, L. Ja.:* Planovyj experimentaľnyj mežostraslevoj balans na 1962 god. Moskva, Gosplanizdat 1963
16. *Bláha, K.:* Lineární programování v dopravě a plánování. Praha, NADAS 1961
17. *Blackwell, D.—Girshick, M. A.:* Teorie her a statistického rozhodování. Praha, NČSAV 1964 (z angličtiny)
18. *Boulding, K.—Spivey, W.:* Linear Programming and the Theory of the Firm. London, Macmillan 1960
19. *Bouška, J.—Skolka, J.—Tlustý, Z.:* Metodologie meziodvětvových bilancí. Praha, EÚČSAV (cykl.) 1963
20. *Bowman, E. H.—Fetter, R. B.:* Rozbory při řízení výroby. Praha, UTEIN 1961 (z angličtiny)
21. *Böhm, H.:* Nichtlineare Programmplanung. Wiesbaden, 1959
22. *Čeneri, Ch.—Klark, P. (Chenery, H. B.—Clark, P.):* Ekonomika mežotrasľevych svjazej. Moskva, Izd. inostrannoj literatury 1962 (z angličtiny)
23. *Čerenin, V. P.:* Rešenije nekotorych kombinatornych zadač optimaľnogo planirovanija metodom posledovateľnych rasčetov. Novosibirsk, 1962
24. Čislennyje metody optimaľnogo planirovanija. Novosibirsk, Izd. AN SSSR 1962
25. *Czechowski, T.:* Wstęp matematyczny do analizy przeplywów międzygalęzowych. Warszawa, Polskie Wydaw. Gospodarzce 1958
26. *Czerwiński, Z.:* Problematyka planowania cen w ujęciu matematycznym. Poznań, Tow. przyjaciól nauk 1963
27. *Dadajan, V. S.—Kossov, V. V.:* Balans ekonomičeskogo rajona kak sredstvo planovych rasčetov. Moskva, Izd. AN SSSR 1962
28. *Dadajan,* V. S.: Ekonomiko-matematičeskoje modelirovanije socialističeskogo vosproizvodstva. Moskva, Ekonomizdat 1963
29. *Danö, S.:* Linear Programming in Industry. Wien, Springer 1960
30. *Dantzig, G. B.:* General Convex Objective Forms. Santa Monica, Rand Paper 1959
31. *Dantzig, G. B.:* Linear Programming and Extensions. Princeton, Princeton University Press 1963
32. *Dorfman, R.:* Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Barkeley, University of California Press 1951
33. *Dorfman, R.—Samuelson, P. A.—Solow, R. M.:* Linear Programming and Economic Analysis. New York, McGraw-Hill 1958
34. *Dupač, V.—Hájek, J.:* Pravděpodobnost ve vědě a technice. Praha, NČSAV, 1962
35. *Errou, K. Dž.—Gurvic, L.—Udzava, Ch. (Arrow, K. J.—Hurwicz, L.—Uzawa, H.):* Issledovanija po linejnomu i nelinejnomu programmirovaniju. Moskva, Izd. inostrannoj literatury 1962 (z angličtiny)
36. *Evans, D. B.—Hoffenberg, M.:* The Interindustry Relations Study for 1947. Rewiev of Economics and Statistics, č. 2. 1952
37. *Ferguson, R. O.—Sargent, R. F.:* Linear Programming, Fundamentals and Applications. New York, McGraw-Hill 1958
38. *Fedorenko, N. P. (red.):* Planirovanije i ekonomičesko-matematičeskije metody. Moskva, Izd. Nauka 1963
39. *Finkelštejn, B. V.:* Lekcii po linejnomu programmirovaniju. Vvedenije v linejnuju algebru. Moskva, Izd. MGEI 1960
40. *Ford, R.—Fulkerson, R.:* Flows in Networks. Princeton, Princeton University Press 1962
41. *Frisch, R.:* A Survey of Types of Economic Forecasting and Programming and a Brief Description of the Oslo Channel Model. Oslo, Memorandum (cykl.) 1961
42. *Frisch, R.:* Mixed Linear and Quadratic Programming by the Multiplex Method. Lund, 1961
43. *Frisch, R.:* Quadratic Programming by the Multiplex Method in the General Case where the Quadratic Form May Be Singular. Oslo, (cykl.) 1960
44. *Frisch, R.:* An Implementation System for Optimal National Economic Planning without Detailed Quantity Fixation from a Central Authority. Oslo, (cykl.) 1963
45. *Garvin, W.:* Introduction to Linear Programming. New York, McGraw-Hill 1960
46. *Gale, D.:* The Theory of Linear Economic Models. New York, McGraw-Hill 1960 (též ruský překlad)
47. *Gass, S. J.:* Linear Programming. Methods and Applications, 2. ed. New York, McGraw-Hill 1958 (též ruský překlad)
48. *Gerčuk, Ja. P.:* Linejnoje programmirovanije v operacionnych issledovanijach. Moskva, VINITI 1959
49. *Gerčuk, J.:* Problemy optimaľnogo planirovanija. Moskva, Ekonomizdat 1961
50. *Graves, R. L.—Wolfe, P. (red.):* Recent Advances in Mathematical Programming. New York, McGraw-Hill 1963
51. *Hadley, G.:* Linear Programming. Massachusetts, Addison-Wesley 1961
52. *Habr, J.:* Lineární programování. Výklad pro ekonomy. Praha, SNTL 1960
53. *Habr, J.—Korda, B.:* Rozbor meziodvětvových vztahů. Praha, SNTL 1960

54. *Hayek, F. A. (red.):* Collectivist Economic Planning. London, Routledge 1938
55. *Heady, E.—Candler, W.:* Linear Programming Methods. Ames, Iowa State Colledge Press 1958
56. *Charnes, A.—Cooper, W. W.—Henderson, A.:* An Introduction to Linear Programming. New York, Wiley 1953
57. *Charnes, A.—Cooper, W. W.:* Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, 2. sv. New York, Wiley 1961
58. *Churchman, C. W.—Ackoff, R. L.—Arnoff, E. L.:* Introduction to Operations Research. New York, Wiley 1957
59. Input-Output Analysis: An Appraisal. Princeton, Princeton University Press 1955
60. *Isard, W.:* Regional Economic Planning. Paris, Eur. Prod. Agency 1961
61. *Jándy, G.:* A szállitástervezés elemzö módszerei. Budapest, Közlekedési dok. vállalat 1960
62. *Jocksch, H.:* Lineares Programmieren. Tübingen, Mohr 1962
63. *Judin, D.—Goľštejn, Je.:* Linejnoje programmirovanije. Moskva, Fizmatgiz 1963
64. *Kadlec, V.—Voďáček, L.:* Praktické aplikace metod lineárního programování. Praha, NPL 1962
65. *Kantorovič, L. V.:* Ekonomičeskij rasčet najlučšego ispolzovanija resursov. Moskva, Izd. AN SSSR 1959
66. *Kantorovič, L. V.:* Matematičeskije metody v organizacii planirovanija proizvodstva. Leningrad Izd. LGU 1939
67. *Karlin, S.:* Mathematical Methods and Theory of Games, Programming and Economics. London, Addison-Wesley 1959 (též ruský překlad)
68. *Kaufman, A.:* Méthods et modeles de la récherche opérationelle. Paris, Dunod 1959
69. *Koopmans, T. C. (red.):* Activity Analysis of Production and Allocation. New York, Wiley 1951
70. *Korda, B.:* Linear Location Problems. Sborník VŠE Praha, SPN 1965
71. *Korda, B. (red.):* Matematické metody v ekonomii. Sborník VŠE č. 10. Praha, SPN 1960
72. *Korda, B.:* Učebnice lineárního programování. Praha, SNTL 1962
73. *Kornai, J.:* A beruházások matematikai programozása. Budapest, Közg. K. 1962
74. *Kornai, J.—Lipták, T.:* Kétszintü tervézés, vol. VII ser. B/4. Budapest, MTA 1963
75. *Krekó, B.:* Lineáris programozás. Budapest, Közg. K. 1962
76. *Krekó, B.:* Matrixszámítás. Budapest, Közg. K. 1964
77. *Krekó, B.—Bacskay, Z.:* Bevezetés a lineáris programozásba. Budapest, Közg. K. 1957
78. *Kossov, V. (red.):* Mežotraslevoj balans proizvodstva i raspredelenija. Moskva, Izd. Nauka 1964
79. *Kotov, I. V. (red.):* Primenenije matematiki v ekonomii. Leningrad, LGU 1963
80. *Kotzig, A.:* Matematický náčrt dynamického modelu. Bratislava, VSAV 1963
81. *Krelle, W.—Künzi, H. P.:* Lineare Programmierung. Zürich, Ind. Organisation 1958
82. *Kuhn, H. W.—Tucker, A. W. (red.):* Contributions to the Theory of Games. Princeton, Princeton University Press 1950, 1953
83. *Kuhn, H. W.—Tucker, A. W. (red.):* Linear Inequalities and Related Systems. Princeton, Princeton University Press 1956 (též ruský překlad)
84. *Kuhn, H. W.—Tucker, A. W. (red.):* Nonlinear Programming. Berkeley, University of California Press 1951
85. *Künzi, H. P.—Krelle, W.:* Nichtlineare Programmierung. Berlin, Springer 1962
86. *Lange, O.:* Wstęp do ekonometrii. Warszawa, Państwowe Wydaw. Naukowe 1961
87. *Laščiak, A. (red.):* Pokroky operačnej analýzy. Bratislava, VŠE 1964
88. *Lejbkind, Ju. R.:* Nekotoryje voprosy približennych planovych raščetov. Moskva, LEMN — AN SSSR 1961
89. *Leontief, W.:* Studies in the Structure of the American Economy. New York, Oxford University Press 1953 (též ruský překlad)
90. *Ljus, R. D.—Rajfa, Ch. (Luce, R.—Raiffa, H.):* Igry i rešenija. Moskva, Izd. inostrannoj literatury 1961 (z angličtiny)

91. *McKinsey, J. C.:* Introduction to the Theory of Games. New York, McGraw-Hill 1952 (též ruský překlad)
92. Matematičeskije metody i problemy razmeščenija proizvodstva. Moskva, Ekonomizdat 1963
93. Metody i algoritmy rešenija trnansportnoj zadači. Moskva, Gosstatizdat 1963
94. *Metzger, R. W.:* Elementary Mathematical Programming. New York, McGraw-Hill 1958
95. *Morgenstern, O. (red.):* Economic Activity Analysis. New York, Wiley 1954
96. *Němčinov, V. S.:*Ekonomičesko-matematičeskije metody i modely. Moskva, Socekizd. 1962
97. *Němčinov, V. S. (red.):* Použitie matematiky v ekonomike. Bratislava, SVTL 1962
98. *Neumann, J.—Morgenstern, O.:* Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton, Princeton University Press 1947
99. *Nožička, F.:* O jednom minimálním problému v teorii lineárního plánování. Praha, SEVT 1960
100. Output-Input and Productivity Measurement. Prniceton, Princeton University Press 1961
101. *Pichler, J.:* Einführungen in die lineare Optimierung. Leipzig, Teubner 1962
102. Primenenije linejnogo programmirovanija za rubežom. Moskva, Izd. MGU 1959
103. *Reinfeld, N. V.—Vogel, W. R.:* Mathematical Programming. Prentice-Hall, Englwood Cliffs, N. Y. 1958 (též ruský překlad)
104. *Rasmussen, N.:* Studies in Inter-Sectoral Relations. Amsterdam, North-Holland Publishing Company 1957
105. *Riley, V.—Gass, S.:* Linear Programming and Associated Techniques (bibliografie). Baltimore, Johns Hopkins Press 1958
106. *Saaty, T. L.:* Mathematical Methods of Operations Research. New York, McGraw-Hill 1959
107. *Sadowski, W.:* Teorija podejmovanija decyzji. Warszawa, Polskie Wydaw. Gospodarcze 1960
108. *Sasieni, M.—Yaspan, A.—Friedman, L.:* Operations Research: Methods and Problems. New York, Wiley 1959
109. *Simmonard, M.:* Programmation Linéaire. Paris, Dunod 1962
110. *Sulmicki, P.:* Przeplywy międzygalęziowe. Warszawa, Polskie Wydaw. Gospodarcze 1959
111. *Suvorov, B.:* Struktury osnovnych fondov v narodnom chozjajstve SSSR. Moskva, LEMN — AN SSSR 1962
112. *Tarski, J.:* Transport jako czynnik lokalizacji produkcji. Warszawa, Państwowe Wydaw. Ekonomiczne 1963
113. *Vajda, S.:* Mathematical Programming. London, Addison-Wesley 1961
114. *Vajda, S.:* Teorija igr i linejnoje programmirovanije. Moskva, Izd. inostrannoj literatury 1959 (z angličtiny)
115. *Vajnštejn, A. (red.):* Narodnochozjajstvennyje modely. Moskva, Izd. AN SSSR 1963
116. *Vazsonyi, A.:* Scientific Programming in Business and Industry. New York, Wiley 1958 (též ruský překlad)
117. *Ventcel:* Elementy teorii igr. Moskva, Fizmatgiz 1959
118. *Walras, L.:* Eléments d'économie politique pure. Lausanne, 1874
119. *Witzgall, C.:* Gradient-Projection Methods for Linear Programming. Princeton, Princeton University Report No. 21960
120. *Yamada, I.:* Theory and Application of Inter-Industry Analysis. Tokyo, Kinokunija 1961 (též ruský překlad)
121. Zkoumání meziodvětvových vztahů. Praha, SNPL 1960
122. *Zoutendijk, G. (Zoutendijk, G.):* Metody vozmožnych napravlenij. Moskva, Izd. inostrannoj literatury 1963 (z angličtiny)

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍK
ČESKO-RUSKO-NĚMECKO-ANGLICKO-FRANCOUZSKÝ

český výraz	*ruský výraz*	*německý výraz*	*anglický výraz*	*francouzský výraz*
B				
báze	bazis	Basis	basis	base
— pomocná	iskusstvennyj bazis	künstliche Basis	artificial basis	base artificielle
— přídatná	dopolnitel'nyj bazis	Basis aus Schlupfvariablen	basis of slack vectors	base des variables d'écart
— přípustná	dopustimyj bazis	zulässige Basis	feasible basis	base réalisable
bod množiny krajní	krajňaja točka množestva	Extrempunkt der Menge	extreme point of a set	point d'ensemble extrémal
— sedlový	sedlovaja točka	Sattelpunkt	saddle point	col
C				
cena	cena	Preis	price	prix
— duální (stínová)	cena resursov	Verrechnungspreis (Effizienzpreis)	shadow price	prix d'ordre
— hry	značenije igry	Wert des Spieles	value of a game	valeur du jeu
cesta	puť	Weg	path	chemin
— nasycená	nasyščennyj puť	saturierter Weg	saturated path	chemin saturé
činitel výroby	proizvodstvennyj faktor	Produktionsfaktor	factor of production	facteur de production
D				
degenerace	vyroždenije	Entartung (Degeneration)	degeneracy	dégénérescence
dualita	dvojstvennosť	Dualität	duality	dualité
E				
extrém funkce	extremum funkcii	Extremum der Funktion	extremum of function	point de la fonction extrémal
F				
forma kvadratická	kvadratičnaja forma	quadratische Form	quadratic form	forme quadratique
— — indefinitní	neopredelennaja kvadratičnaja forma	indefinit quadratische Form	indefinite quadratic form	forme quadratique indéfinite
— — negativně definitní	otricatel'no opredelennaja kvadratičnaja forma	negativ definit quadratische Form	negative definite quadratic form	forme quadratique negativement définite
— — — semidefinitní	nepoložitel'no opredelennaja kvadratičnaja forma	negativ semidefinit quadratische Form	negative semi-definite quadratic form	forme quadratique negativement semi-définite
— lineární	linejnaja forma	Linearform	linear form	forme linéaire
funkce distribuční	funkcija raspredelenija	Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion	distribution function	fonction de distribution
— — marginální	marginal'naja funkcija raspredelenija	marginale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion	marginal distribution function	fonction de distribution marginale
— konkávní	vognutaja funkcija	konkave Funktion	concave function	fonction concave
— konvexní	vypuklaja funkcija	konvexe Funktion	convex function	fonction convexe
— regulární	reguljarnaja funkcija	reguläre Funktion	regular function	fonction règlée
— účelová	celevaja funkcija	Zielfunktion	objective function	fonction économique
— — separovatelná	separabel'naja celevaja funkcija	separabele Zielfunktion	separable objective function	fonction économique séparable
H				
hodnost matice	rang matricy	Rang der Matrix	rank of a matrix	rang d'une matrice
— soustavy vektorů	rang sistemy vektorov	Rang des Vektorssystems	rank of a set of vectors	rang d'un ensemble des vecteurs
hra	igra	Spiel	game	jeu
— konečná	konečnaja igra	endliches Spiel	finite game	jeu fini
— dvou osob	igra dvuch lic	Zweipersonenspiel	two-person game	jeu à deux joueurs
— — — s nulovým součtem	igra dvuch lic s nulevoj summoj	Nullsummenspiel	two-person zero-sum game	jeu à somme nulle
— maticová	matričnaja igra	Matrixspiel	matrix game	jeu matriciel
hrana	rebro	Kante	edge	arête (arc)
— nasycená	nasyščennoje rebro	saturierte Kante	saturated edge	arête saturée

I

index řádkový	indeks (nomer) stroki	Zeilenindex	row index	indice de ligne
— sloupcový	indeks (nomer) stolbca	Spaltenindex	column index	indice de colonne
inverze matice	obraščenije matricy	Matrizeninversion	inversion of matrix	inversion de la matrice

K

kapacita hrany	propusknaja sposobnosť rebra	Bewertung (Kapazität) der Kante	capacity of an edge	capacité de l'arête
— řezu	propusknaja sposobnosť sečenija	Bewertung des Schnittes	capacity of a cut	capacité de la coupe
— uzlu	propusknaja sposobnosť uzla	Bewertung des Knotenpunktes	capacity of a node	capacité du sommet
— výrobní	proizvodstvennaja moščnosť	Produktionskapazität	production capacity	capacité de production
koeficient	koefficient	Koeffizient	coefficient	coefficient
— strukturální	strukturnyj koefficient	struktureller Koeffizient	structural coefficient	coefficient structural
kombinace lineární konvexní	linejnaja vypuklaja kombinacija	konvexe Linearkombination	linear convex combination	combinaison linéaire convexe
— vektorů lineární	linejnaja kombinacija vektorov	Linearkombination der Vektoren	linear combination of vectors	combinaison linéaire des vecteurs
— — — nezáporná	neotricatel'naja linejnaja kombinacija vektorov	nichtnegative Linearkombination der Vektoren	non-negativ linear combination of vectors	combinaison linéaire non-négative des vecteurs
kritérium optimálnosti	kriterij optimal'nosti	Optimalitätskriterium	optimality criterion	critère d'entrée
— pro vylučovanou proměnnou	kriterij zameščenija	Kriterium der Eliminierung der Variablen	replacement criterion	critère de sortie
kužel	konus	Kegel	cone	cône
— konvexní	vypuklyj konus	konvexer Kegel	convex cone	cône convexe

M

matice	matrica	Matrix	matrix	matrice
— čtvercová	kvadratnaja matrica	quadratische Matrix	square matrix	matrice carrée
— kvadratické formy	matrica kvadratičnoj formy	Matrix der quadratischen Form	matrix of quadratic form	matrice de la forme quadratique

matice inverzní	obratnaja matrica	inverse Matrix	inverse matrix	matrice inverse
— jednotková	jediničnaja matrica	Einheitsmatrix	unit matrix	matrice unitée
— kapacit	matrica propusknych sposobnostej	Kapazitätmatrix	capacity matrix	matrice de capacités
— koeficientů	matrica koefficientov	Koeffizientenmatrix	coefficient matrix	matrice de coefficients
— nulová	nul'-matrica	Nullmatrix	zero-matrix	matrice nulle
— průtoků	matrica potoka	Strommatrix	flow matrix	matrice des flots
— regulární	nevyroždennaja matrica	reguläre Matrix	non-singular matrix	matrice régulière
— sazeb	matrica ocenok	Matrix von Transportkosten	value matrix	le tableau de transport
— singulární	vyroždennaja matrica	singuläre Matrix	singular matrix	matrice singulière
— strukturální	strukturnaja matrica	Strukturmatrix	structural matrix	matrice structurale
— transponovaná	transponirovannaja matrica	transponierte Matrix	transposed matrix	matrice transposée
— trojúhelníková	treugol'naja matrica	Dreiecksmatrix	triangular matrix	matrice triangulaire
— výplatní	matrica vyigryšej	Auszahlungsmatrix	payoff matrix	matrice de gain
maximalizace	maksimizacija	Maximierung	maximization	maximation
maximin	maksimin	Maximin	maximin	maximin
maximum funkce	maksimum funkcii	Maximum der Funktion	maximum of function	maximum de la fonction
metoda pomocné báze	metod iskusstvennogo bazisa	Methode der künstlichen Basis	M-method	méthode des pénalités
— maďarská	vengerskij metod	Methode von Kuhn	Hungarian method	algorithme hongrois
— severozápadního rohu	metod severo-zapadnogo ugla	Nordwesteckenregel	northwest corner rule	méthode du coin nord-ouest
— simplexová	simpleksnyj metod	Simplexmethode	simplex method	méthode du simplex
— — duálně	dvojstvennyj simpleksnyj metod	duale Simplexmethode	dual simplex method	algorithme dual du simplex
— — revidovaná	modificirovannyj simpleksnyj metod	revidiertes Simplexverfahren	revised simplex method	forme révisée de la méthode du simplex
— Wolfova	metod Vulfa	Wolfe's Methode	Wolfe's method	méthode de Wolfe
minimalizace	minimizacija	Minimierung	minimization	minimisation
minimax	minimaks	Minimax	minimax	minimax
minimum lineární formy	minimum linejnoj formy	Minimum der Linearform	minimum of linear form	minimum d'une forme linéaire
mnohostěn konvexní	vypuklyj mnogogrannik	konvexes Polyeder	convex polytope (polyhedron)	polyèdre convexe
mnohoúhelník konvexní	vypuklyj mnogougol'nik	konvexes Vieleck	convex polygon	polygone convexe
množina	množestvo	Menge	set	ensemble

— konvexní .	vypukloje množestvo	konvexe Menge	convex set	ensemble convexe
— přípustných řešení	množestvo dopustimych rešenij	Menge der zulässigen Lösungen	feasible solution set	ensemble des solutions réalisables
— řešení omezená	ograničennoje množestvo rešenij	beschränkte Menge der Lösungen	bounded solution set	ensemble des solutions bornées
multiplikátory Lagrangeovy	množitelja Lagranža	Lagrange Multiplikatoren	Lagrange multipliers	multiplicateurs de Lagrange
N				
nadrovina	giperploskosť	Hyperebene	hyperplane	hyperplan
násobení matic	umnoženije matric	Matrizenmultiplikation	multiplication of matrices	multiplication matricielle
— matice skalárem	umnoženije matricy na veščestvennoje čislo	Multiplikation der Matrix mit Skalar	multiplication of matrix by scalar	multiplication de matrice par un scalaire
nerovnost lineární	linejnoje neravenstvo	lineare Ungleichung	linear inequality	inéquation linéaire
nezápornost	neotricatel'nosť	Nichtnegativität	non-negativity	non-négativité
nezávislost	nezavisimosť	Unabhängigkeit	independence	indépendence
neznámá	neizvestnoje	Unbekannte	unknown	inconnue
O				
obal konvexní	vypuklaja oboločka	konvexe Hülle	convex hull	enveloppe convexe
okruh	cikl	Zykl .	loop	cycle
omezení	ograničenije	Nebenbedingung	constraint	contrainte
P				
plán přepravní	plan perevozok	Transportplan	shipping schedule	programme de transport
plánování výroby	planirovanije proizvodstva	Produktionsplanung	planning of production	programmation de la production
podmnožina	podmnožestvo	Submenge	subset	sous-ensemble
podprostor	podprostranstvo	Subraum	subspace	sous-espace
poloprostor	poluprostranstvo	Halbraum	half-space	demi-espace
polopřímka	poluprjamaja	Halbgerade	half-line	demi-droit
polorovina	poluploskosť	Halbebene	half-plane	demi-plan
polyedr konvexní	mnogogrannik vypuklyj	konvexes Polyeder	convex polyhedron	polyèdre convexe

problém distribuční	raspredelitel'naja zadača	Verteilungsproblem	distribution problem	problème de distribution
— dopravní	zadača o perevozkach	Transportproblem	transportation problem	problème de transport
— duální	dvojstvennaja zadača	Dualitätsproblem	dual problem	problème dual
— přidělovací	zadača o naznačenijach	Anweisungsproblem	assignment problem	problème d'affectation
— výživový	zadača o diete	Diätproblem	diet problem	problème de diète
problémy směšovací	zadači o sostavleniji smesej	Mischungsprobleme	mix problems	problèmes mélanges
proces	process	Prozess	process (activity)	activité
— fiktivní	fiktivnyj process	fiktiver Prozess	fictitious process	activité fictive
programování celočíselné	celočislennoje programmirovanije	ganzzahlige Programmierung	integer programming	programmation en nombres entiers
— dynamické	dinamičeskoje programmirovanije	dynamische Programmierung	dynamic programming	programmation dynamique
— kvadratické	kvadratičnoje programmirovanije	quadratische Programmierung	quadratic programming	programmation quadratique
— lineární	linejnoje programmirovanije	Linearprogrammierung	linear programming	programmation linéaire
— nelineární	nelinejnoje programmirovanije	nichtlineare Programmierung	nonlinear programming	programmation non-linéaire
— parametrické	parametričeskoje programmirovanije	parametrische Programmierung	parametric programming	programmation paramètrique
— stochastické	stochastičeskoje programmirovanije	stochastische Programmierung	stochastic programming	programmation stochastique
proměnná	peremennaja	Variable (Veränderliche)	variable	variable
— fiktivní	fiktivnaja peremennaja	Schlupfvariable	slack variable	variable d'écart
— náhodná	slučajnaja peremennaja	zufällige Variable	random variable	variable aléatoire
— pomocná	isskusstvennaja peremennaja	künstliche Variable	artificial variable	variable artificielle
— přidatná	dopolnitel'naja peremennaja	Schlupfvariable	slack variable	variable d'écart
— základní	bazisnaja peremennaja	Basisvariable	basic variable	variable de base
propustnost	propusknaja sposobnosť	Kapazität	capacity	capacité
prostor vektorový n-rozměrný	n-mernoje vektornoje prostranstvo	n-dimensionaler Vektorraum	n-space of vectors	espace vectoriel à n-dimensions
průnik množin	peresečenije množestv	Intersektion	intersection	intersection
průtok sítí	potok v seti	Strom durch Verkehrsnetz	flow in the network	flot dans un réseau
prvek klíčový	razrešajuščij element	Schlüsselelement	pivot	pivot
— matice	element matricy	Matrizenelement	element of matrix	élément de la matrice

přípustnost	dopustimosť	Zulässigkeit	feasibility	admissibilité

R

rovnice	uravnenije	Gleichung	equation	équation
rozdělení normální	normal'noje raspredelenije	Normalverteilung	normal distribution	distribution normale

Ř

řád matice	porjadok matricy	Ordnung der Matrix	dimension of matrix	ordre de la matrice
řádek matice	stroka matricy	Reihe (Zeile) der Matrix	row of matrix	ligne de la matrice
řešení	rešenije	Lösung	solution	solution
— bazické	bazisnoje rešenije	Basislösung	basic solution	solution de base
— celočíselné	celočislennoje rešenije	ganzzahlige Lösung	integer solution	solution en nombres entiers
— degenerované	vyroždennoje rešenije	Entartungsfall der Lösung	degenerate solution	solution dégénérée
— grafické	grafičeskoje rešenije	graphische Lösung	graphical solution	solution graphique
— maticové hry	rešenije matričnoj igry	Lösung des Matrixspieles	solution of matrix game	solution du jeu matriciel
— nezáporné	neotricatel'noje rešenije	nichtnegative Lösung	non-negative solution	solution non-négative
— nulové (triviální)	nulevoje rešenije	triviale Lösung	zero-solution	solution banale
— optimální	optimal'noje rešenije	optimale Lösung	optimal solution	solution optimale
— — alternativní	alternativnoje optimal'noje rešenije	alternative optimale Lösung	alternative optimum	solution optimale alternative
— přípustné	dopustimoje rešenije	zulässige Lösung	feasible solution	solution réalisable
— výchozí	pervoje (ischodnoje) rešenije	Ausgangslösung	initial solution	solution initiale
— základní	bazisnoje rešenije	Basislösung	basic solution	solution de base
řetěz	cepočka	Kette	chain	chaîne
řez	sečenije	Schnitt	cut	coupe

S

sazba přepravní	transportnaja izderžka	Transportkost	shipping cost	coût de transport
sčítání matic	složenije matric	Addition der Matrizen	matrix addition	addition des matrices
— vektorů	složenije vektorov	Addition der Vektoren	vector addition	addition des vecteurs

síť	seť	Netzwerk	network	réseau
sjednocení množin	objedinenije množestv	Vereinigung der Mengen	union of sets	somme des ensembles
sloupec matice	stolbec matricy	Spalte der Matrix	column of matrix	colonne de la matrice
složka vektoru	komponenta vektora	Koordinate von Vektor	component of a vector	composante d'un vecteur
součin skalární	skaljarnoje proizvedenije	Skalarprodukt	scalar product	produit scalaire
soustava lineárních nerovností	sistema linejnych neravenstv	lineares Ungleichungssystem	set of linear inequalities	système des inéquations linéaires
— — rovnic	sistema linejnych uravnenij	lineares Gleichungssystem	set of linear equations	système d'équations linéaires
— — — homogenní	odnorodnaja sistema linejnych uravnenij	homogenes lineares Gleichungssystem	homogeneous set of linear equations	système homogène d'équations linéaires
— vektorů	sistema vektorov	System von Vektoren	set of vectors	système des vecteurs
— — lineárně nezávislá	linejno nezavisimaja sistema vektorov	linear unabhängiges System von Vektoren	linearly independent set of vectors	système linéairement indépendant des vecteurs
stabilita řešení	ustojčivosť rešenija	Stabilität der Lösung	stability of solution	stabilité de la solution
strategie	strategija	Strategie	strategy	stratégie
— čistá (ryzí)	čistaja strategija	reine Strategie	pure strategy	stratégie pure
— optimální	optimal'naja strategija	optimale Strategie	optimal strategy	stratégie optimale
— smíšená	smešannaja strategija	gemischte Strategie	mixed strategy	stratégie mixte
submatice	podmatrica	Submatrix	submatrix	sous-matrice

T

tah (ve hře)	chod	Zug	move	mouvement
tok	potok	Strom	flow	flot
transponování matice	transpozicija matricy	Transponieren der Matrix	transposition of matrix	transposition de la matrice
transformace lineární	linejnoje preobrazovanije	lineare Transformation	linear transformation	transformation linéaire
tvar kanonický soustavy rovnic	kanoničeskaja forma sistemy uravnenij	kanonische Form des Gleichungssystems	canonical form of a system of equations	forme canonique du système d'équations

U

úroveň procesu	uroveň processa	Prozessniveau	level of activity	niveau d'activité
uzel	uzel	Knotenpunkt	node	sommet

V

vektor	vektor	Vektor	vector	vecteur
— cen	vektor cen	Preisvektor	price vector	vecteur prix
— jednotkový	jediničnyj vektor	Einheitsvektor	unit vector	vecteur unité
— nákladů	vektor zatrat	Einsatzvektor	input vector	input
— n-rozměrný	n-mernyj vektor	n-gliedriger Vektor	n-vector	n-vecteur
— nulový	nulevoj vektor	Nullvektor	null vector	vecteur nul
— optimální	optimal'nyj vektor	optimaler Vektor	optimal vector	vecteur optimal
— přípustný	dopustimyj vektor	zullässiger Vektor	feasible vector	vecteur réalisable
— řádkový	vektor-stroka	Zeilenvektor	row vector	vecteur-ligne
— sloupcový	vektor-stolbec	Spaltenvektor	column vector	vecteur-colonne
— výroby	vektor vypuska	Ausbringungsvektor	output vector	output
— základní	bazisnyj vektor	Basisvektor	basic vector	vecteur de base
— zisku	vektor pribyli	Profitvektor	profit vector	vecteur des profits
vektory lineárně nezávislé	linejno nezavisimyje vektory	linear unabhängige Vektoren	linear independent vectors	vecteurs linéairement indépendants
věta o maximálním průtoku a minimálním řezu	teorema o maximal'nom potoke i minimal'nom sečeniji	Satz des maximalen Stromes	theorem max flow min cut	théorème de la coupe minimale
vrchol konvexního polyedru	veršina vypuklogo mnogogrannika	Ecke des konvexen Polyeders	vertex of convex polyhedron	sommet d'un polyèdre
vstup	zatraty	Einsatz	input	input
— (u grafů)	istočnik	Eingang	source	entrée
výstup	vypusk	Ausstoss	output	output
— (u grafů)	stok	Ausgang	sink	sortie

Z

zákon asociativní	associativnyj zakon	assoziatives Gesetz	associative law	loi associative
— distributivní	distributivnyj zakon	distributives Gesetz	distributive law	loi distributive
— komutativní	zakon kommutativnosti	kommutatives Gesetz	commutative law	loi commutative
závislost lineární	linejnaja zavisimosť	lineare Abhängigkeit	linear dependence	dépendence linéaire

ABECEDNÍ REJSTŘÍK

Prof. Ing. **BENEDIKT KORDA**, DrSc., a kolektiv

Matematické metody v ekonomii

DT 65.012.122
518 : 33

Vydalo SNTL-Nakladatelství technické literatury n. p., Spálená 51, Praha 1 v roce 1967 jako svou 5878. publikaci v řadě ekonomické literatury — Redakce ekonomické literatury — Odpovědný redaktor Dr. Miloš Filip — Vazbu navrhl Josef Kalousek — Grafická úprava a technická redakce Vlasta Vítová — Vytiskl TISK, knižní výroba, n. p., Brno, provoz 1 — 604 stran, 42 obrázků, 192 tabulek — Typové číslo L31-C3-IV-41/3720-III — Vydání první — Náklad 10 200 výtisků — 43,37 AA, 45,24 VA — D-06*70074

03/2

Cena vázaného výtisku Kčs 35,50 — I
104/21,852

Publikace je určena jako učebnice pro studenty vysokých škol ekonomických a postgraduálních kursů z oboru matematických metod v ekonomii i pro široký okruh hospodářských pracovníků.

04-307-67 Kčs 35,50 — I